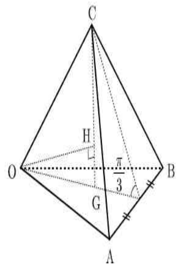
안녕하세요. 동경입니다.
기벡 29번 기출 문제와 사관학교 시험 문제에 대해서 살펴보고자 합니다.
결론부터 말씀드리면, 사관학교 기출문제는 수능과 매우 밀접한 관계를 가지고 있으며, 수능 전에 꼭 12학년도 기출문제부터 모두 풀어봐야 한다는 것입니다.
17, 18, 19학년도 수능 29번 문제와 사관학교 3문항을 예를 들어 보여드리겠습니다.

29. 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 $\overrightarrow{OP}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 그림과 같이 사면체 OABC에서 삼각형 OAB와 삼각형 CAB는 모두 정삼각형이고, 삼각형 OAB와 삼각형 CAB가 이루는 이면각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다. 정삼각형 OAB의 무게중심을 G, 점 O에서 선분 CG에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 할 때, $\overrightarrow{OH}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$를 만족시키는 세 상수 p, q, r에 대하여 $28(p+q+r)$의 값을 구하시오. [4점]



왼쪽 문제는 17학년도 수능, 오른쪽 문제는 12학년도 사관 30번입니다.

- 두 문제 모두, 필요한 벡터를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 등으로 설정한 후, 벡터의 내적을 사용하여 문제를 푸는 것이 가장 간결한 풀이이며, 교육과정 상 문제의 목표에 가장 적합한 출제의도를 가지고 있습니다.
- 복잡하긴 하지만, 두 문제 모두, 좌표를 설정하여 문제를 풀 수 있습니다. 다만, 평가 목적이 엄청난 계산능력을 지향하는 것이 아니므로, 흔히 삼수선의 정리를 보이는 두 평면에 수직인 평면 안에서 계산을 진행하면 됩니다.
(평가원에서는 순수한 공간도형의 문제가 아니라면, 벡터나 좌표에 대해서 묻고 싶을 땐, 항상 한 평면 안에서 계산할 수 있도록 모두 유도했습니다.)
- 수능에서는 3점 문제를 제외하고, 한 번도 이런 유형으로 문제 출제를 하지 않았다는 점에서 유의미합니다.

29. 좌표공간에 구 $x^2+y^2+z^2=6$이 평면 $x+2z-5=0$과 만나서 생기는 원 C가 있다. 원 C 위의 점 중 y좌표가 최소인 점을 P라 하고, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}|^2$의 최댓값은 $a+b\sqrt{30}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

B형 수학영역

28. 좌표공간에서 구 $(x-6)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=16$ 위의 점 P와 yz평면 위에 있는 원 $(y-2)^2+(z-1)^2=9$ 위의 점 Q 사이의 거리의 최댓값을 구하시오. [4점]

왼쪽 문제는 18학년도 수능, 오른쪽 문제는 15학년도 사관 28번입니다.

- 먼저 18학년도 수능 문제는

① y축에 평행한 평면과 구가 만나서 생기는 원 위에서 y좌표를 최소인 점을 특정하여 지정했으므로, 점 P의 좌표를 찾고, 점 Q의 좌표를 찾은 다음(좌표 관찰 ⇔ 대수적 풀이)

$|\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}|^2$의 값의 최대를 찾아야 합니다.

② 그런데, 점 P, Q는 고정되어 있으므로 $\overline{PQ}$의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}|^2=4|\overrightarrow{MX}|^2$임을 알 수 있습니다.(벡터의 변형)

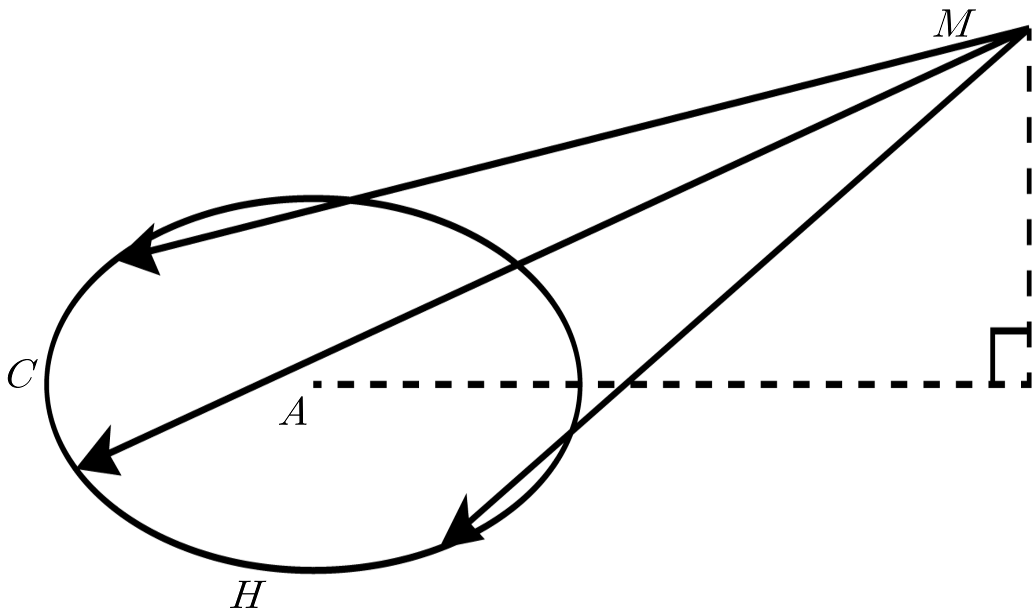
또, M은 평면 밖의 점이기 때문에, 평면 밖의 점에서 평면 위에 있는 원 위 점까지의 최댓값을 구하면 됩니다.

③ 점 M에서 x+2z-5=0에 내린 수선의 발을 점 H 라 하고, 원 C의 중심을 점 A 라 하면

$|\overrightarrow{MX}|^2=|\overrightarrow{MH}|^2+|\overrightarrow{XH}|^2$이 되고, $|\overrightarrow{MH}|^2$은 고정이므로, $|\overrightarrow{XH}|^2$의 최댓값을 구하면 됩니다.

(→ 2차원의 거리를 1차원의 거리로 만들어 비교하는 것)

$|\overrightarrow{XH}|^2$의 크기는 평면 위 한 점에서 원 위의 점까지 거리의 최댓값을 구하는 것이므로 쉽게 구할 수 있습니다.



- 15학년도 사관 28번 문제는 구 위의 한 점과 평면 위에 있는 원 위 점까지의 최댓값을 구하는 문제인데, 사실 구 위의 점과의 거리는 구의 중심에서 어느 방향으로도 직선을 만들어 낼 수 있으므로, 구의 중심과의 거리의 최댓값으로 귀결되며, 풀이는 18학년도 수능 문제와 동일합니다.

- 사실 기하의 논리를 끌어내는 것은 15학년도 사관 문제가 더 어렵습니다. 18학년도 수능은 15학년도 사관 문제를 알고 있고, ①, ②를 떠올렸다면, 쉽게 풀어낼 수 있는 문제입니다.

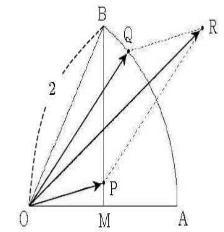
그러나 15학년도 사관 문제를 풀지 않아, ③의 과정을 대수적으로 해결하려고 했다면, 공간좌표에 표시하기도 힘들뿐더러, 계산이 굉장히 많아지는 효과를 가져왔을 것입니다. 그러므로 유의미합니다.

29. 좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OA의 중점을 M이라 하자. 점 P는 두 선분 OM과 BM 위를 움직이고, 점 Q는 호 AB 위를 움직인다. $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 R가 나타내는 영역 전체의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{3}$

왼쪽 문제는 19학년도 수능, 오른쪽 문제는 14학년도 사관 15번입니다.

- 두 문제 모두 벡터의 일차결합이 나타내는 자취의 영역을 찾는 문제입니다.
- 풀이 방법은 동일하게 17학년도 수능에서 사용했던 개념, 벡터가 좌표의 대용이 될 수 있음을 드러냅니다. 평면 위에서 2개, 공간 위에서 3개의 기저벡터를 사용하여 굳이 직교좌표계를 찾지 않아도 점들의 집합을 표현할 수 있다는 것이 이 문제가 내포한 개념입니다.

18학년도 수능 문제는 $\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})$의 영역을 먼저 작도한 후, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$의 자취를 더하여 $\overrightarrow{AX}$가 어떻게 표현되는지 관찰하셔야 하고

14학년도 사관 문제는 점 P가 $\overline{OM}$, $\overline{BM}$을 움직일 때를 나누어 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$의 영역을 작도해야 합니다.

- 쓰이는 개념도 구하는 것도 모두 똑같은데, 19학년도 수능은 14학년도 사관 15번을 발전시킨 셈이므로, 이에 관해 준비가 되었다면 유의미하게 도움이 됩니다.