



신재민의 수학공간 수학 영역

1

난이도 상 문제해결력 높이는 방법
(Killer 문제 대비 공부법)

안녕하세요 신SUN입니다.

6월모평 보느라 너무나 수고하셨습니다.

아시죠? 6월 모평은 사실 우리에게 모르는 부분을 미리 짚어주며

이 후에 어떤 방향으로 공부해야 하는지 방향을 알려주는 시험 이라는 것.

어찌보면 올해 나온 문제 중 가장 퀄리티 높은 시험을 치루셨다고 봐도 돼요

수미잡.. 수미잡..

대신 이 시험을 그냥 넘기시지 말고 꼭 스스로 분석해보며 모자른 부분이

무엇인지, 어떤 부분에서 또 실수를 했는지 체크 후 계획 잘 짜셔서 다시

달려나가길 바랍니다. 아직 지쳐서 건기엔 너무 많은 시간이 남았답니다.

자, 오늘은 어떤 얘기를 해볼 것이냐.

아니 짤 것도 아닌데, 한 5일동안 이 질문만 수십개 받은 거 같아요.

'신SUN님, 아니 어려운 문제 안풀려서 막 이리저리 물어봐도

뭔가 맞는말씀은 다 해주시는데, 그래서 제가 정확히 뭘 어떻게 해야하는지

실전적인 방법 에 대한 궁금증이 해결이 안된다. 막막하다..

똑같이 문제 풀고 답보고 풀고 채점하고 .. 그냥 이렇게만 하면 되는건지 모르겠

습니다.. 좀 어떻게 해야하는지 실전적으로 알려주시면 감사해요 '

그래서, 최대한 이해되게 공감되게 그리고 집에서 직접 적용 할 수 있게

실전적이고 구체적인 난이도 높은 문제해결력 높이는 방법 에 대해 얘기해보려고 합니다.

고난이도 문제를 풀기 위해선 , 내가 문제 풀면서 무슨 생각을 해야하고

어떤 행동방식을 취해야

손도 못대겠는 어려운 문제들을 풀어갈 가능성을 높일지..

연습할 수 있는 방법을 알려드리겠습니다.

제가 생각하기로는 이 번 6월 모평을 기준으로, 80점 근처 학생들에게

맞는 글이 아닐까 싶네요.

그 이상 되시는 분들은 퍽고고 가볍게 쓱 보고 가도 될 듯?

아, 알고 계셔야 할 점이, 이 칼럼은 킬러문제를 해설하려는 것이 아닌

방향성을 잡아주려는데 그 의의가 있습니다. 이 점 참고하시고~

21, 29 , 30 고정적으로 틀리시는 분들

지금 막막하죠?

막 뭐해야할지 모르겠쥬.

우리 잠시만 예전으로 돌아가봅시다.

여러분이 4점문제를 갓 풀기 시작할 때 말입니다.

처음 4점문제를 맞이할 때,
'속속 오 그래그래 아주 잘 풀리는 구만' 이리셨나요?

아니쥬 공공 고민하다가,
겨우 답지보고 이해하고 넘어가셨쥬쥬

그리고나서 나중에 다시 풀면 틀리고, 또 다시 풀고 이리저리 반복하며
역지로 돌려보면서 익숙해지고 풀만해 진 거잖아요.

우리랑 친숙한 게임이랑 비교해봐요.
(아는 게임이 룰밖에 없어서)

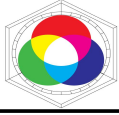
룰 이란 게임을 이기려면 두 가지가 필요하쥬

기본기(피지컬, 스킬샷의 정확도) + 운영(넥서스를 부시는 방법)

게임 재능이 똑같은 두 친구 A ,B 가 있다고 해보쥬

A는 '내 스킬 맞춰서 애 이기면 썸 이겨'
'이 챔피언 저번에 한 번 싸워봤는데, 이렇게 하니까 이겼어!'
생각 없이 자기할 것 만해요. 스킬 잘 쓰고 애 죽이면 게임 이긴다는 마인드

B는 '어떻게 하면 게임을 이기지?'
애들이 여기에 뭉쳐있으면 저 걸 노려서 이득을 보면 되지않을까?
상대 스킬은 이거니까 내가 이걸 피하면 이길 수 있겠구나'
끊임없이 생각을 하쥬.



그 결과는 후 에 엄청난 티어차이를 불러 일으킵니다.

수학도 마찬가지. 정말 똑같아요.

6월 성적이 똑같았던 A, B 학생이 있습니다.

A는 문제를 이렇게 풀니다.

풀고, 안 풀리면 답지보고

별 생각없이 답지에서 알려주는 대로 이해하고 다시 풀고를 반복.

적어도 개념공부를 잘 했다면, 답지가 이해될테니 다 풀긴 풀니다.

그리고 문제의 퀄리티와 난이도를 보고, 합리화를 하죠

틀릴만했네. 아 답에는 이렇게 풀면되겠네. 끝?

B는, 이렇게 풀니다

'대체 이 문제의 이 조건은 왜 나온거지? 문제에서 구하라는 것과 무슨 관계가 있길래 주어진거야? 그래서 무슨 개념을 써먹어야 하는건데?'

끊임없이 생각하며, 질문을 던져요.

이 **생각** 하는 습관에서

두 학생은 9월 모평, 큰 폭의 성적 차이가 나게됩니다.

소위 킬러문제라 하는 놈들 생각해보세요

이 놈들 풀기위해 해야될 단계가 어디 한 둘 인가요?

조건도 많이 나오고, 그 조건들이 의미하는 것들도 알아야하고
그래서 결국 구하라는 것과 어떻게 연결해야할지도 생각해야 하고,

여러분은 이제 생각 하면서 문제를 푸셔야 합니다.

만약, 생각을 해도 잘 안된다면

그럼 한없이 1시간 2시간 고민하는 것이아니라,

10분, 길게는 15분 고민하고 모르겠으면 답을 봅니다.

대신에, 대체 이 조건이 뭘 의미했는지 그래서 그 다음 조건과 어떻게 연결해야 하는지, 결국 어떤 개념을 활용했는지

문제 풀이의 단계를 모두 이해하고, 그 **단계별 수학적 근거들을 꼭 정리** 하셔야 합니다.

문제를 가지고 더 자세히 얘기해드리죠

그 전에 딱 한 가지만,

본격적인 **운명을** 들어가기 전에

수학문제를 풀기위한 **기본기**는 무엇인지 대충 느낌을 보죠

함수에서 절대값이 나온다: 절대값 안에 있는 함수를 $\geq 0, < 0$ 으로 나누기
미분 가능하려면?: 1)연속, 2) (편의상)좌미계=우미계 인지 둘 다 체크!

$S(x) = \int_0^x f(t)dt$ 가 나오면? : 적분-미분 관계에 의해 1) 미분 하기,

2) $x = a$ 대입해서 $S(a) = 0$ 을 활용

극값이 존재하지 않는다 : 증가함수or감소함수 \rightarrow 그래프 개형 파악하기

$\rightarrow f' \geq 0, \text{ or } \leq 0$ 을 활용

이해 되시나요?

만약 아예 모르는 말이다. 저 말이 무슨 말인지 모르겠다 라고 한다면,

개념공부 다시하고 오셔야 하는 것이고

알고는 있는데 떠오르지 않는다 라면,

개념은 열심히 보셨지만 이 내용들을 정리하고

하고 다른 문제에서 써먹어보면서 익숙해지면 자연스럽게 되는 것입니다.

자 이제 진짜 수학문제를 두고 어떻게 운영해야 하는지

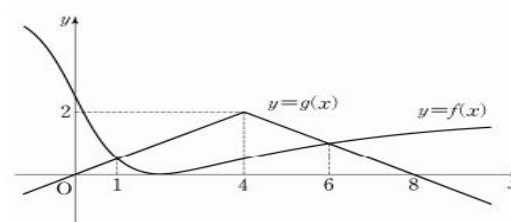
그 방법과 생각들을, 시뮬레이션을 통해 알아보시다

이 것들은 모두 여러분들이 직접 해야할 것들입니다.

본격적으로 문제를 보면서 얘기해볼까요?

최신 기출문제들로만 가져왔습니다. 익숙하겠죠?

20. 함수 $f(x) = \frac{5}{2} - \frac{10x}{x^2+4}$ 와 함수 $g(x) = \frac{4-|x-4|}{2}$ 의
그래프가 그림과 같다.



$0 \leq a \leq 8$ 인 a 에 대하여 $\int_0^a f(x)dx + \int_a^8 g(x)dx$ 의 최솟값은?

[4점]

- ① $14 - 5\ln 5$ ② $15 - 5\ln 10$ ③ $15 - 5\ln 5$
④ $16 - 5\ln 10$ ⑤ $16 - 5\ln 5$



시뮬레이션

두 함수가 그래프로 주어졌고, 문제 조건은 그래프와 a의 범위가 끝이다. 보니까, a의 위치를 결정해서 적분값의 최소를 구하는 것 같다. a의 위치가 어디일까를 먼저 생각해보자. a가 4보다 클 때와 작을 때로 나뉘서 a가 언제일 때, 최소가 되는지 추론을 해야하는 것인가. 너무 복잡한 것 같다. 자신이 없다. 다른 생각을 해보자. 잠시만, 구하라는 값을 보니, 어디서 많이 본 꼴이다. 적분과-미분 관계에서 배웠던 $S(x) = \int_0^x f(t)dt$ 이거 였다. 그럼 미분을 해봐야겠구나. 미분하면 $f(a) - g(a)$ 가 되는구나 최소, 최대가 되는 경우는, 보통 극값에서 만들어지니까 미분한 $f(a) - g(a) = 0$ 이 되고, 그 점의 좌우에서 도함수의 부호가 바뀔 때만 찾으면 게임 끝!

만약 이 문제를 못 풀어서 답지를 봤다면, 뭘 학습해야 할까?

학습해야 할 것

절대로, 저 문제를 푸는 방법은 미분하는 것이야! 라고 알고 있으면 안돼!

왜? 대체 어떤 근거로 미분을 하는 것인가 에 집중해야 한다.

그래프를 보고, a가 어떤 값일 때 적분값의 최소를 판단하기 힘들다면, 그래프를 해석하려고 집착하지말자.

왜 미분을 하는건데? 우리가 $S(x) = \int_0^x f(t)dt$ 의 꼴이 나오면 미분하고, $x = 0$ 대입하라고 교과서에서 알려줬어.

그래서 자연스럽게 $\int_0^a f(x)dx + \int_a^8 g(x)dx$ 꼴을 보고

$S(x) = \int_0^x f(t)dt$ 이 형태를 떠올릴 수 있어야해.

이렇게, 그 **생각(판단)의 근거**를 적어놓고 정리하셔야 합니다.

어려워 보인다고요?

처음은 그럴 수 있지만 계속 **생각하는 습관**을 만들어보면

해볼만 합니다.

다음 문제를 보면서 좀 더 연습해봅시다.

21. 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 증가하는 연속함수 $f(x)$ 가

$$\int_0^1 f(x)dx = 2, \int_0^1 |f(x)| dx = 2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$ 가

$$F(x) = \int_0^x |f(t)| dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$ 의 값은? [4점]

- ① $4 - \sqrt{2}$ ② $2 + \sqrt{2}$ ③ $5 - \sqrt{2}$
- ④ $1 + 2\sqrt{2}$ ⑤ $2 + 2\sqrt{2}$

시뮬레이션

문제 조건과 구하는 것 파악 및 해석 하기

증가하는 연속함수다. 함수가 나왔으니 그래프를 이용해야 겠다는 생각을 한다. 조건을 보니, 그냥 적분하는건 2인데 절대값을 씌우고 적분했더니 $2\sqrt{2}$ 이구만. 이건 적분구간 0부터 1까지 x축 아래에서 위로 올라가는 형태이겠는데? 왜냐면 x축 위에서 증가하는 함수였다면 두 적분값이 똑같았어야해.

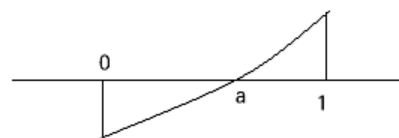
그리고, $F(x) = \int_0^x |f(t)|dt$ 나왔으니, 1) 미분 2) $x = 0$ 대입

그리고, 구하라는 것이 $\int_0^1 f(x)F(x)dx$ 이 것 인데,

적분이 나와오니 강 적분 해보고 안되면 치환 vs 부분적분 이겠지 생각한다.

해석한 후, 개념 활용

$f(x)$ 가 증가하는 연속함수이고, 주어진 두 개의 적분식을 통해서



로 $f(x)$ 그래프를 그릴 수 있고,

주어진 적분 값으로 $\int_0^a f(x)dx, \int_a^1 f(x)dx$ 를 구할 수 있음.

$F(x) = \int_0^x |f(t)|dt$ 가 나왔으니 미분 해보면

$F'(x) = |f(x)|$ 이다.

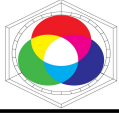
$\int_0^1 f(x)F(x)dx$ 에서 그냥 적분하는 건 말이 안되고,

$F(x)$ 를 미분한 게 $|f(x)|$ 니까 뭔가 치환해서 푸는 느낌이 솔솔난다.

$\int_0^1 f(x)F(x)dx$ 에서 $F'(x) = |f(x)|$ 이므로, $f(x) \geq 0, < 0$ 으로 나눠야하고, 그 때의 x 값이 a가 됨.

따라서, $\int_0^a -F'(x)F(x)dx + \int_a^1 F'(x)F(x)dx$ 으로 식변환 가능.

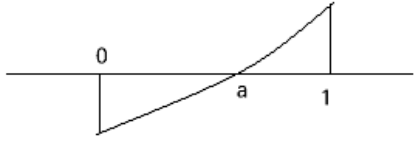
치환적분 쓰면 끝!



답지를 볼 때 학습해야 할 것

피적분함수에서 미분하거나, 적분하기 쉬운형태가 문제 조건에서 주어진다면 치환적분을 할 수 있어야 한다.

$\int_0^1 f(x)dx, \int_0^1 |f(x)|dx$ 의 적분 값+ 증가하는 연속함수 라는 조건을 통해서



이 그래프를 그릴 수 밖에 없는 근거를 배운다.

오키?

문제에 조건을 해석할 때, 어떤 생각을 갖고 해석해야 하고,

그 해석한 결과로 무슨 개념을 활용해야 하는지

본인이 문제풀 때 어떤 관점을 갖고 연습을 해야하는지

감이 옴?

다른 문제로 고고

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(x) \neq 1$
- (나) $f(x) + f(-x) = 0$
- (다) $f'(x) = \{1 + f(x)\}\{1 + f(-x)\}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

- <보 기>
- ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \neq -1$ 이다.
- ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
- ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 는 세 개의 변곡점을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

시뮬레이션

문제 조건 파악 및 해석 하기

미분가능한 함수이므로 당연히 연속이다. (나) 조건은 기함수 (다) 조건은, (나)조건에 의해서 바뀌서 해석할 수 있겠다. 그리고 도함수가 나오면 부호를 판단하는 경우가 많이 나옴. 함수가 원점을 지나는 기함수인데, $f(x) \neq 1$ 인 건, $f(x)$ 가 1을 넘어서 올라가지 않겠구나 라고 해석

- ㄴ. 은 감소한다 라고 보이려면 $f' < 0$ 임을 보이면 된다.
- ㄷ. 은 이계도함수의 부호변화가 생기는 점이 3개이면 된다.

해석한 후, 개념 활용

(나)조건에 의해서, (다) 식을 $f'(x) = (1 + f(x))(1 - f(x))$ 로 변형 가능. $f'(x) = 1 - (f(x))^2$ 이고 (가)조건+(나)조건을 통해 모든 x 에 대해서, $f(x) < 1$ 라고 해석 가능함 또한, $f'(x) = 1 - (f(x))^2$ 이므로, $f(x) < 1$ 이니까, $f'(x) > 0$ 라고 알 수 있음. 결국, $f(x)$ 는 증가함수 라는 것을 알 수 있다. $f''(x)$ 는 (다) 조건에서 $f'(x)$ 를 미분해서 $f''(x) = -2f(x)f'(x)$ 만들고 $f'(x) > 0$ 이고, (나) 조건에서 기함수 이므로 원점을 기준으로 $f(x)$ 의 부호가 다르므로 이계도함수의 부호변화 생기는 점은 원점 뿐! 1개!

학습해야 할 것

기본적으로, 기함수를 나타내는 식이라는 것 조건이 여러개 나오면 같이 연결시켜서 해석하는 연습. ㄴ, ㄷ을 보고 무슨 생각을 했어야 했는지 생각.

$f(x) \neq 1$ 과, 기함수를 보고 이건 무조건 $f(x) < 1$ 이야 라고 알고있으면 안돼!!

왜 그렇게 되는지, 스스로 따져보고 그 근거를 배워가야 함



계속 똑같은 얘기만 한 것 같아요.

정리

1. 문제 풀기 전

펜 내려놓고 30초 정도 생각하면서 문제에서 주어진 조건과 구하라는 것이 뭘 의미할지 생각해보는 것

2. 킬러문제는 분명 문제의 조건이 2개 이상일 것.

그 조건들이 뭘 의미할지 그리고 내가 해석한 것들을 바탕으로 구하라는 것을 풀어내기 위해 무슨 개념을 활용해야 할지를 꼭 생각

3. 답을 구하는 과정을 모두 수학적으로 근거해서

왜 이렇게 되는지 다 따져보기. 짝짝함이 남지 않도록

4. 만약 아무리 고민해도 안되는 문제는 답을 본다.

단, 답지를 볼 때 A 조건 나올 땐 이렇게 생각해야 된다!
라고 그 방법을 외우는 것이 아니라, 왜 저렇게 해석하는 지 그 판단의 근거를 배운다.

결론은 생각하면서 문제풀기.

해보세요.

직접 해보시면

본인이 지금까지 왜 문제를 풀고 또 풀어도

비슷한 유형에서 모르는 문제가 나오는지,

푸는 문제양에 비해 성적이 오르지 않았는지

알게 됩니다.

힘내시고 열공하세요.