

제 2 교시

2021학년도 네모의꿈 6월 모의고사 문제지

수학 영역 (가형)

성명		수험 번호																		
----	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰십시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

세상은 등글게 살아야 해

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

네모의꿈



제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. ${}_6P_2$ 의 값은? [2점]

- ① 36 ② 43 ③ 50 ④ 57 ⑤ 64

2. $\sec \frac{3\pi}{4}$ 의 값은? [2점]

- ① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+2}-n)$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

4. $(1+x^2)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^3$ 의 전개식에서 x 의 계수는? [3점]

- ① -15 ② -12 ③ -9 ④ -6 ⑤ -3

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_5 + a_7 = 20$$

일 때, $\sum_{n=1}^{11} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 70 ② 80 ③ 90 ④ 100 ⑤ 110

6. 곡선 $\ln(x+y) - xy = 1$ 위의 점 $(0, e)$ 위에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ① $\frac{e^2-1}{2}$ ② $\frac{e^2+1}{2}$ ③ e^2-1
 ④ e^2+1 ⑤ $\frac{3(e^2-1)}{2}$

7. 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-4} \geq 27^{1-x}$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

8. 검은색 바둑돌 4개와 흰색 바둑돌 4개 중 6개의 바둑돌을 선택하여 한 줄로 나란히 세우는 경우의 수는? (단, 같은 색깔의 돌은 구분하지 않는다.) [3점]

- ① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

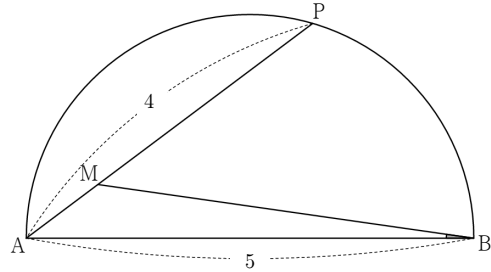
9. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\sqrt{n+4} - \sqrt{n} < \sqrt{na_n} < \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

을 만족할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)^2 a_n$ 의 값은? [3점]

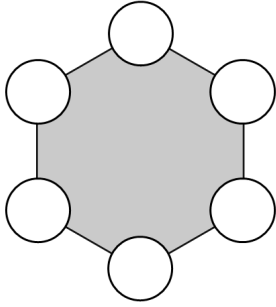
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=5$ 인 반원 위에 점 P 를 $\overline{AP}=4$ 가 되도록 잡는다. 선분 AP 를 1:3으로 내분하는 점 M 에 대하여 $\cos(\angle MBA)$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{11\sqrt{2}}{20}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

11. 그림과 같은 정육각형의 꼭짓점에 1부터 6까지의 수를 하나씩 배열할 때, 서로 마주보는 꼭짓점에 적혀있는 수의 합이 7이 되는 쌍이 적어도 한 개 존재할 확률은? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

12. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^8 a_k = 60, \sum_{k=1}^8 (-1)^k a_k = 12$$

을 만족할 때, $\sum_{k=1}^8 \tan\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) a_k$ 의 값은? [3점]

- ① $6\sqrt{3}$ ② 15 ③ $9\sqrt{3}$ ④ 20 ⑤ $12\sqrt{3}$

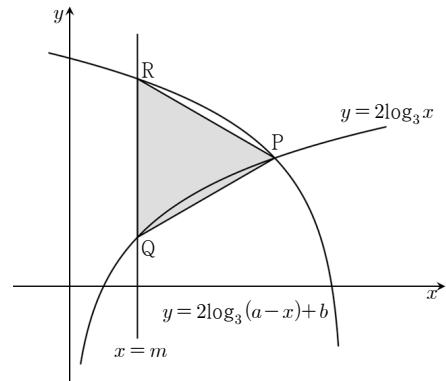
13. 실수 k 에 대하여 함수

$$f(x) = \sin^2 x - 2k \sin x + k + 3$$

의 최댓값은 6, 최솟값은 m 이다. 이를 만족하는 모든 m 의 값의 합은? [3점]

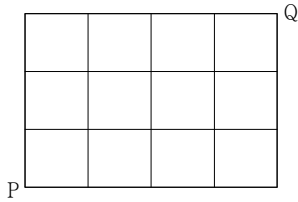
- ① $\frac{7}{9}$ ② 1 ③ $\frac{11}{9}$ ④ $\frac{13}{9}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

14. 그림과 같이 두 함수 $y = 2\log_3 x$ 와 $y = 2\log_3(a-x) + b$ 의 그래프가 만나는 점을 P라 하자. 양수 m 에 대하여 직선 $x = m$ 이 두 함수의 그래프와 만나는 점을 각각 Q, R이라 할 때, 삼각형 PQR은 넓이가 $4\sqrt{3}$ 인 정삼각형이다. abm 의 값은? (단, a, b 는 양수이다.) [4점]



- ① 18 ② 24 ③ 30 ④ 36 ⑤ 42

15. 그림과 같이 한 칸의 길이가 1인 정사각형 12개로 이루어진 길이 있다. 민수는 P지점에서 Q지점으로 이동하고, 태중이는 Q지점에서 P지점으로 이동한다. 같은 시간 동안 이동하는 거리는 민수가 태중이의 2배이다. 민수와 태중이가 출발 지점에서 동시에 출발하여 최단경로를 따라 이동하여 도착지점에 도달했을 때, 두 사람이 만났을 확률은? (단, 가능한 최단 경로들 중에서 하나의 경로를 선택할 확률은 같다.) [4점]



- ① $\frac{277}{1225}$ ② $\frac{281}{1225}$ ③ $\frac{57}{245}$ ④ $\frac{289}{1225}$ ⑤ $\frac{293}{1225}$

16. 실수 전체에서 미분 가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{\ln f(f(x)) - \ln f'(x)}{f(x)} = 1$$

을 만족한다. $f(1) - f'(1) = 2$ 일 때, $\{f(1)\}^2 \times g''(1)$ 의 값은? (단, $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.) [4점]

- ① $\frac{e}{4}$ ② $\frac{e}{2}$ ③ e ④ $2e$ ⑤ $4e$

17. 다음은 1부터 16까지 차례로 번호가 매겨진 4×4 모양의 정사각형 격자에 한 변을 공유하는 두 정사각형에 적혀있는 수의 곱이 모두 0이 되도록 각각의 격자에 0과 1을 써넣는 경우의 수를 구하는 과정이다.

16칸의 격자를 중앙의 4개와 외곽의 12개로 구분하면, 중앙의 4개 격자에는 1이 최대 2개만 들어갈 수 있다. 따라서 가능한 경우의 수는 아래 3가지이다.

i) 1이 0개 포함된 경우

외곽의 12개 격자 중에 중앙과 맞닿은 경우 반드시 곱이 0이 되므로, 맞닿아있는 두 격자에 모두 1이 채워져 있지만 않으면 된다. 선형으로 연결된 n 개의 격자의 배열에서 연속하는 두 격자에 1이 채워져 있지 않은 경우의 수를 a_n 이라 하면,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 4)$$

이다. 그러나 이 경우는 첫 번째와 n 번째가 모두 1이 되는 경우는 제외되어야 하므로, $a_{12} - a_{(가)}$ 가지이다.

ii) 1이 1개 포함된 경우

1을 포함한 격자와 맞닿아있는 격자 중에 외곽의 12개에 속한 격자는 2개다. 이 두 격자는 서로 맞닿아있지 않으므로 각각 0이 적혀야 한다. 또한, 외곽의 격자 중에 이 두 격자와 모두 맞닿아있는 격자에는 어떠한 수를 써도 상관이 없다. 따라서 $2 \times a_9$ 가지이다.

iii) 1이 2개 포함된 경우

1을 포함한 격자와 맞닿아있는 격자 중에 외곽의 12개에 속한 격자는 4개다.

(중략)

ii)와 같은 방법으로 구하면 (나) 가지이다.

중앙격자에 수를 채워넣는 방법의 수는 i)은 1가지,

ii)는 4가지, iii)은 (다) 가지 이므로, 경우의 수는

$$1 \times (a_{12} - a_{(가)}) + 4 \times 2 \times a_9 + (다) \times (나)$$

가지이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 p, q, r 이라 할 때, $p+q+r$ 의 값은? [4점]

- ① 110 ② 112 ③ 114 ④ 116 ⑤ 118

18. 자연수 n 에 대하여 $-n \leq x \leq n$ 에서 방정식

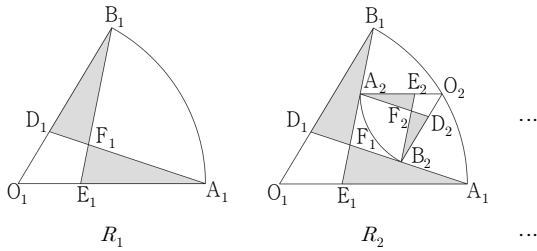
$$n \sin \frac{\pi}{2} x - x \tan \frac{\pi}{2} x = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값은?

[4점]

- ① 370 ② 390 ③ 410 ④ 430 ⑤ 450

19. 그림과 같이 반지름의 길이가 3이고, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 $O_1A_1B_1$ 의 두 변 O_1A_1 , O_1B_1 을 각각 1:2로 내분하는 점을 D_1 , E_1 이라 하자. 선분 A_1D_1 과 선분 B_1E_1 의 교점을 F_1 이라 하고, 두 삼각형 $A_1E_1F_1$ 과 $B_1D_1F_1$ 에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 호 A_1B_1 의 중점을 O_2 라 하고 점 O_2 를 지나고 선분 O_1A_1 에 평행한 선을 그어 선분 B_1E_1 과 만나는 점을 A_2 라 하고, 선분 O_1B_1 에 평행한 선을 그어 선분 A_1D_1 과 만나는 점을 B_2 라 하자. 부채꼴 $O_2A_2B_2$ 에 대하여 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속 반복하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{81(3-\sqrt{3})}{128}$
- ② $\frac{81(3-\sqrt{3})}{64}$
- ③ $\frac{81(3+\sqrt{3})}{128}$
- ④ $\frac{81(3-\sqrt{3})}{32}$
- ⑤ $\frac{81(3+\sqrt{3})}{64}$

20. 실수 전체에서 정의된 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 이계도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x) = f(x)\cos x + x^2(x-\pi)^2$
 (나) $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi) = 0$ 이고 $f'(\frac{\pi}{2}) < -\frac{\pi^2}{2}$ 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g'(c) = (\frac{\pi}{2})^3$ 인 c 가 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에 존재한다.
 ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극대이다.
 ㄷ. 함수 $g(x)$ 는 적어도 2개 이상의 점에서 극댓값을 갖는다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -\frac{a_n}{2} & (a_n = 2k) \\ 2a_n - 24 & (a_n = 2k+1) \end{cases} \quad (\text{단, } k \text{는 정수})$$

이다.

(나) $\{p \mid a_p = p\} = \{p_1, p_2\}$ ($p_1 < p_2$)

p_1 의 값을 작은 수부터 차례로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ 라 할

때, $\sum_{n=1}^{11} \alpha_n$ 의 값은? [4점]

- ① 160 ② 171 ③ 182 ④ 193 ⑤ 204

단답형

22. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

일 때, $\frac{1}{P(B|A)}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. $\sum_{n=2}^{15} \log_2(\log_2(n+1))$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

모든 자연수 n 에 대하여 $S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n - 1$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 ka_{3k-2}$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 두 곡선 $y = ke^x$ 와 $y = x^3 + 3x^2 - x - 7$ 가 접하도록 하는 모든 실수 k 의 값의 곱을 구하시오. [3점]

26. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 6$ 이고

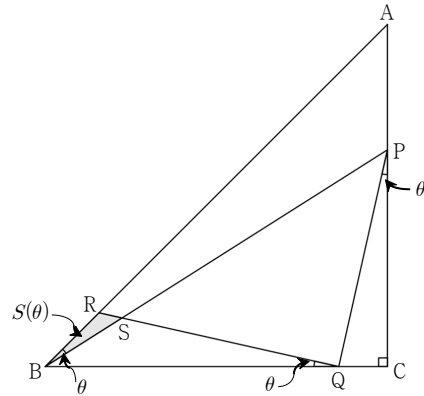
$$\sum_{n=1}^6 |a_n| = \sum_{n=1}^3 (a_n)^2$$

을 만족할 때, 가능한 모든 a_3 의 곱을 p 라 하자. $|p|$ 의 값을 구하시오. [4점]

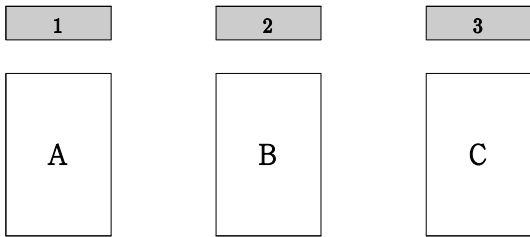
27. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하시오. [4점]

$$f(i-1) \leq f(i) \leq f(i-1)+2 \quad (i=2, 3, \dots, 7)$$

28. 그림과 같이 $\overline{AC} = \overline{BC} = 1$, $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 P를 $\angle ABP = \theta$ 가 되도록 잡고, 선분 BC 위에 점 Q를 $\angle CPQ = \theta$ 가 되도록 잡고, 선분 AB 위에 점 R를 $\angle BQR = \theta$ 가 되도록 잡는다. 선분 BP와 선분 QR의 교점을 S라 하자. 삼각형 BRS의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \alpha$ 라 하자. 100α 의 값을 구하시오. [4점]



29. 그림과 같이 1, 2, 3번 자리에 카드 A, B, C가 순서대로 놓여 있다. 1번 자리와 2번 자리에 있는 카드 또는 2번 자리와 3번 자리에 있는 카드를 서로 바꾸는 것을 시행이라고 하자. 1번 자리와 2번 자리를 바꾸는 시행을 할 확률과 2번 자리와 3번 자리를 바꾸는 시행을 할 확률은 같다. 9번의 시행 뒤 카드가 1, 2, 3번 자리에 C, B, A 순서로 놓여 있을 때, 9번의 시행 중에 카드배열이 처음과 같아지는 순간이 적어도 한 번 존재할 확률이 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x) = e^{|\ln(f(x))|}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\{t \mid g(x) \text{가 } x=t \text{에서 미분가능하지 않다}\} = \{-\alpha, \alpha\}$
- (나) $g(x)$ 가 극대가 되는 x 의 개수는 2이다.
- (다) 구간 $(0, \alpha]$ 에서 함수 $\left| \frac{g(x)-1}{xg(x)} \right|$ 의 최댓값은 $\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ 이다.

$f(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2021학년도 네모의꿈 6월 모의고사 (가형) 문제지



지은이 소개

집필 : UNIST 수학모의고사팀 네모의꿈

총괄 | 김범호

팀장 | 전승현

| 김태중

| 서민수

검토 : UNIST 수학모의고사팀 네모의꿈

팀장 | 한성재

| 공나빈

| 방세훈

| 조인규

발행정보

발행일 | 2020. 06. 02.

발행인 | UNIST 수학모의고사 팀 네모의꿈

온라인 시행 | OrbiQ 2020년 6월 6일 22시

온라인 배포 | 포만한 수학연구소, Laplace Club

오프라인 배포 | -

본 문제지에 대한 저작권은 UNIST 수학모의고사팀 네모의꿈에 있으며 저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 상업적으로 이용하거나, 2차적 저작물을 작성하는 등의 저작권을 침해하는 일체의 행위는 금지되어 있습니다. 이를 어길시 저작권법에 의거 처벌받을 수 있습니다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.