20210626(가)

26. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k = -16$, $S_{k+2} = -12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{7}$

풀이 ① 수식적 접근

$$S_{k+2} - S_k = a_{k+2} + a_{k+1} = 4$$

$$(a_1 + (k+1)\times 2) + (a_1 + k\times 2) = 4$$

$$2a_1 + 4k + 2 = 4$$

$$a_1 + 2k - 1 = 0$$

$$a_1 = 1 - 2k$$

$$S_k = \frac{(2a_1 + (k-1)\times 2)k}{2} = -k^2 = -16$$

$k=4$, $a_1 = -7$, $a_{2k} = a_8 = -7 + 7\times 2 = 7$

풀이 ② 나열, 관찰하는 풀이

$$S_{k+2} - S_k = \overset{+2}{a_{k+2} + a_{k+1}} = 4$$

2 차이인데 합이 4 → 1+3

a_1	a_2	a_3	a_k ($k=4$)	a_{k+1} (a_5)	a_{k+2} (a_6)	a_7	a_8
-7	-5	-3	-1	1	3	5	7

-16

#Comment

① 등차수열은 일반항, 부분 합 이용한 수식적 접근도 가능

② 하지만, 나열하여 관찰하는 것이 더 중요!

20220913

13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

중요 by ③

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

자연수 $d \Rightarrow a_m < 0,\ a_{m+3} > 0$

$\Rightarrow \underset{+d}{a_m} + \underset{-d}{a_{m+3}} = 0$

$\Rightarrow a_{m+1} + a_{m+2} = 0$ by ②

$+d$, 그런데 합이 0 $\Rightarrow -\frac{d}{2} + \frac{d}{2} = 0$

$a_1 \cdots a_m \quad a_{m+1} \quad a_{m+2}$

$-45 \qquad -\frac{d}{2} \qquad \frac{d}{2}$

by ① m칸 차이 $+md$

$-45 + md = -\frac{d}{2}$,

$(m + \frac{1}{2})d = 45$,

3이상 홀수 $(2m+1)d = 90 \xrightarrow{\text{by ③}} 90 = 3^2 \times 2 \times 5$의 약수

1, 2, 5, 10,
3, 6, 15, 30,
9, 18, 45, 90,

		a_1	a_2	a_3	a_4
3	30	-45	-15	15	>-100
5	18	-45	-27	-9	9 >-100
9	~~10~~	-45	-35	-25	≤ -100
15	~~6~~	-45	-39	-33	≤ -100
45	~~2~~	-45	-43	-41	≤ -100

$\boxed{48}$

#Comment

나열하여 관찰할 때

① 항의 넘버링 차이에 주목하기

② 등차수열 합의 대칭성에 주목하기(등차중항 확장)

③ 정수, 자연수 조건 있으면 약수 조건 활용 생각해보기

중요 by ⑤ 20200917(고2)

17. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_7 = 37$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{13} a_k$이다.

$\sum_{k=1}^{21} |a_k|$ 의 값은? [4점]

$n=12$: $a_1+\cdots+a_{12} \le a_1+\cdots+a_{12}+a_{13}$, $a_{13} \ge 0$

$n=14$: $a_1+\cdots+a_{13}+a_{14} \le a_1+\cdots+a_{13}$, $a_{14} \le 0$

$$\left.\begin{aligned} a_{13} &= a_7+6d = 37+6d \ge 0 \\ a_{14} &= a_7+7d = 37+7d \le 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{-6.xx}{-\frac{37}{6}} \le d \le \underset{-5.xx}{-\frac{37}{7}} \quad \therefore d=-6.$$

$a_1 \cdots a_7 \cdots a_{13}$ $a_{14} \cdots a_{21}$

$73 \cdots 37 \cdots 1$ $-5 \quad -47$

$+6d=-36$ $+6d=-36$ $+7d=-42$

등차 13개 등차 8개

$$\sum_{k=1}^{21}|a_k| = (73+\cdots+1)+(5+\cdots+47)$$
$$= 74\times\frac{13}{2} + 52\times\frac{8}{2}$$
$$= 37\times 13 + 26\times 8$$
$$= 370+111+160+48$$
$$= 481+208$$
$$= 689$$

$\boxed{689}$

#Comment

① 등차수열은 부호가 일정하거나 “단 한 번” 바뀜

② 부호가 변하는 부분이 핵심이 되는 경우가 많고

③ 이를 조건에서 숨기는 방법이 다양하다.

④ 부호 변화 힌트 : 부분 합의 대소(조건 나)

⑤ 정수, 자연수 조건 있으면 약수 조건 활용 생각해보기

20200717(가형)

17. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

라 할 때, S_n, T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_7 = T_7 = 42$
(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다.

T_{15}의 값은? [4점]

※ $x \geq 0$ 이면 $|x| = x$
$x < 0$ 이면 $|x| = -x \Leftrightarrow |x| + x = 0.$

(가) $T_7 - S_7 = \underbrace{|a_1| - a_1}_{\geq 0} + \underbrace{|a_2| - a_2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{|a_7| - a_7}_{\geq 0} = 0$

$|a_1| = a_1, \cdots, |a_7| = a_7, \quad \therefore a_7 \geq 0$

(나) $(S_7 + T_7) - (S_6 + T_6) = (S_7 - S_6) + (T_7 - T_6) = 0$

$a_7 + |a_7| = 0, \quad \therefore a_7 \leq 0$

따라서 $a_7 = 0.$

$S_7 = 42 = \dfrac{(a_1 + \overset{0}{\cancel{a_7}}) \times 7}{2}, \quad \therefore a_1 = 12$

$a_1 \quad \cdots \quad a_7 \quad a_8 \quad \cdots \quad a_{15}$

7개 8개

12 0 -2 -16

$+6d = -12$ $\quad -2 \quad$ $+7d = -14$

$(12+0) \times \frac{7}{2} + \dfrac{(2+16) \times 8}{2}$

$= 42 + 72 = 114$

$\boxed{114}$

#Comment
① 부호 변화 힌트 : 절댓값

20190921(고2 가형)

21. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{14}의 값은? [4점]

a_m 점점 커진다. 음수 → 양수

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2m-1} a_n = 0$을 만족시키는 자연수 m이 존재한다.

(나) $\displaystyle 2\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} |a_n| = 90$

$a_1 + a_2 + \cdots + \underbrace{a_m}_{=0} + \cdots + a_{2m-2} + a_{2m-1} = 0$

$a_1 + \cdots + a_{15} = 45 = \dfrac{(a_1+a_{15})\times 15}{2}$

$a_1 + a_{15} = 6 = 2a_8$,

⊖ ⊕

$a_8 = 3$

⊖ $1<m<8$인 자연수 ⊕

a_1 ⊖ a_m ⊕ a_8 a_{15}

0 3 $(15-m)d$

합 △ 합 □

$+(8-m)d = 3$ ⋯ ㉠

$\triangle + \square = 45$, $-\triangle + \square = 90$

$\Rightarrow \triangle = -\dfrac{45}{2}$, $\square = \dfrac{135}{2} = (15-m)d \times \dfrac{(16-m)}{2}$

$\therefore (15-m)(16-m)d = 135$ ⋯ ㉡

풀이 ① 기계적 계산

㉡ ÷ ㉠ $(15-m)(16-m) = 45(8-m)$

$m^2 + 14m - 120 = 0$

$(m+20)(m-6) = 0$.

$m = 6$, $d = \dfrac{3}{2}$

$a_{14} = a_8 + 6d = 3 + 9 = 12$

$\boxed{12}$

풀이 ② m이 자연수니까 $(1<m<8)$

㉠ $(8-m)d = 3$

m	d
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{3}{5}$
4	$\frac{3}{4}$
5	1
6	$\frac{3}{2}$ ✓
7	3

㉡에 대입해서 되는 것 찾기
→ $m=6$, $d=\frac{3}{2}$

#Comment

① 부호 변화 힌트 : 절댓값

20191017(나형)

17. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) S_n은 n에 대한 이차식이다. → a_n은 등차 $(n \geq 2)$
> (나) $S_{10} = S_{50} = 10$
> (다) S_n은 $n = 30$에서 최댓값 410을 갖는다.

50보다 작은 자연수 m에 대하여 $S_m > S_{50}$을 만족시키는 m의 최솟값을 p, 최댓값을 q라 할 때, $\sum_{k=p}^{q} a_k$의 값은? [4점]

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$\Rightarrow S_n = \dfrac{(2a_1+(n-1)d)n}{2}$

$= \boxed{\frac{d}{2}}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n + 0$

→ 최고차항 계수 $\frac{d}{2}$, 상수항 0인 이차식

* $S_n = \boxed{2}n^2 + 4n$

→ $d = 4$, $a_1 = S_1 = 6$. $a_n = 4n+2$

$S_n = an^2 + bn + c$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$

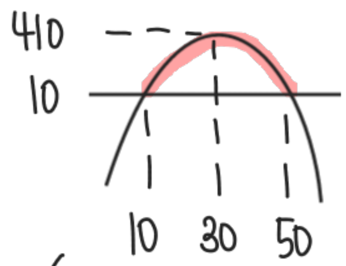
$= an^2 + bn + c - a(n-1)^2 - b(n-1) - c$

$= 2an - a + b$

S_n 이차식 → a_n 등차$(n \geq 2)$

$a_1 = S_1 \Leftrightarrow a+b = a+b+c$

$c = 0$ 이면 a_n 등차$(n \geq 1)$



$11 \leq m \leq 49$

p q

$S_n - 10 = \square(n-10)(n-50)$

$n = 30$: $400 = \square \times 20 \times (-20)$, $\square = -1$

$S_n = -(n-10)(n-50) + 10$

$= -n^2 + 60n - 490$, $d = -2$

$a_1 = S_1 = -1 + 60 - 490 = -431$

$a_1 + a_2 = S_2 = -4 + 120 - 490 = -374$

$a_2 = 431 - 374 = 57$

$a_n = \begin{cases} -2n + 61 & (n \geq 2) \\ -431 & (n = 1) \end{cases}$

$\sum_{k=11}^{49} a_k = S_{49} - S_{10} = -39 \times (-1) + 0 = 39$

$\boxed{39}$

#Comment

① 수식적 접근 : 등차수열 부분 합과 이차식의 관계