제 2 교시

# 수학 영역

MENTOR

**1.** $\frac{1}{4}<a<1$인 실수 $a$에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

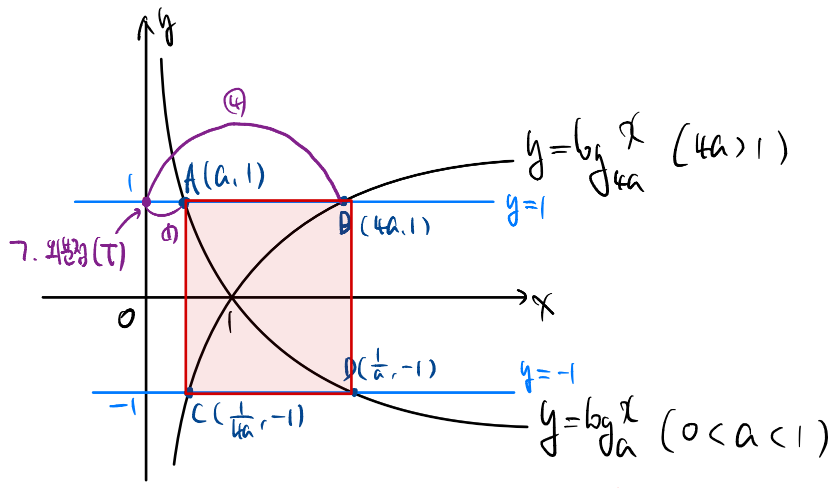
ㄱ. 선분 AB를 1 : 4로 외분하는 점의 좌표는 (0, 1)이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{CD}}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

[2022학년도 대학수학능력시험 수학 가형 13번 / 나형 18번]

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ




□ABCD가 직사각형 ⇒ $a=\frac{1}{4a}$ ∴ $a=\frac{1}{2}$ ㄴ.(T)

$\overline{AB}=3a$

$\overline{CD}=\frac{1}{a}-\frac{1}{4a}=\frac{3}{4a}$

⇒ $\overline{AB}<\overline{CD}$

⇔ $3a<\frac{3}{4a}$

⇔ $a<\frac{1}{4a}$

⇔ $4a^2-1<0$

$(2a-1)(2a+1)<0$

$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

∴ $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ ㄷ.(F)

**#13/18 Comment**

외분점 공식을 먼저 떠올리기 보다는 침착하게 그래프를 그려서 눈으로 확인 후 필요시 계산 하기!

**2.** $\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 $n$의 개수를 구하시오.

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 가형 27번]

$\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$

$=\log_4 2n^2-\log_4 n^{\frac{1}{2}}=\log_4 2n^{\frac{3}{2}}=N\le 40$

(N은 자연수)

$2n^{\frac{3}{2}}=4^N=2^{2N}$

∴ $n=2^{\frac{2}{3}(2N-1)}$ : 자연수

⇒ $2N-1$은 3의 배수이고 홀수이다. (∵ N이 자연수)

홀수!

$2N-1=3k$라 하면 (k는 홀수)

$1\le N\le 40$ 이므로

$1\le 3k\le 79$

∴ $\frac{1}{3}\le k\le\frac{79}{3}=26.xxx$

즉, k는 1~26 사이의 홀수이므로

$26/2=13$(개) Ans

**#27 Comment**

1) 로그의 성질 최대한 활용해서 계산시간 단축하기!

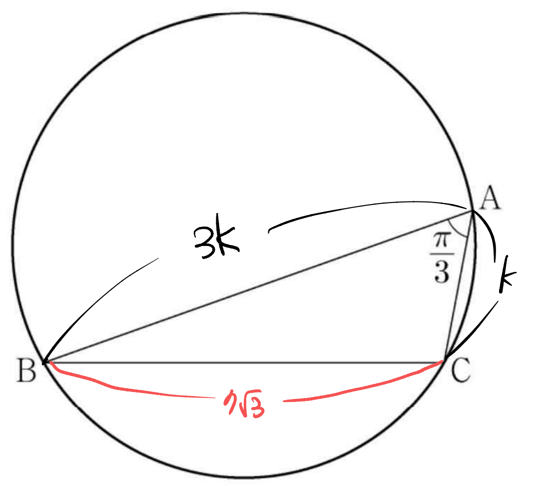
2) 치환할 때에는 항상 범위 / 조건 생각!

**3.** $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이를 $k$라 하자. $k^2$의 값을 구하시오.

비례관계

사인법칙 느낌!

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 나형 28번 / 가형 10번]




외접원의 반지름 길이 : 7

$\therefore 14 = \frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}$ $\quad \therefore \overline{BC} = 14\sin\frac{\pi}{3} = 7\sqrt{3}$

사인법칙!
삼각형 ABC의 외접원의 반지름 : R
$\Rightarrow 2R = \frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{CA}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}$

$\overline{BC}^2 = 49\times 3 = (3k)^2 + k^2 - 2\cdot(3k)\cdot(k)\cdot\cos\frac{\pi}{3}$
$= 10k^2 - 3k^2 = 7k^2$

코사인 법칙
$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CA}\cos A$

$\therefore k^2 = 21$ Ans

**#28/10 Comment**

개념을 확실히 익혔다면 충분히 할 수 있는 문제!
조건을 제대로 파악했다면 여지없이 sin 법칙과 cos 법칙을 써봤어야 한다!

**4.** 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\frac{a_8}{a_1}$의 값은?

[2021학년도 대학수학능력시험 수학 가형 21번 / 나형 21번 유사]

① 91 ② 92 ③ 93 ④ 94 ⑤ 95

$a_8 = a_2 \times a_4 + 1 = (a_2)^3 + a_2 + 1$
$a_4 = (a_2)^2 + 1$
$a_2 = a_2 \times a_1 + 1 \iff a_1 = \frac{a_2 - 1}{a_2}$ $(\because a_2 \neq 0)$

$a_{15} = a_2 \times a_7 - 2 = (a_2)^3 - 3(a_2)^2 - 2a_2 - 2$
$a_7 = a_2 \times a_3 - 2 = a_2^2 - 3a_2 - 2$
$a_3 = a_2 \times a_1 - 2 = a_2 - 3$

$\therefore a_8 - a_{15} = 3(a_2)^2 + 3a_2 + 3 = 63$
$\therefore (a_2)^2 + a_2 - 20 = 0$
$\therefore a_2 = -5$ or $4$

(i) $a_2 = -5$ 라고 하면
$a_1 = \frac{6}{5} > 1$ 이므로 조건 $0 < a_1 < 1$ 에 의해 모순

(ii) $a_2 = 4$ 라고 하면 $\Rightarrow a_8 = (a_2)^3 + a_2 + 1$
$a_1 = \frac{3}{4}$ 이므로 적합. $= 64 + 4 + 1 = 69$

$\therefore \frac{a_8}{a_1} = 91$ Ans

나형 ver

$a_7 = 2$일 때, $a_{25}$의 값은? [4점]

① 78 ② 80 ③ 82 ④ 84 ⑤ 86

$a_7 = 2 \cdots ①$
$a_7 = a_2 \times a_3 - 2 \cdots ②$
$a_6 = a_2 \times a_3 + 1$
$a_5 = (a_2)^2 - 2 \cdots ③$
$a_4 = (a_2)^2 + 1 \cdots ④$

②에서 $a_2 \times a_3 = 4$ 이고 $a_6 = 5 \cdots ⑤$
$a_2 \times a_1 = t$ 라 두면, ③,④에서
$a_3 \times a_2 = (t-2)(t+1) = 4$ $\quad \therefore t^2 - t - 6 = 0$
$\therefore t = 3$ or $-2$

i) $t = -2$
④에서 $a_2 = -1$, $a_1 = 2$ 이므로 $0 < a_1 < 1$ 에 모순

ii) $t = 3$
$a_2 = 4$, $a_1 = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ 적합

$a_{25} = a_2 \times a_{12} - 2 = 4 \times 21 - 2 = 82$ Ans
$a_{12} = a_2 \times a_6 + 1 = 21$

**#21 Comment**

1) 수열의 귀납적 정의
⇒ 고민없이 대입 후 추론!
2) 문제 조건 ⟷ 구하는 것 사이의 연관성 생각!! (cf 2020 수능 나형 21)
3) 문제에 따라서 역추적이 유리할 수도 있다!