

● 수학 영역 ●

수학 정답

1	④	2	④	3	③	4	②	5	②
6	①	7	③	8	③	9	⑤	10	①
11	④	12	②	13	①	14	⑤	15	⑤
16	10	17	20	18	18	19	7	20	2
21	84	22	108						

해설

1. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 진수를 구한다.
 $\log_3 x = 3$ 이므로 $x = 3^3 = 27$

2. [출제의도] 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_0^3 (x+1)^2 dx = \int_0^3 (x^2 + 2x + 1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_0^3 = 21$$

3. [출제의도] 삼각함수의 주기를 이해한다.

$$\tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = \tan\left(\pi(x+1) + \frac{\pi}{2}\right)$$

따라서 함수 $y = \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 주기는 1

4. [출제의도] 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_1 = 1^2 - 5 \times 1 = -4$, $S_2 = 2^2 - 5 \times 2 = -6$
 그러므로 $a_2 = S_2 - S_1 = -6 - (-4) = -2$
 따라서 $a_1 + d = a_2 = -2$

5. [출제의도] 함수의 연속에 대한 성질을 이해한다.

함수 $(x^2 + ax + b)f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + ax + b)f(x)$
 그래프에서 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b)f(x) = (1+a+b) \times 1 = 1+a+b$,
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + ax + b)f(x) = (1+a+b) \times 3 = 3(1+a+b)$
 에서 $1+a+b = 3(1+a+b)$
 따라서 $a+b = -1$

6. [출제의도] 지수에 미지수를 포함한 방정식을 푼다.

정사각형의 한 변의 길이가 1이므로
 $6^{-a} - 6^{-a-1} = 1$, $6^{-a} - \frac{6^{-a}}{6} = 1$, $\left(1 - \frac{1}{6}\right) \times 6^{-a} = 1$
 따라서 $6^{-a} = \frac{6}{5}$

7. [출제의도] 미분가능성을 이해하여 함숫값을 구한다.

$f(x)g(x) = \begin{cases} -(x+3)(2x+a) & (x < -3) \\ (x+3)(2x+a) & (x \geq -3) \end{cases}$
 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-3$ 에서 미분가능하다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x)g(x) - f(-3)g(-3)}{x+3}$
 $= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x)g(x) - f(-3)g(-3)}{x+3}$,
 $\lim_{x \rightarrow -3^-} (-2x-a) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (2x+a)$
 따라서 $6-a = -6+a$ 에서 $a=6$

8. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제를 해결한다.

점 P는 두 곡선 $y = \log_2(-x+k)$, $y = -\log_2 x$ 의 교점
 이므로 $\log_2(-x_1+k) = -\log_2 x_1$, $-x_1+k = \frac{1}{x_1}$

즉, $x_1^2 - kx_1 + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$

점 R는 두 곡선 $y = -\log_2(-x+k)$, $y = \log_2 x$ 의 교점
 이므로 $-\log_2(-x_3+k) = \log_2 x_3$, $\frac{1}{-x_3+k} = x_3$

즉, $x_3^2 - kx_3 + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 의해 x_1, x_3 은 이차방정식 $x^2 - kx + 1 = 0$ 의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $x_1 x_3 = 1$

그러므로 $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$ 에서

$$(x_1 + x_3)^2 = (x_3 - x_1)^2 + 4x_1 x_3 = (2\sqrt{3})^2 + 4 \times 1 = 16$$

따라서 $x_1 + x_3 = 4$

9. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 합을 구한다.

자연수 k 에 대하여

(i) $n = 2k-1$ 일 때, $a_{2k-1} + a_{2k} = 2(2k-1) = 4k-2$

$$\text{이므로 } \sum_{n=1}^{22} a_n = \sum_{k=1}^{11} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{11} (4k-2)$$

$$= 4 \times \frac{11 \times 12}{2} - 2 \times 11 = 242$$

(ii) $n = 2k$ 일 때, $a_{2k} + a_{2k+1} = 2 \times 2k = 4k$

$$\text{이므로 } \sum_{n=2}^{21} a_n = \sum_{k=1}^{10} (a_{2k} + a_{2k+1}) = \sum_{k=1}^{10} 4k$$

$$= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} = 220$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_{22} = \sum_{n=1}^{22} a_n - \sum_{n=2}^{21} a_n = 242 - 220 = 22$$

[다른 풀이]

자연수 k 에 대하여 $a_{2k} + a_{2k+1} = 4k$, $a_{2k-1} + a_{2k} = 4k-2$
 이므로 $a_{2k+1} - a_{2k-1} = 2$

즉, 수열 $\{a_{2k-1}\}$ 은 공차가 2인 등차수열이다.

그러므로 $a_{2k-1} = a_1 + (k-1) \times 2 \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 에 $k=11$ 을 대입하면 $a_{21} = a_1 + 20 \dots\dots \textcircled{2}$

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n + a_{n+1} = 2n$ 이므로

$n=21$ 을 대입하면 $a_{21} + a_{22} = 42 \dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면 $(a_1 + 20) + a_{22} = 42$

따라서 $a_1 + a_{22} = 22$

10. [출제의도] 함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.

함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하고 $g(a)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{g(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)}{x-a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|(x-a)f(x)|}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}$$

그러므로 $-|f(a)| = |f(a)|$ 에서 $f(a) = 0$

$f(x) = (x-a)(x-k)$ (k 는 상수)라 하면

함수 $g(x) = |(x-a)^2(x-k)|$ 가 $x=3$ 에서만 미분가능하지 않으므로 $k=3$ 이다.

그러므로 $g(x) = |(x-a)^2(x-3)|$

$h(x) = (x-a)^2(x-3)$ 이라 하면

$a < 3$ 이고 함수 $g(x)$ 의 극댓값이 32이므로 함수 $h(x)$ 의 극솟값은 -32이다.

$$h'(x) = 2(x-a)(x-3) + (x-a)^2 = (x-a)(3x-6-a) = 0$$

함수 $h(x)$ 는 $x = \frac{6+a}{3}$ 에서 극솟값 -32를 갖는다.

$$h\left(\frac{6+a}{3}\right) = \left(\frac{6+a}{3} - a\right)^2 \left(\frac{6+a}{3} - 3\right) = -4\left(1 - \frac{a}{3}\right)^3 = -32$$

$$\left(1 - \frac{a}{3}\right)^3 = 8 \text{이므로 } 1 - \frac{a}{3} = 2 \text{에서 } a = -3$$

따라서 $f(x) = (x+3)(x-3)$ 에서 $f(4) = 7$

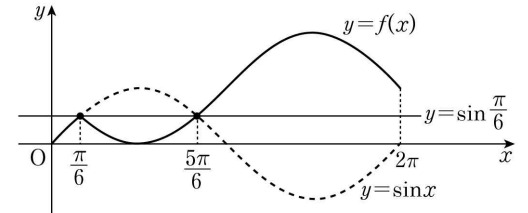
11. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 문제를 해결한다.

그림은 k 의 값에 따른 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\sin x$ 와

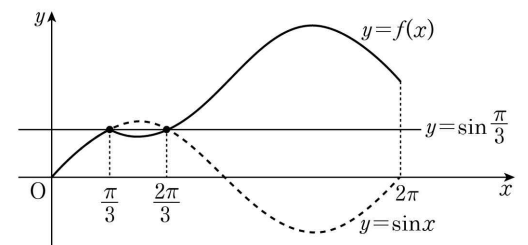
직선 $y = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 를 좌표평면에 나타낸 것이다.

각 그림에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 의 교점의 개수 a_k 를 구하면 다음과 같다.

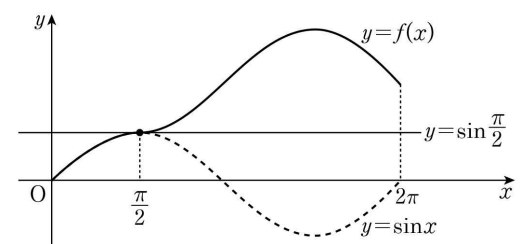
(i) $k=1$ 일 때, $a_1=2$



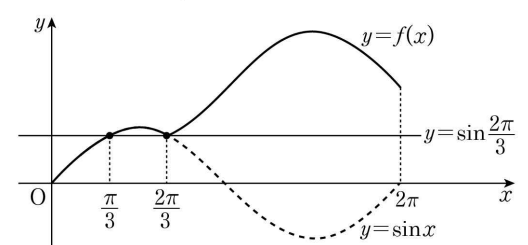
(ii) $k=2$ 일 때, $a_2=2$



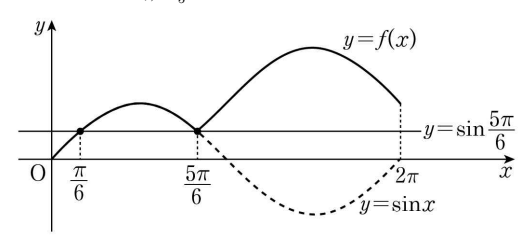
(iii) $k=3$ 일 때, $a_3=1$



(iv) $k=4$ 일 때, $a_4=2$



(v) $k=5$ 일 때, $a_5=2$



따라서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 + 2 + 1 + 2 + 2 = 9$

[다른 풀이]

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 의 교점의 개수는

방정식 $f(x) = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 즉,

(i) $0 \leq x \leq \frac{k}{6}\pi$ 일 때, $\sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

(ii) $\frac{k}{6}\pi < x \leq 2\pi$ 일 때,

$$2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) - \sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) \text{에서 } \sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$$

그러므로 교점의 개수는 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 방정식 $\sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

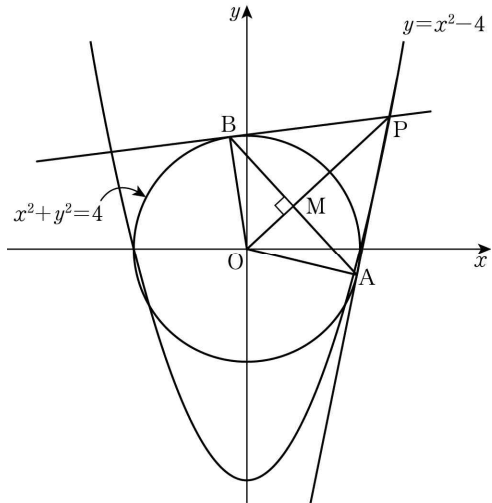
$k=1, k=5$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ 이므로 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=2, k=4$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=3$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) = 1$ 이므로 $\sin x = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

따라서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 + 2 + 1 + 2 + 2 = 9$

12. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.



두 선분 AB, OP의 교점을 M이라 하면 직선 OP는 선분 AB를 수직이등분하므로 직각삼각형 OAP와 직각삼각형 OMA는 서로 닮음이다.

삼각형 OAP와 삼각형 OMA의 닮음비는 $\overline{OP} : \overline{OA}$ 이므로 넓이의 비는 $\overline{OP}^2 : \overline{OA}^2$ 이다.

삼각형 OAP의 넓이는 $\frac{S(t)+T(t)}{2}$,

삼각형 OMA의 넓이는 $\frac{S(t)}{2}$ 이므로

$$\overline{OP}^2 : \overline{OA}^2 = \frac{S(t)+T(t)}{2} : \frac{S(t)}{2}$$

$$\overline{OA}^2 \times \frac{S(t)+T(t)}{2} = \overline{OP}^2 \times \frac{S(t)}{2}$$

$$\frac{T(t)}{S(t)} = \frac{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2}{\overline{OA}^2}$$

$$\overline{OA} = 2, \overline{OP} = \sqrt{t^2 + (t^2 - 4)^2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{T(t)}{S(t)} = \frac{t^2 + (t^2 - 4)^2 - 2^2}{2^2} = \frac{1}{4}(t+2)(t-2)(t^2-3)$$

따라서

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{T(t)}{(t-2)S(t)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T(t)}{(t^2-2)S(t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{(t+2)(t^2-3)}{4} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t+2)(t-2)(t^2-3)}{4(t^4-2)}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

13. [출제의도] 미분의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. 함수 $g(x)$ 의 역함수가 존재하고 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x) = 3x^2 + 2ax + b \geq 0$ 이 성립해야 한다.

그러므로 방정식 $3x^2 + 2ax + b = 0$ 의 판별식을

$$D \text{라 하면 } \frac{D}{4} = a^2 - 3b \leq 0, a^2 \leq 3b \text{ (참)}$$

ㄴ. $2f(x) = g(x) - g(-x)$ 에서

$$f(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{2}$$

$$= \frac{(x^3 + ax^2 + bx + c) - (-x^3 + ax^2 - bx + c)}{2}$$

$$= x^3 + bx$$

$f'(x) = 3x^2 + b$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $3x^2 + b = 0$

이차방정식 $3x^2 + b = 0$ 의 판별식을 D' 이라 하면

$$D' = 0^2 - 4 \times 3 \times b = -12b$$

ㄱ에 의해 $b \geq \frac{a^2}{3} \geq 0$ 이므로 $D' = -12b \leq 0$

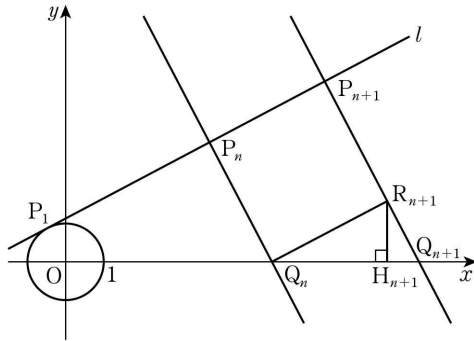
그러므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f'(x) = 0$ 이 실근을 가지므로 $3x^2 + b = 0$ 의 실근이 존재한다. 즉, $b \leq 0$

또한, ㄱ에 의해 $b \geq 0$ 이므로 $b = 0$ 이고 ㄱ에 의해 $a = 0$ 이다. $g'(x) = 3x^2$ 이므로 $g'(1) = 3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

14. [출제의도] 등비수열을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 과정을 추론한다.



점 R_{n+1} 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H_{n+1} 이라 하면 직선 l 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 직선 $Q_n R_{n+1}$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다. 즉, $\overline{Q_n H_{n+1}} : \overline{H_{n+1} R_{n+1}} = 2 : 1$

직각삼각형 $Q_n R_{n+1} Q_{n+1}$ 과 직각삼각형 $Q_n H_{n+1} R_{n+1}$ 은 서로 닮음이므로 $\overline{Q_n R_{n+1}} : \overline{R_{n+1} Q_{n+1}} = 2 : 1$ 에서 $\overline{R_{n+1} Q_{n+1}} = \frac{1}{2} \times \overline{Q_n R_{n+1}}$

$$\overline{Q_n R_{n+1}} = \overline{P_n P_{n+1}} \text{ 이므로 } \boxed{\text{가}} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{P_{n+1} Q_{n+1}} = (1 + \boxed{\text{가}}) \times \overline{P_n Q_n} = \frac{3}{2} \times \overline{P_n Q_n} \text{ 이고}$$

$\overline{P_1 Q_1} = 1$ 이므로 선분 $P_n Q_n$ 의 길이는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다. 즉, $\overline{P_n Q_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$$\text{그러므로 } \boxed{\text{나}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$\overline{P_n P_{n+1}} = \overline{P_n Q_n}$ 이므로

$$\overline{P_1 P_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P_k P_{k+1}} = \frac{1 \times \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1 \right\}}{\frac{3}{2} - 1} = 2 \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1 \right\}$$

$$\text{그러므로 } \boxed{\text{다}} = 2 \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1 \right\}$$

$$\text{따라서 } p = \frac{1}{2}, f(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, g(n) = 2 \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1 \right\}$$

$$\text{이므로 } f(6p) + g(8p) = f(3) + g(4) = \frac{9}{4} + \frac{19}{4} = 7$$

15. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수가 포함된 문제를 해결한다.

최고차항의 계수가 4이고 $f(0) = 0$ 이므로

$f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx$ (a, b 는 상수)라 하면

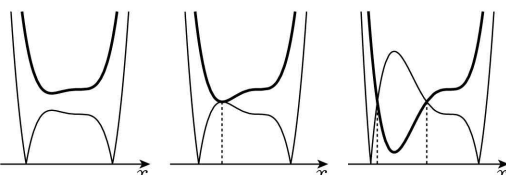
$f'(x) = 12x^2 + 2ax + b$ 에서 $f'(0) = 0$ 이므로 $b = 0$

즉, $f(x) = 4x^3 + ax^2$ 에서 $\int_0^x f(t)dt = x^4 + \frac{a}{3}x^3$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} x^4 + \frac{a}{3}x^3 + 5 & (x < c) \\ \left| x^4 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{13}{3} \right| & (x \geq c) \end{cases}$$

곡선 $y = x^4 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{13}{3}$ 은 곡선 $y = x^4 + \frac{a}{3}x^3 + 5$ 를 y 축의 방향으로 $-\frac{28}{3}$ 만큼 평행이동한 것이다.

다음은 a 의 값에 따른 곡선 $y = x^4 + \frac{a}{3}x^3 + 5$ 와 곡선 $y = \left| x^4 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{13}{3} \right|$ 의 개형 중 c 의 개수가 0, 1, 2인 경우이다.



[c의 개수가 0] [c의 개수가 1] [c의 개수가 2]

함수 $g(x)$ 가 연속이 되도록 하는 실수 c 의 개수가 1이기 위해서는 함수 $y = x^4 + \frac{a}{3}x^3 + 5$ ($\rightarrow \text{㉠}$)의 극솟

값과 함수 $y = -\left(x^4 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{13}{3}\right)$ ($\rightarrow \text{㉡}$)의 극댓값이 서로 같아야 한다.

㉠, ㉡의 함수의 도함수는 각각 $f(x), -f(x)$ 이고

$$f(x) = x^2(4x+a) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x = -\frac{a}{4} (a \neq 0)$$

㉠, ㉡의 함수는 각각 $x = -\frac{a}{4}$ 에서 극값을 갖고

$c = -\frac{a}{4}$ 이다.

$$\left(-\frac{a}{4}\right)^4 + \frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3 + 5 = -\left\{\left(-\frac{a}{4}\right)^4 + \frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3 - \frac{13}{3}\right\}$$

$$\text{이를 정리하여 풀면 } \begin{cases} a=4 \\ c=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a=-4 \\ c=1 \end{cases}$$

$$\text{그러므로 } a=4 \text{일 때, } g(1) = \left| 1 + \frac{4}{3} - \frac{13}{3} \right| = 2,$$

$$a=-4 \text{일 때, } g(1) = \left| 1 - \frac{4}{3} - \frac{13}{3} \right| = \frac{14}{3}$$

따라서 $g(1)$ 의 최댓값은 $\frac{14}{3}$

16. [출제의도] 미분계수를 이해하고 미경제수를 구한다.

$f'(x) = 4x + a$ 이므로 $f'(2) = 8 + a = 18$ 에서 $a = 10$

17. [출제의도] 정적분을 활용하여 점이 움직인 거리를 구한다.

$0 \leq t \leq 3$ 일 때 $v(t) \geq 0$, $3 \leq t \leq 4$ 일 때 $v(t) \leq 0$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |v(t)|dt = \int_0^3 |v(t)|dt + \int_3^4 |v(t)|dt$$

$$= \int_0^3 (12-4t)dt + \int_3^4 (4t-12)dt = 18 + 2 = 20$$

18. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

$A(1, n), B(1, 2), C(2, n^2), D(2, 4)$ 이므로

$$\overline{AB} = n-2, \overline{CD} = n^2-4$$

사다리꼴 ABCD의 넓이는 18 이하이므로

$$\frac{1}{2} \times (n-2+n^2-4) \times 1 = \frac{1}{2}(n^2+n-6) \leq 18, -7 \leq n \leq 6$$

그러므로 3 이상의 자연수 n 의 값은 3, 4, 5, 6

따라서 조건을 만족시키는 n 의 값의 합은 18

19. [출제의도] Σ 의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

조건 (가)에서 $a_3 = a_1 - 3, a_4 = a_2 + 3,$

$a_5 = a_3 - 3 = a_1 - 6, a_6 = a_4 + 3 = a_2 + 6$ 이므로

$$\sum_{k=1}^6 a_k = a_1 + a_2 + (a_1 - 3) + (a_2 + 3) + (a_1 - 6) + (a_2 + 6)$$

$$= 3(a_1 + a_2)$$

$$\text{조건 (나)에서 } \sum_{k=1}^{32} a_k = 5 \sum_{k=1}^6 a_k + a_1 + a_2 = 16(a_1 + a_2)$$

따라서 $16(a_1 + a_2) = 112$ 이므로 $a_1 + a_2 = 7$

20. [출제의도] 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$f(1-x) = -f(1+x)$ 에 $x=0, x=1$ 을 각각 대입하면

$f(1) = -f(1)$ 에서 $f(1) = 0, f(0) = -f(2)$ 에서 $f(2) = 0$

삼차함수 $f(x)$ 는 $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ 이고 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x) = x(x-1)(x-2)$

방정식 $f(x) = -6x^2$ 에서 $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ 이므로

$x(x+1)(x+2) = 0, x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2$

$-2 \leq x \leq -1$ 에서 $x^3 + 3x^2 + 2x \geq 0$ 이고

$-1 \leq x \leq 0$ 에서 $x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0$ 이므로

$$S = \int_{-2}^0 |x^3 + 3x^2 + 2x| dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^3 + 3x^2 + 2x) dx + \int_{-1}^0 \{-(x^3 + 3x^2 + 2x)\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 2x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2}$$

따라서 $4S = 2$

21. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

호 BD와 호 DC에 대한 원주각의 크기가 같으므로 $\angle CBD = \angle CAD = \angle DAB = \angle DCB$ 이다. 즉, $\overline{BD} = \overline{DC}$ $\overline{BD} = \overline{DC} = a$, $\overline{AD} = b$, $\angle CAD = \theta$ 라 하면 $\angle DAB = \theta$ 이고 $\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2$ 이므로 삼각형 DAB와 삼각형 CAD에 각각 코사인법칙을 적용하면 $6^2 + b^2 - 2 \times 6 \times b \times \cos \theta = b^2 + 8^2 - 2 \times b \times 8 \times \cos \theta$, $4b \cos \theta = 28$ 이므로 직각삼각형 ADE에서 $k = b \cos \theta = 7$ 따라서 $12k = 84$

22. [출제의도] 함수의 극값을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 $x \neq 0$, $x \neq 2$ 일 때, $g(x) = \frac{x(x-2)}{|x(x-2)|} (|f(x)| - a)$ $x < 0$ 또는 $x > 2$ 일 때, $x(x-2) > 0$ 이고 $0 < x < 2$ 일 때, $x(x-2) < 0$ 이므로 $g(x) = \begin{cases} |f(x)| - a & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \\ a - |f(x)| & (0 < x < 2) \end{cases}$ 조건 (나)에 의해 함수 $g(x)$ 는 $x=0$, $x=2$ 에서 미분 가능하므로 $x=0$, $x=2$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ 에서 $|f(0)| - a = a - |f(0)|$

그러므로 $|f(0)| = a$ 에서 $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$

같은 방법으로 $|f(2)| = a$ 에서 $g(2) = 0$

그러므로 $g(x) = \begin{cases} |f(x)| - a & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \\ a - |f(x)| & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x)| - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a - |f(x)|}{x} \dots \dots \textcircled{1}$$

(i) $f(0) = a$ 인 경우

$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 $f(0) > 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 0$ 이다. 그러므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x)| - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a - |f(x)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(0) - f(x)}{x} = -f'(0)$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } f'(0) = -f'(0), f'(0) = 0$$

(ii) $f(0) = -a$ 인 경우

$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 $f(0) < 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) < 0$ 이다. 그러므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x)| - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-f(x) + f(0)}{x} = -f'(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a - |f(x)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-f(0) + f(x)}{x} = f'(0)$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } -f'(0) = f'(0), f'(0) = 0$$

(i), (ii)에 의해 $f'(0) = 0$ 이다.

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서도 미분가능하므로 같은 방법으로 $f'(2) = 0$ 이다.

그러므로 삼차함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 과 $x=2$ 에서 극값을 갖고 최고차항의 계수가 1이므로 $x=0$ 에서 극댓값 $f(0) = a$, $x=2$ 에서 극솟값 $f(2) = -a$ 를 갖는다.

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + a \quad (p, q \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q \text{이고 } f'(0) = f'(2) = 0 \text{이므로}$$

$$p = -3, q = 0 \text{이다. 즉, } f(x) = x^3 - 3x^2 + a$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + a = -a \text{이므로 } a = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \text{이므로}$$

$$g(3a) = g(6) = |f(6)| - 2 = |6^3 - 3 \times 6^2 + 2| - 2 = 108$$

[참고]

[1] $f(0) = f(2) = a$ 또는 $f(0) = f(2) = -a$ 인 경우 삼차함수 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값이 서로 같을 수 없으므로 모순이다.

[2] $f(0) = -a, f(2) = a$ 인 경우 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 모순이다.

[확률과 통계]

23	④	24	②	25	③	26	⑤	27	①
28	②	29	150	30	23				

23. [출제의도] 이항분포를 따르는 확률변수의 평균을 계산한다.

이항분포 $B\left(60, \frac{5}{12}\right)$ 를 따르는 확률변수 X 의 평균은

$$E(X) = 60 \times \frac{5}{12} = 25$$

24. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이해하여 사건의 확률을 구한다.

$$P(A) = \frac{1}{3} \text{이므로 } P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$$

$$P(A^c)P(B) = \frac{2}{3} \times P(B) = \frac{1}{6} \text{에서}$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

25. [출제의도] 중복조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구한다.

A 와 B 에게 각각 공책을 2권씩 먼저 나누어 준 후 남은 6권의 공책을 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_6 = {}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

26. [출제의도] 여사건의 확률을 구한다.

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

두 수 a, b 의 최대공약수가 홀수인 사건을 A 라 하면 A 의 여사건 A^c 은 a, b 의 최대공약수가 짝수인 사건이다. a, b 의 최대공약수가 짝수이면 a, b 모두 짝수이므로 이 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$ 이다.

$$\text{따라서 } P(A^c) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{이므로 구하는 확률은}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

27. [출제의도] 정규분포의 성질을 이용하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

두 확률변수 X 와 Y 는 모두 정규분포를 따르고 표준편차가 같으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 일치한다. 따라서 $g(x) = f(x-4)$ 이다.

두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 a 이므로

$$f(a) = g(a) = f(a-4)$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=8$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a+(a-4)}{2} = 8$$

$$a = 10$$

$$P(8 \leq Y \leq a) = P(8 \leq Y \leq 10)$$

$$= P\left(\frac{8-12}{2} \leq Z \leq \frac{10-12}{2}\right)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq -1)$$

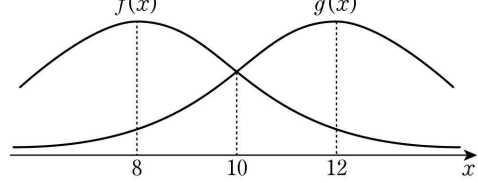
$$= P(1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4772 - 0.3413$$

$$= 0.1359$$

[참고]



28. [출제의도] 조건부확률을 구하는 문제를 해결한다.

선택한 함수 f 가 4 이하의 모든 자연수 n 에 대하여 $f(2n-1) < f(2n)$ 인 사건을 A , $f(1) = f(5)$ 인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

X 에서 X 로의 모든 함수의 개수는 8^8 이다.

4 이하의 자연수 n 에 대하여 $f(2n-1) < f(2n)$ 인 $f(2n-1)$ 과 $f(2n)$ 을 정하는 경우의 수는

$${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

4 이하의 모든 자연수 n 에 대하여

$f(2n-1) < f(2n)$ 인 경우의 수는 28^4 이므로

$$P(A) = \frac{28^4}{8^8}$$

(i) $f(1) = f(5), f(2) = f(6)$ 인 경우

$f(1) = f(5) < f(2) = f(6)$ 이므로 $f(1), f(2), f(5), f(6)$ 을 정하는 경우의 수는 ${}_8C_2$ 이고, $f(3)$ 과 $f(4), f(7)$ 과 $f(8)$ 을 정하는 경우의 수는 각각 ${}_8C_2$ 이므로 $f(2) = f(6)$ 인 경우의 수는 $({}_8C_2)^3 = 28^3$ 이다.

(ii) $f(1) = f(5), f(2) \neq f(6)$ 인 경우

$f(1) = f(5) < f(2) < f(6)$ 또는

$f(1) = f(5) < f(6) < f(2)$

이므로 $f(1), f(2), f(5), f(6)$ 을 정하는 경우의 수는 $2 \times {}_8C_3 = 2 \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 112$ 이고, $f(3)$ 과 $f(4), f(7)$ 과 $f(8)$ 을 정하는 경우의 수는 각각 ${}_8C_2 = 28$

이므로 $f(2) \neq f(6)$ 인 경우의 수는 112×28^2 이다.

(i), (ii)에 의해

$$P(A \cap B) = \frac{28^3 + 112 \times 28^2}{8^8} = \frac{140 \times 28^2}{8^8}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{140 \times 28^2}{8^8}}{\frac{28^4}{8^8}} = \frac{140}{28^2} = \frac{5}{28}$$

29. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 자연수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1일 때, 나머지 네 자리에 2와 3이 적어도 하나씩 포함되는 경우는 다음과 같다.

(i) 1, 1, 2, 3을 나열하는 경우

$$4 \text{개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 } \frac{4!}{2!} = 12$$

(ii) 1, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3을 나열하는 경우

$$4 \text{개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 } \frac{4!}{2!} = 12$$

이므로 (ii)의 경우의 수는 $2 \times 12 = 24$

(iii) 2, 2, 2, 3 또는 2, 3, 3, 3을 나열하는 경우

$$4 \text{개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 } \frac{4!}{3!} = 4$$

이므로 (iii)의 경우의 수는 $2 \times 4 = 8$

(iv) 2, 2, 3, 3을 나열하는 경우

$$4 \text{개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 } \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(i) ~ (iv)에 의해 일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1인 경우의 수는 $12 + 24 + 8 + 6 = 50$

일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 2인 경우의 수와 3인 경우의 수도 같은 방법으로 생각하면 각각 50이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 $3 \times 50 = 150$

30. [출제의도] 표본평균의 성질을 이용하여 모집단의 확률분포를 추론한다.

주머니에서 임의로 꺼낸 한 개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 Y 라 할 때, 확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	합계
$P(Y=y)$	a	b	c	d	1

$X=4$ 인 경우는 4개의 수가 모두 1이어야 하므로 $P(X=4)=a^4$

$$a^4 = \frac{1}{81} \text{에서 } 0 \leq a \leq 1 \text{이므로 } a = \frac{1}{3}$$

$X=16$ 인 경우는 4개의 수가 모두 4이어야 하므로 $P(X=16)=d^4$

$$16d^4 = \frac{1}{81} \text{에서 } 0 \leq d \leq 1 \text{이므로 } d = \frac{1}{6}$$

$a+b+c+d=1$ 이므로

$$b+c = \frac{1}{2} \dots\dots \textcircled{1}$$

확인한 4개의 수의 표본평균을 \bar{Y} 라 하면

$X=4\bar{Y}$ 이다.

$$\begin{aligned} E(X) &= E(4\bar{Y}) = 4E(\bar{Y}) = 4E(Y) \\ &= 4\left(\frac{1}{3} + 2b + 3c + \frac{4}{6}\right) = 4(1+2b+3c) \end{aligned}$$

$E(X)=9$ 에서 $4(1+2b+3c)=9$ 이므로

$$2b+3c = \frac{5}{4} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= V(4\bar{Y}) = 16V(\bar{Y}) = 4V(Y) \\ &= 4[E(Y^2) - (E(Y))^2] \\ &= 4\left\{\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4} + \frac{16}{6}\right) - \left(\frac{9}{4}\right)^2\right\} \\ &= 4\left(\frac{25}{4} - \frac{81}{16}\right) = \frac{19}{4} \end{aligned}$$

따라서 $p=4, q=19$ 이므로 $p+q=23$

[미적분]

23	①	24	③	25	④	26	②	27	⑤
28	③	29	14	30	10				

23. [출제의도] 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_2^4 \frac{6}{x^2} dx = \left[-\frac{6}{x}\right]_2^4 = -\frac{3}{2} - (-3) = \frac{3}{2}$$

24. [출제의도] 수렴하는 급수의 성질을 이해하여 극한 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - 4n}{n} = 1 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 4n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - 4\right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\left(\frac{a_n}{n} - 4\right) + 4\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - 4\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} 4 = 0 + 4 = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + a_n}{3n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{a_n}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{5 + 4}{3 - 0} = 3$$

25. [출제의도] 미분법을 이용하여 평면 위의 움직이는 점의 속력을 구한다.

$$\frac{dx}{dt} = \ln t + 1, \frac{dy}{dt} = \frac{4\ln t - 4}{(\ln t)^2} \text{이므로}$$

시간 t 에서의 점 P 의 속력은

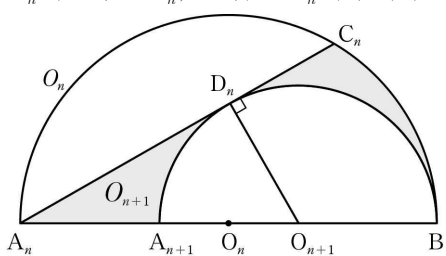
$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(\ln t + 1)^2 + \left(\frac{4\ln t - 4}{(\ln t)^2}\right)^2}$$

따라서 시간 $t=e^2$ 에서 점 P 의 속력은

$$\sqrt{(\ln e^2 + 1)^2 + \left(\frac{4\ln e^2 - 4}{(\ln e^2)^2}\right)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

26. [출제의도] 도형 사이의 관계를 추론하여 등비급수의 합을 구한다.

반원 O_n 의 중심을 O_n , 반지름을 r_n 이라 하자.



삼각형 $O_{n+1}A_nD_n$ 은 $\angle O_{n+1}A_nD_n = \frac{\pi}{6}$ 인 직각삼각형

$$\text{이므로 } \sin(\angle O_{n+1}A_nD_n) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{D_n O_{n+1}}{A_n O_{n+1}} = \frac{1}{2}, \frac{r_{n+1}}{2r_n - r_{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$r_{n+1} = \frac{2}{3}r_n \dots\dots \textcircled{1}$$

$$r_1 = 1 \text{이므로 } r_2 = \frac{2}{3}$$

$$\angle A_1 O_1 C_1 = \frac{2\pi}{3}, \overline{A_1 O_1} = \overline{C_1 O_1} = 1 \text{이므로}$$

삼각형 $A_1 O_1 C_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{A_1 O_1} \times \overline{C_1 O_1} \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\angle B O_1 C_1 = \frac{\pi}{3}, \overline{C_1 O_1} = \overline{B O_1} = 1 \text{이므로}$$

$$\text{부채꼴 } O_1 B C_1 \text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{반원 } O_2 \text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \times (r_2)^2 \times \pi = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \pi = \frac{2\pi}{9}$$

$$S_1 = (\text{삼각형 } A_1 O_1 C_1 \text{의 넓이}) + (\text{부채꼴 } O_1 B C_1 \text{의 넓이}) - (\text{반원 } O_2 \text{의 넓이})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{9} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{18} \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 수열 } \{S_n\} \text{은 첫째항이 } \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{18} \text{이고 공}$$

비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이다.

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{18}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9\sqrt{3} - 2\pi}{20}$$

27. [출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

그러므로 조건 (나)에 의해

$$f(-1) = 1, f(3) = -2 \text{ 즉 } f^{-1}(1) = -1, f^{-1}(-2) = 3$$

$$\int_{-2}^1 f^{-1}(x) dx \text{에서 } f^{-1}(x) = t \text{로 놓으면}$$

$x = -2$ 일 때 $t = 3, x = 1$ 일 때 $t = -1$ 이고,

$$x = f(t) \text{에서 } \frac{dx}{dt} = f'(t) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 f^{-1}(x) dx &= \int_3^{-1} t f'(t) dt \\ &= \left[t f(t) \right]_3^{-1} - \int_3^{-1} f(t) dt \\ &= -f(-1) - 3f(3) + \int_{-1}^3 f(t) dt \\ &= -1 + 6 + 3 = 8 \end{aligned}$$

28. [출제의도] 삼각형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한에 대한 문제를 해결한다.

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos \theta = 5 - 4\cos \theta \text{이므로}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{5 - 4\cos \theta}$$

직선 AE 가 $\angle BAC$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BE} : \overline{CE} = \overline{AB} : \overline{AC} = 1 : \sqrt{5 - 4\cos \theta} \text{에서}$$

$$\overline{BE} = \frac{1}{1 + \sqrt{5 - 4\cos \theta}} \times \overline{BC} = \frac{2}{1 + \sqrt{5 - 4\cos \theta}}$$

그러므로

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BE} \times \sin(\angle CBA) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{1 + \sqrt{5 - 4\cos \theta}} \times \sin \theta \\ &= \frac{\sin \theta}{1 + \sqrt{5 - 4\cos \theta}} \end{aligned}$$

두 직선 AB, DM 이 서로 평행하므로

$$\angle CDM = \theta, \angle BAE = \angle DFE$$

이다. 이때 $\angle BAE = \angle FAC$ 이므로 삼각형 AMF 는 이등변삼각형이다. 점 M 은 선분 AC 의 중점이므로

$$\overline{FM} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} = \frac{\sqrt{5 - 4\cos \theta}}{2} \text{이고}$$

$$\overline{BD} = \overline{CD} = 1, \overline{DM} = \frac{1}{2}$$

$$\text{그러므로 } \overline{DF} = \overline{FM} - \overline{DM} = \frac{\sqrt{5 - 4\cos \theta} - 1}{2}$$

$$\angle FDC = \pi - \angle CDM = \pi - \theta \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{DF} \times \sin(\angle FDC) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{5 - 4\cos \theta} - 1}{2} \times \sin(\pi - \theta) \\ &= \frac{\sqrt{5 - 4\cos \theta} - 1}{4} \times \sin \theta \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin \theta}{4} (\sqrt{5 - 4\cos \theta} - 1)}{\theta^2 \times \frac{\sin \theta}{1 + \sqrt{5 - 4\cos \theta}}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{5 - 4\cos \theta} - 1)(\sqrt{5 - 4\cos \theta} + 1)}{4\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{5 - 4\cos \theta - 1}{4\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

29. [출제의도] 정적분의 성질과 삼각함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin(ax) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{a} \cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{2}{a} \geq \frac{1}{2} \text{이므로}$$

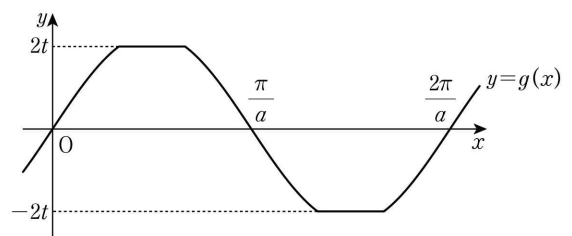
$$0 < a \leq 4 \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서

$$\int_0^{3\pi} \{|f(x) + t| - |f(x) - t|\} dx = 0$$

$$g(x) = |f(x) + t| - |f(x) - t| \text{라 하면}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2t & (-1 \leq \sin(ax) < -t) \\ 2\sin(ax) & (-t \leq \sin(ax) < t) \\ 2t & (t \leq \sin(ax) \leq 1) \end{cases}$$



함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같으므로

$0 < k < \frac{2\pi}{a}$ 인 모든 실수 k 에 대하여

$$\int_0^k g(x) dx > 0 \text{이고, } \int_0^{\frac{2\pi}{a}} g(x) dx = 0 \text{이다.}$$

함수 $g(x)$ 는 주기가 $\frac{2\pi}{a}$ 이고 $\int_0^{\frac{2\pi}{a}} g(x) dx = 0$ 이므로

$$3\pi = \frac{2\pi}{a} \times n \text{ (} n \text{은 자연수), } a = \frac{2}{3}n$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 0 < \frac{2}{3}n \leq 4$$

따라서 구하는 모든 실수 a 의 값은

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 4 \text{이므로 그 합은 } 14 \text{이다.}$$

30. [출제의도] 합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결한다.

$$f(x) = -\frac{ax^3+bx}{x^2+1} \text{ 에서}$$

$$f'(x) = -\frac{(3ax^2+b)(x^2+1)-(ax^3+bx)(2x)}{(x^2+1)^2} \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = -\frac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2} \dots\dots \textcircled{1}$$

모든 실수 x 에 대하여 $x^2+1 \neq 0$ 이므로 함수 $f'(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \neq 0$ 이고 $f'(0) = -b < 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이다.

$$h(x) = g(f(x)) = f(f(x)) - x \text{ 이므로}$$

$$h(0) = f(f(0)) - 0 = f(0) = 0 \text{ 이다.}$$

조건 (가)에서 $g(2) = f(2) - f^{-1}(2) = h(0) = 0$ 이므로

$$f(2) = f^{-1}(2) = t \text{ (} t \text{는 상수)라 하면 } f(t) = 2 \text{ 이다.}$$

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이므로

$$f(-2) = -f(2) = -t \text{ 이다.}$$

즉 두 점 $(t, 2), (-2, -t)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위에 있다.

$t \neq -2$ 일 때, 두 점 $(t, 2), (-2, -t)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2-(-t)}{t-(-2)} = 1$ 이므로 평균값 정리에 의하여

$f'(c) = 1$ 인 상수 c 가 존재한다. 그러나 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이므로 모순이다. 즉 $t = -2$

$$f(2) = -2 \text{ 에서 } -\frac{8a+2b}{5} = -2$$

$$\text{그러므로 } 4a+b=5 \dots\dots \textcircled{2}$$

$f^{-1}(2) = -2$ 이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(2) = f'(2) - (f^{-1})'(2) = f'(2) - \frac{1}{f'(-2)}$$

㉠에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(-x) = f'(x)$ 이므로 $f'(-2) = f'(2)$ 이다.

$$\text{즉 } g'(2) = f'(2) - \frac{1}{f'(2)}$$

$$h(x) = f(f(x)) - x \text{ 에서 } h'(x) = f'(f(x))f'(x) - 1 \text{ 이므로}$$

$$h'(2) = f'(f(2))f'(2) - 1 = f'(-2)f'(2) - 1 = \{f'(2)\}^2 - 1$$

조건 (나)에서 $g'(2) = -5h'(2)$ 이므로

$$f'(2) - \frac{1}{f'(2)} = -5\{f'(2)\}^2 + 5$$

$$5\{f'(2)\}^3 + \{f'(2)\}^2 - 5f'(2) - 1 = 0$$

$$\{5f'(2)+1\}\{f'(2)+1\}\{f'(2)-1\} = 0$$

$f'(x) < 0$ 이므로 $f'(2) = -\frac{1}{5}$ 또는 $f'(2) = -1$ 이다.

$$\textcircled{2} \text{에서 } f'(2) = -\frac{16a+4(3a-b)+b}{(4+1)^2} = -\frac{28a-3b}{25}$$

$$(i) f'(2) = -\frac{1}{5} \text{ 일 때, } -\frac{28a-3b}{25} = -\frac{1}{5} \text{ 이므로}$$

$$28a-3b=5 \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{을 연립하면 } a = \frac{1}{2}, b = 3 \text{ 이다.}$$

$$(ii) f'(2) = -1 \text{ 일 때, } -\frac{28a-3b}{25} = -1 \text{ 이므로}$$

$$28a-3b=25 \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{4} \text{을 연립하면 } a=1, b=1 \text{ 이므로 모순이다.}$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $4(b-a) = 4 \times \left(3 - \frac{1}{2}\right) = 10$

[기하]

23	㉠	24	㉠	25	㉡	26	㉣	27	㉤
28	㉠	29	32	30	7				

23. [출제의도] 평행한 두 벡터의 성질을 이용하여 벡터의 성분을 구한다.

$$0 \text{ 이 아닌 실수 } k \text{ 에 대하여 } \vec{b} = k\vec{a}$$

$$(2m+1, 9) = (k(m-2), 3k) \text{ 이므로}$$

$$3k=9, k=3$$

$$2m+1=3(m-2), 2m+1=3m-6$$

따라서 $m=7$

24. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 내분점을 이용하여 선분의 길이를 구한다.

점 P는 선분 AB를 $m:n$ 으로 내분하는 점이므로

$$\text{점 P의 좌표는 } \left(\frac{2m-n}{m+n}, \frac{4m+n}{m+n}, \frac{m-2n}{m+n}\right) \text{ 이다.}$$

xy 평면 위의 점 P의 z 좌표는 0이므로

$$m-2n=0, m=2n$$

그러므로 점 P의 좌표는 $(1, 3, 0)$ 이다.

따라서 선분 AP의 길이는

$$\sqrt{\{1-(-1)\}^2 + \{3-(-1)\}^2 + \{0-(-2)\}^2} = 2\sqrt{3}$$

25. [출제의도] 타원과 포물선의 접선의 방정식을 이해한다.

$$\text{타원 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ 에 접하고 기울기가 } \frac{1}{2} \text{ 인}$$

$$\text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{36 \times \frac{1}{4} + 16}, y = \frac{1}{2}x \pm 5$$

$$\text{포물선 } y^2 = ax \text{ 에 접하고 기울기가 } \frac{1}{2} \text{ 인}$$

$$\text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{2}x + \frac{a}{4}, y = \frac{1}{2}x + \frac{a}{2}$$

$$a \text{ 가 양수이므로 } \frac{a}{2} = 5, a = 10$$

$$\text{따라서 포물선 } y^2 = ax \text{ 의 초점의 } x \text{ 좌표는 } \frac{a}{4} = \frac{5}{4}$$

26. [출제의도] 두 벡터의 합을 이해하여 벡터의 크기를 구한다.

$$\text{선분 BC의 중점을 M이라 하면 } \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \vec{AM} \text{ 이다.}$$

$$|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2\sqrt{5} \text{ 이므로 } |\vec{AM}| = \sqrt{5}$$

$\vec{AD} = \vec{BM} = \vec{CM}$ 이고 변 AD와 변 BC가 평행하므로 사각형 ABMD와 사각형 AMCD는 평행사변형이다.

평행사변형 AMCD에서 $\vec{CD} = \vec{AM} = \sqrt{5}$

사각형 ABMD가 평행사변형이므로

$$\angle MBA = \angle CMD = \angle DCM$$

즉 삼각형 DMC는 이등변삼각형이므로 $\vec{DM} = \sqrt{5}$

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\vec{CM} = 2 \text{ 이므로 } \vec{HM} = \vec{CH} = 1$$

직각삼각형 DMH에서

$$\vec{DH} = \sqrt{\vec{DM}^2 - \vec{HM}^2} = \sqrt{5-1} = 2$$

$$\vec{BH} = \vec{BM} + \vec{HM} = 2+1 = 3$$

직각삼각형 DBH에서

$$|\vec{BD}|^2 = |\vec{BH}|^2 + |\vec{DH}|^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

$$\text{따라서 } |\vec{BD}| = \sqrt{13}$$

27. [출제의도] 구의 방정식을 이용하여 구와 좌표축의 관계에 대한 문제를 해결한다.

좌표공간의 점 A의 좌표를 (a, b, c) 라 하면

$$\vec{OA} = 7 \text{ 이므로 } \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 49 \dots\dots \textcircled{1}$$

구 S의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 64$$

xy 평면 위의 모든 점의 z 좌표는 0이므로

구 S와 xy 평면이 만나서 생기는 원 C의 반지름의 길이는 $\sqrt{64-c^2}$ 이다. 원 C의 넓이가 25π 이므로

$$64 - c^2 = 25, c^2 = 39$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a^2 + b^2 = 49 - c^2 = 49 - 39 = 10$$

점 A에서 z 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(0, 0, c)$ 이다.

$$\vec{AH} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (c-c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{점 B는 구 위의 점이므로 } \vec{AB} = 8$$

직각삼각형 ABH에서

$$\vec{BH} = \sqrt{\vec{AB}^2 - \vec{AH}^2} = \sqrt{64-10} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$\text{따라서 } \vec{BC} = 2 \times \vec{BH} = 2 \times 3\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

28. [출제의도] 벡터의 내적을 이용하여 도형에 대한 문제를 해결한다.

$\vec{PA} \cdot \vec{PC} = 0$ 이므로 두 벡터 \vec{PA} 와 \vec{PC} 가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

$$\frac{|\vec{PA}|}{|\vec{PC}|} = 3 \text{ 에서 } |\vec{PC}| = t \text{ (} t > 0 \text{)이라 하면 } |\vec{PA}| = 3t$$

두 벡터 \vec{PB} 와 \vec{PC} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\vec{PB} \cdot \vec{PC} = |\vec{PB}| |\vec{PC}| \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{PB}| |\vec{PC}| \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \theta = 135^\circ$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{PB}| |\vec{PC}| = -2|\vec{PC}|^2 \text{ 에서}$$

$$|\vec{PB}| = 2\sqrt{2} |\vec{PC}| \text{ 이므로 } |\vec{PB}| = 2\sqrt{2}t$$

$\angle APB = \angle BPC = 135^\circ, \angle CPA = 90^\circ$ 이므로

세 삼각형 ABP, BCP, CAP의 넓이를 각각

S_1, S_2, S_3 이라 하면

$$S_1 : S_2 : S_3 = 3t^2 : t^2 : \frac{3}{2}t^2 = 6 : 2 : 3$$

직선 AP와 변 BC의 교점이 D이므로

$$\vec{AD} : \vec{DP} = (S_1 + S_2 + S_3) : S_2 = 11 : 2$$

$$\text{따라서 } \vec{AD} = \frac{11}{2} \vec{PD} \text{ 이므로 } k = \frac{11}{2}$$

29. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이용하여 문제를 해결한다.

직선 QR가 $\angle FQP$ 를 이등분하므로 $\vec{PQ} : \vec{QF} = \vec{PR} : \vec{RF}$ 이때 $4\vec{PR} = 3\vec{RF}$ 이므로 $\vec{PQ} : \vec{QF} = 3 : 4$

$\vec{PQ} = 3k \text{ (} k > 0 \text{)이라 하면 } \vec{QF} = 4k$ 이고 $\angle PQF = 90^\circ$

이므로 삼각형 PQF에서 $\vec{PF} = 5k$

쌍곡선의 정의에 의하여 $|\vec{PF}' - \vec{PF}| = 2$ 이므로

$$|\vec{PF}'| = 5k + 2, |\vec{QF}'| = |\vec{PF}' - \vec{PQ}| = (5k + 2) - 3k = 2k + 2$$

$F(\sqrt{17}, 0), F'(-\sqrt{17}, 0)$ 이므로 직각삼각형 QF'F에서

$$|\vec{FF}'|^2 = |\vec{QF}'|^2 + |\vec{QF}|^2, (2\sqrt{17})^2 = (4k)^2 + (2k+2)^2$$

$$5k^2 + 2k - 16 = 0, (5k-8)(k+2) = 0, k = \frac{8}{5} \text{ (} k > 0 \text{)}$$

따라서 삼각형 PF'F의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |\vec{PF}'| \times |\vec{QF}| = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{32}{5} = 32$$

30. [출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 정사영의 넓이에 대한 문제를 해결한다.

조건 (나)에서 $\angle CED = 90^\circ$ 이므로 두 직선 BC, DE는 서로 수직이다.

삼수선의 정리에 의하여

$$\vec{AH} \perp (\text{평면 BCD}), \vec{HE} \perp \vec{BC} \text{ 이므로 } \vec{AE} \perp \vec{BC}$$

즉 직선 BC와 평면 AED는 서로 수직이므로

두 직선 BC, AD도 서로 수직이다. ㉠

조건 (가)에서 두 삼각형 AEH, DAH는 닮음이므로

$$\angle DAE = \angle EAH + \angle HAD = 90^\circ$$

그러므로 두 직선 AD, AE는 서로 수직이다. ㉡

㉠, ㉡에서 직선 AD는 평면 ABC와 서로 수직이다.

정삼각형 ABC에서 $\vec{AE} \perp \vec{BC}$ 이므로 점 E는 선분 BC의 중점이다. 즉 $\vec{AE} = 2\sqrt{3}$

직각삼각형 AED에서

$$\vec{AD} = \sqrt{\vec{DE}^2 - \vec{AE}^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$$

직각삼각형 AED에서 $\vec{AE} \times \vec{AD} = \vec{AH} \times \vec{DE}$ 이므로

$$2\sqrt{3} \times 2 = \vec{AH} \times 4, \vec{AH} = \sqrt{3}$$

직각삼각형 AHD에서

$$\vec{DH} = \sqrt{\vec{AD}^2 - \vec{AH}^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$$

$$\text{삼각형 AHD의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

두 평면 ABD, AHD가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면 $\theta = \angle BAE = 30^\circ$ 이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 30^\circ = \frac{3}{4}$$

따라서 $p=4, q=3$ 이므로 $p+q=4+3=7$