제 2 교시

2022학년도 EBS 수능완성 액기스 Final

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

무료배포자료

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

본 자료 활용 방법)

1. xxxxx-xxxx 로 구성된 숫자는 교재의 문항번호입니다.
   오타가 있을 수 있으니, 해당 문제를 찾아 교재에서 푸는 것이 제일 Best합니다.

2. 문항번호 옆의 별(중요도)은 '수능출제 확률이 높은 문제'를 의미하기 보다는 '출제할 맛이 나는 문제'라는 의미입니다. 어차피 수능에서 EBS의 연계율이 낮아졌을뿐더러 체감적으로 최대 1~2문제 밖에 안느껴지는 수학에서의 연계성 때문에 똑같은 문제가 나오길 기대한다면 어리석은 행동입니다. 여러분들의 수능을 위한 학습에 최적화된 문제를 골랐다고 생각하고, 본 자료에 있는 EBS 문제들은 반드시 다 보고 수능장에 들어갑시다.
   (총 5개의 파일이 배포될텐데, 다 해봤자 100문제도 안되고 이미 EBS 전체를 1회독 한 친구들은 이 5개 파일 하루컷 가능합니다.)

3. 출제자의 입장에서, 본 문항들이 각색되어 비슷한 난이도로 수능에서 출제된다면 몇 번쯤 배치될 것인지를 문제 말미에 적어두었습니다. 이 표시를 통해 문제의 객관적 난이도를 가늠해보실 수 있을 겁니다.

4. 기대T의 Comment는 채점 후 피드백할 때 읽어보시면 됩니다~

5. 문제/해설에 대한 오타제보는 kidae6150@gmail.com으로 보내주시면 감사히 시정하겠습니다.

특징!

1. '21년' 한양대 모의 적중+이화여대 모의논술 수석, '20년' 시립대 수석, '19년' 한양대 모범답안자 배출 등등 보여지는 지표로도 항상 증명하는 참된 Final

21년 한양대 모의논술 적중

2. 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$와 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]$을 구하시오.

3. 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5 dx\right]$을 구하시오.

2021년 한양대 모의논술

[제시문 1]

함수 $f(x)=e^x$과 $t\in[\alpha,\beta]$ (단, α, β는 상수) 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] $f'(\alpha)\times(\beta-t)\le f(\beta)-f(t)\le f'(\beta)\times(\beta-t)$임을 보이시오. [5점]

[문제 1-2] $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-n\int_0^1 f(x)dx\right)$의 값을 구하시오. [15점]

2020년 기대T 수능 후 Final

이미 예견됐던 적중의 이유 -1

1. 양의 실수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 어떤 자연수 k에 대하여 $\sum_{n=1}^{k}a_n=\sum_{n=1}^{k}b_n$을 만족한다고 하자. 양의 실수 x에 대하여 $x\ln x\ge x-1$이 성립함을 보이고, 부등식 $\sum_{n=1}^{k}a_n\ln b_n\le\sum_{n=1}^{k}a_n\ln a_n$을 보이시오.

19 한양대 의예과 문제

3 正の実数 p_i, q_i $(i=1,2,\cdots,n)$が $\sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{i=1}^{n}q_i=1$ を満たすとき，次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $\log x\le x-1$ が成り立つことを証明しなさい。

(2) 不等式 $\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i\ge\sum_{i=1}^{n}p_i\log q_i$ が成り立つことを証明しなさい。

(3) $F=\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i$ の最小値を求めなさい。

(4) 正の実数 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$に対して，$G=\sum_{i=1}^{n}a_i\log a_i$ の最小値を求めなさい。

일본대학 본고사 문제 (15학년도)

초고난도로 알려져있는 한양대 의예과 문제 중 소문제 하나가 일본 본고사 소문제 (2)와 완벽한 판박이!
(일본수학 및 대학교 학부수학에선 $\ln x$를 $\log x$로 씀.)

이토록 일본문제와 유사한 문제를 자주 내니, 한양대 Final의 Base는 일본본고사여야함이 당연하다. 이를 위해 본고사 3천여문제를 검토 및 선별할 정도로, Final에 쏟은 정성은 무한하다.

21년 이화여대 모의논술 수석

점수

구분	문제1	문제2	문제3	총점
내 점수	34	30	35	99
응시자평균	15.5	10.1	10.5	42.1
응시자최고	35	30	35	99
[illegible]	1	1	1	1
표준편차	9.5	10.1	10.5	23.2
순위분포	2.6%	15.1%	6.1%	0.2%

※ 순위분포 : 등수 / 전체응시생수 * 100%
예) 100명중 10등을 한 경우 상위누적은 10%
순위분포는 "계열응시 인원수" 에 대한 본인 순위의 비율이며, 숫자가 낮을수록 우수한 성적입니다.

2. 압도적 첨삭 시스템!! 비대면 수강생들도 1:1 첨삭 제공!!

첨삭시스템 비교

	일반적 Final	기대T Final
비대면 첨삭제공	첨삭 X	조교와 오픈카톡 매칭으로 1:1 첨삭 시스템 제공
답안 추가작성시간 제공 여부	제공 X → 문제풀기 급급 → 빈 답안지 제출 → 첨삭효율 ↓	제공 O → 추후 빈 답안지 보강 후 제출가능(혹은 못 풀었을시 해설강의 기반으로 답안작성) → 첨삭 받을 내용이 풍부해져 첨삭 효율 ↑
첨삭진 구성	일반 대학 알바생, 작년 합격 제자	Only 수학과/수교과 출신으로 구성된10인 최강 첨삭팀(업계최고수준! 박사과정 3인, 석사 및 학부졸업 5인 포함)

첨삭진이 부실하면 많은 양의 답안지를 첨삭해낼 수 없습니다. 그래서 지금까지의 Final들이 여러분에게 충분한 답안을 쓸 시간을 주지 않았던 거죠.

과거 3년 동안의 수험생활 중 제가 직접 겪었던 Final 첨삭의 불편한 진실을,최강 첨삭진들이 바로 잡아드립니다.

제 2 교시

수학 영역

기대수학연구소

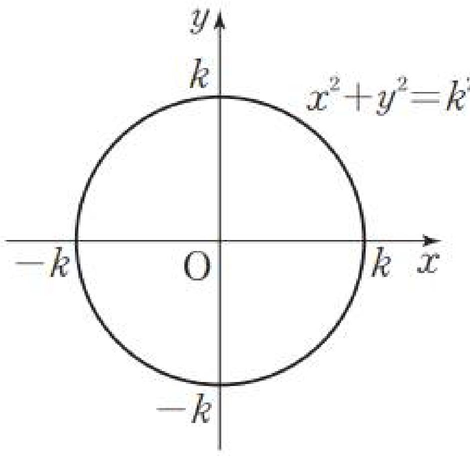
5지선다형

1. 21054 - 003 / ★★★☆☆

중심이 원점이고 반지름의 길이가 $k\,(k>2)$인 원 위의 점 중 y 좌표가 1보다 큰 자연수인 점들의 집합을 A라 하고, 집합 A에 대하여 집합 B는 다음과 같다.

B$=\{x|x$는 a의 n제곱근 중 양의 실수, $(a,n)\in A\}$

집합 B의 원소의 개수가 7일 때, k^2의 최댓값을 구하시오. 〔12번, 20번〕



기대T Comment

예전이라면 무시 받았을 n제곱근에 대한 가벼운 문항들이 21번에 간혹 출제되고 있다. 풀어서 나쁘지 않은 문항.

2. 21054 - 0018 / ★★★★☆

10보다 작은 두 자연수 a,b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=|3^x-a|+b$$

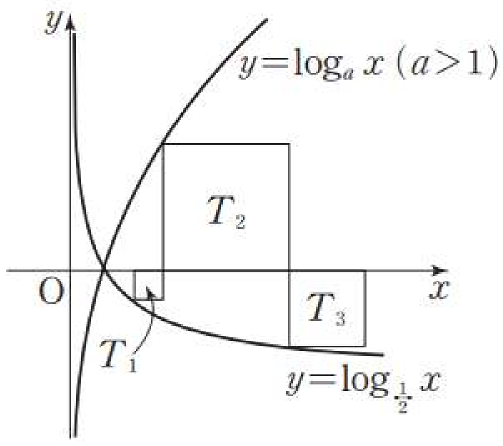
라 하자. x에 대한 방정식 $4^{f(x)}-5\times2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 a,b의 모든 순서쌍 (a,b)의 개수를 구하시오. 〔11~12번〕

기대T Comment

지수함수에 절댓값을 씌웠을 때 새로 생기는 점근선에 대한 문항. 기대모의고사에서도 많이 활용된 상황이다. 출제확률 유력.

3. 21054 - 0021 / ★★★★☆

그림과 같이 세 개의 정사각형 T_1, T_2, T_3이 한 변은 x축 위에 있고 T_2 는 T_1, T_3 과 각각 한 꼭짓점만을 공유하며 T_1, T_3의 한 꼭짓점은 각각 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$위에 있고, T_2의 한 꼭짓점은 곡선 $y=\log_a x\,(a>1)$ 위에 있다. T_1, T_3의 넓이가 각각 1, 9일 때 a^{10}의 값을 구하시오. (단, T_1, T_3은 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와 각각 한 점에서만 만나고, T_2는 곡선 $y=\log_a x$와 한 점에서만 만난다.) 〔9번,18번〕



기대T Comment

상황이 특이하다기 보다는, 그냥 외형적으로 잘 만들어진 문제.
풀어서 나쁠 것 없다.

4. 21054 - 0024 / ★★☆☆☆

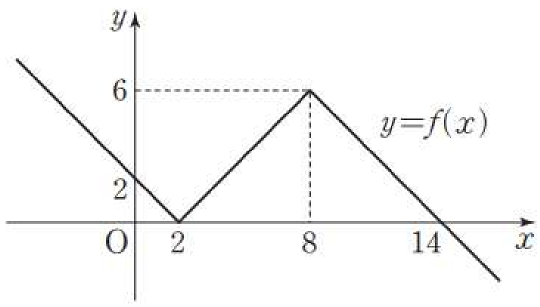
함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & (x\le 2) \\ x-2 & (2<x\le 8) \\ -x+14 & (x>8) \end{cases}$$

에 대하여 부등식

$$\log_{\frac{1}{2}}[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\ge -5$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? 〔10번〕



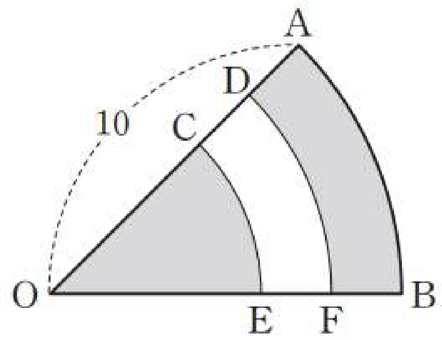
① 8
② 9
③ 10
④ 11
⑤ 12

기대T Comment

로그의 진수조건을 항상 '제일 먼저'고려하며 풀 것'

5. 21054 - 0033 / ★★☆☆☆

그림과 같이 반지름의 길이가 10인 부채꼴 모양의 텃밭이 있다. 선분 OA, OB 위에 각각 두 점 C, D와 E, F를 잡아 두 부채꼴 OCE, ODF의 호 CE, DF를 양 끝으로 하는 통로를 만들려고 한다. 두 선분 OC, DA의 길이는 각각 자연수이고 색칠한 두 영역의 넓이는 서로 같다. 세 호 CE, DF, AB의 길이의 합이 6π일 때, 통로 CEFD의 넓이는? (단, $\overline{OC}=\overline{OE}, \overline{OD}=\overline{OF}$) 〔7번〕



① $\frac{5}{2}\pi$

② $\frac{11}{4}\pi$

③ 3π

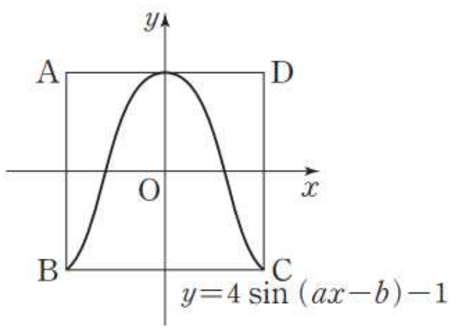
④ $\frac{13}{4}\pi$

⑤ $\frac{7}{2}\pi$

기대T Comment
기출이 많지 않아서 생기는 '낯섦'이 수학1을 어려워하는 주된 이유이기 때문에, 쉬운 문제더라도 낯선 문제들은 꼭 한번쯤은 경험해보는 것이 좋다.

6. 21054 - 0039 / ★★★☆☆

그림과 같이 좌표평면에 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD가 모든 변이 x축 또는 y축과 평행하고 두 대각선의 교점이 원점 O가 되도록 놓여 있다. 함수 $y=4\sin(ax-b)-1$의 그래프가 선분 AD의 중점에서만 선분 AD에 접하고 두 꼭짓점 B, C를 지나도록 하는 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{\pi}$의 최솟값은? 〔9번〕



① $\frac{11}{9}$

② $\frac{25}{18}$

③ $\frac{14}{9}$

④ $\frac{31}{18}$

⑤ $\frac{17}{9}$

기대T Comment
삼각함수의 주기 등의 특성상 가능한 a, b값이 많은 상태. 그 중에서 어떤 상황에서 $\frac{a+b}{\pi}$가 최대가 될 것인지를

7. 21054 - 0045 / ★★★☆☆

$0 \le x < 2\pi$에서 부등식
$2\sin^2\left(\frac{x-\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2x+\pi}{6}\right) < 0$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $4\alpha+\beta$의 값은? [9번]

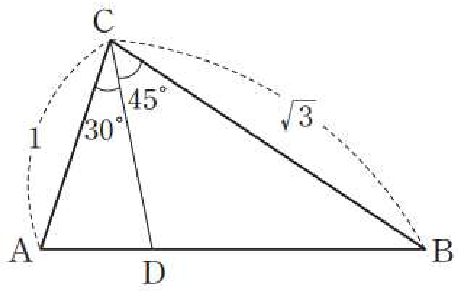
① 2π
② $\frac{5}{2}\pi$
③ 3π
④ $\frac{7}{2}\pi$
⑤ 4π

기대T Comment

최근 모평에서 관련문제로 많은 학생들이 애를 먹었다. (심지어 객관식 첫 4점 문제여서, 여기서부터 멘탈 털린 친구들 많았음.)
완벽히 같은 문제이니(?), 기억나는 기출이 있는지 확인용도로 넣었음!

8. 21054 - 0048 / ★★★★☆

그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=1, \overline{BC}=\sqrt{3}$ 이다.
선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\angle ACD = 30°$, $\angle BCD = 45°$일 때, $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$의 값은? [8번]



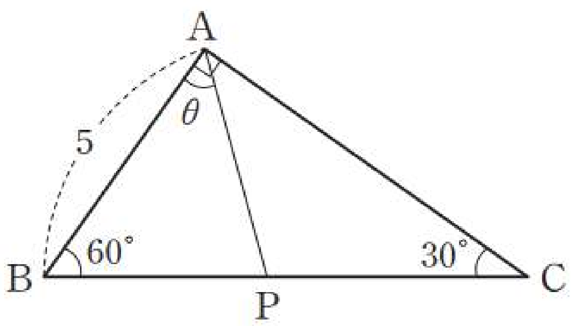
① 2
② $\sqrt{5}$
③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$
⑤ $2\sqrt{2}$

기대T Comment

두 각도 ADC, BDC의 합이 180도라는 것으로부터
두 각의 사인값은 서로 같고 코사인값은 부호만 서로 반대
라는 성질이 자주 쓰인다. 망각하지 말자 절대!

9. 21054 - 0049 / ★★★☆☆

그림과 같이 $A=90^\circ, B=60^\circ, C=30^\circ$이고 $\overline{AB}=5$인 직각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 변 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 할 때, $\dfrac{\overline{BP}}{\sin\theta}$의 최솟값을 구하시오. (단, $0^\circ<\theta<90^\circ$) 〔9번〕

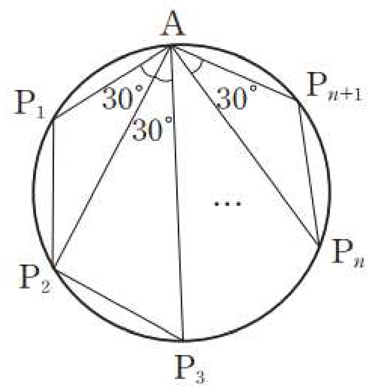


기대T Comment
한 변의 길이가 사인값으로 나누어져 있으면, 사인법칙을 의심하는 것은 기본이다.

10. 21054 - 0051 / ★★★☆☆

그림과 같이 반지름의 길이가 R인 원이 있다. 원 위의 한 점 A를 꼭짓점으로 하고, 점 A에서의 내각이 30°인 삼각형을 원에 내접하여 한 변 또는 두 변이 서로 겹치도록 최대한 붙였을 때, 삼각형들의 꼭짓점들을 점 A로부터 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 차례대로 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, P_{n+1}$이라 하자.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overline{P_1P_{k+1}}=6(2+\sqrt{3})$일 때, 원의 반지름의 길이 R의 값은? 〔10번〕

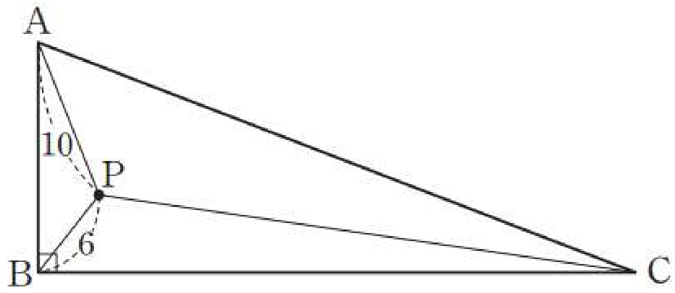


① 1
② $\dfrac{3}{2}$
③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$
⑤ 3

기대T Comment
홍익대와 같은 학교에서 수리논술 문제로 많이 만나봤을 문제이지만, 난이도는 절대 논술난이도가 아니다. 풀만한 문제이고, $\overline{P_1P_{k+1}}$를 어떻게 일반화할지만 고민하면 쉽게 풀릴 듯.

11. 21054 – 0054 / ★★★★★

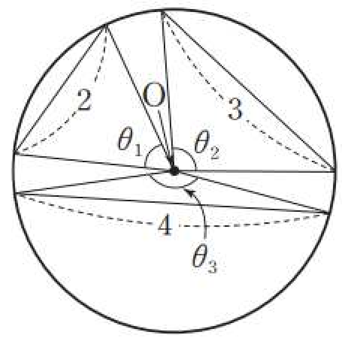
그림과 같이 B=90°인 직각삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 ∠APB=∠BPC=∠CPA=120°이고 $\overline{PA}=10$, $\overline{PB}=6$일 때, 선분 PC의 길이를 구하시오. 〔19번〕



기대T Comment
이 도형 형태가 EBS 4주완성에도 나왔고, 그 문제는 훨씬 까다로웠기 때문에 이 모양에 익숙해두도록 하자. 기회가 된다면 추후에 4주완성 문제도 소개하는 것으로 하겠다.

12. 21054 - 0056 / ★★★★★

그림과 같이 원에 길이가 각각 2, 3, 4인 세 개의 현이 있다. 이 세 개의 현 각각에 대응하는 중심각의 크기를 각각 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$이라 할 때, $\theta_3=\theta_1+\theta_2$가 성립한다. $\cos\theta_1$의 값은?
(단, $\theta_3<180°$이고 점 O는 원의 중심이다.) 〔13, 21〕

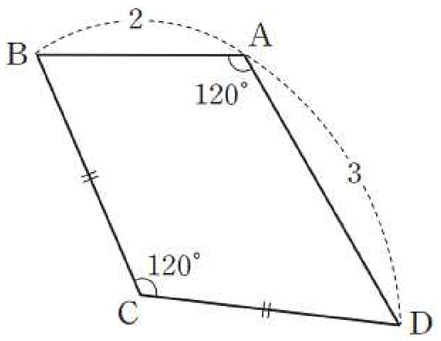


① $\frac{15}{32}$
② $\frac{17}{32}$
③ $\frac{19}{32}$
④ $\frac{21}{32}$
⑤ $\frac{23}{32}$

기대T Comment
아주 아이디어틱한 문제! 이 문제를 풀어보고 안풀어보고의 차이가 크므로 반드시 풀어보는 걸 추천! 자세한 얘기는 문제풀이의 스포가 되므로 생략한다.

13. 21054 - 0060 / ★★★☆☆

그림과 같이 사각형 ABCD에서 $A=C=120^\circ$, $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=3$이고 $\overline{BC}=\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔11〕

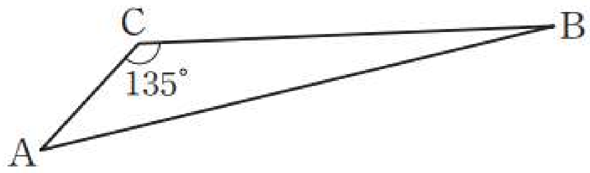


기대T Comment

이등변인데 120도이면, 1:1:$\sqrt{3}$이 자동으로 떠올라야 할 것이다. 이후 코사인법칙 쓰면 되는 무난한 문제

14. 21054 - 0061 / ★★★★☆

그림과 같이 삼각형 ABC에서 $C=135^\circ$, $\overline{AB}=2\sqrt{26}$ 이고 $\overline{BC}+\overline{AC}=8+2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? 〔11~12〕



① $\frac{15}{2}$

② 8

③ $\frac{17}{2}$

④ 9

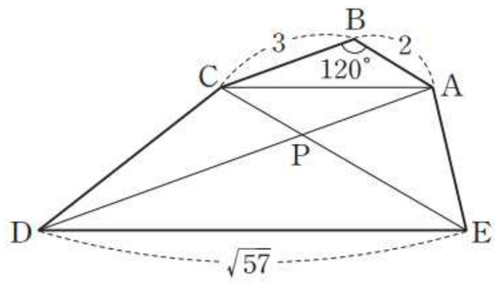
⑤ $\frac{19}{2}$

기대T Comment

올해 여러 모의고사에서 $\overline{BC}+\overline{AC}$ 표현이 등장하고 있다.
기대모의고사에서는 코사인법칙/넓이조건과 콜라보된 문제가 출제된바 있다. 뿐만 아니라 사인법칙과도 충분히 연관되기 좋은 조건이라, 풀어볼만한 문제.

15. 21054 - 0062 / ★★★★★

그림과 같이 오각형 ABCDE에서
$\overline{AB} \,/\!/\, \overline{EC}$, $\overline{BC} \,/\!/\, \overline{AD}$, $\overline{AC} \,/\!/\, \overline{ED}$, $\angle ABC = 120^\circ$ 이고
$\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$, $\overline{DE}=\sqrt{57}$이다. 두 대각선 AD와 CE가 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PDE의 넓이는? [12번]



① $\frac{7\sqrt{3}}{2}$
② $4\sqrt{3}$
③ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
④ $5\sqrt{3}$
⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{2}$

기대T Comment
평행관계에 있는 직선들을 이용해서 평행사변형과 여러 각을 구하고, 닮음비를 찾아 높이비를 구한 후 문제를 푸는 도형을 위한 도형문제. 도형에 약점을 느끼는 학생들은 꼭 풀어볼만 하다.

16. 21054 - 143 / ★★★☆☆

삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$
(나) $f'(-1)=8$, $g'(1)=-g'(3)=4$

$f(2)-g(2)$의 값은? [11, 19]
① 3
② 4
③ 5
④ 6
⑤ 7

기대T Comment
(가) 조건에서는 함수 $f(x)-g(x)$에 대한 관찰을, (나) 조건에서는 앞 조건보다 뒷 조건에 시선이 먼저가는 훈련을 해야한다. 차수가 낮은 함수일수록 단순하기 때문에 함수 $g'(x)$의 대칭성이 빛을 발할 수 있는 조건이 되니까!

17. 21054 - 156 / ★★★☆☆

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔12〕

(가) $f(1)=f'(1)=0$
(나) 0이 아닌 실수 k에 대하여 함수 $|g(x)-3|$은 $x=k$, $x=-k$에서만 미분가능하지 않다.
(다) 열린구간 $(0,\ 1)$에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)f'(x_2)>0$이다.

< 보 기 >

ㄱ. $f(0)>0$이면 함수 $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 항상 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(2)$의 최댓값은 19이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기대T Comment
이제는 흔해져버린 문제. (나) 조건에서 x=0이 없음을 인지하는 것. (다) 조건 정도가 이 문제의 킬포

18. 21054 - 0168 / ★★★☆☆

최고차항의 계수가 양수이고, 극댓값 M을 갖는 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 상수이다.) 〔12〕

(가) 방정식 $f(x)+k=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.
(나) 방정식 $|f(x)|=k$는 서로 다른 7개의 실근을 갖는다.
(다) 방정식 $|f(x)|=M$은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다.

< 보 기 >

ㄱ. 방정식 $f(x)-k=0$은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)+M=0$은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $|f(x)|=2M$은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기대T Comment
다항함수 개형문제. 별 볼 일 없는 수완 문제 중 그나마 볼만한 문항이 되겠다.

19. 21054 - 0172 / ★★★☆☆

사차함수 $f(x)=(x-1)^3(x-3)$과 이차함수 $g(x)=(x-k)^2+m$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $(f\circ g)(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (나) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(f\circ g)(x)\geq(f\circ g)(2)$가 성립한다.

모든 실수 k의 값의 곱은? (단, m은 상수이다.) 〔11〕

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{9}{2}$

기대T Comment

항상 조건은 위에서 아래로, (가)->(나) 해석이 기본이다. 무턱대고 (나)부터 하려면 매우 힘들 수 있다.

20. 21054 - 0181 / ★★★☆☆

함수 $f(x)=(x+1)(x-2)$에 대하여 $-1\leq a\leq 0$에서 정의된 함수 $g(a)$가 다음과 같다.

$$g(a)=\int_a^{a+3}|f(x)|dx$$

함수 $g(a)$의 최댓값과 최솟값의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔12, 20〕

기대T Comment

세 칸을 적분하는데, 어떻게 적분해야 x축과 둘러싸인 넓이가 최대/최소가 될까?를 직관적으로 고민해보는 방법과 $g'(a)$를 수식적으로 계산하여 정답을 내는 두 방법을 모두 할 수 있어야 하는 문제이다.

＊ 확인 사항

○ 다음부터 미적분 문제입니다.

21. 21055 - 0231 / ★★★☆☆

두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에서 $a_1=1, b_1=2$이다.

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고 다음 조건을 만족시킨다.

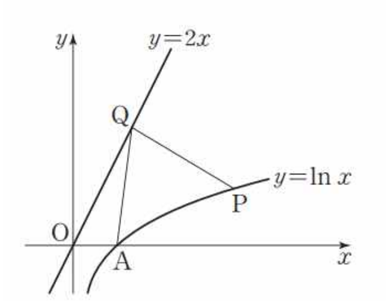
(가) $3\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
(나) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 3$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값을 구하시오. [25]

기대T Comment
등비수열의 곱은 등비수열이다. 기본문제쥬?

22. 21055 - 236 / ★★★☆☆

그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\ln x$ 위의 서로 다른 두 점 $A(1,0), P(t, \ln t)\,(t \neq 1)$과 직선 $y=2x$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AQ}=\overline{PQ}$인 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 하자. $\lim_{t\to 1} f(t)$의 값은? [26]



① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

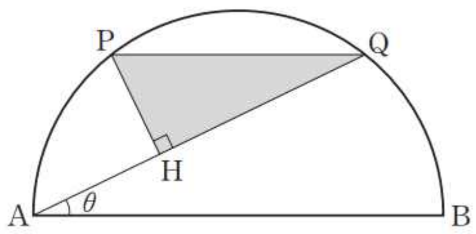
⑤ $\frac{3}{4}$

기대T Comment
$\overline{AQ}=\overline{PQ}$를 보고 '거리공식 써야지' 생각할 수 있지만, 그보다 선분 AP의 수직이등분선과 y=2x 사이의 교점이 Q임을 활용하면 더 편할 수 있음을 항상 인지하자. 벌써 EBS에서는 3년 연속으로 이 방법이 다른 방법보다 편한 문제가 꾸준히 출제중!

23. 21055 - 245 / ★★★☆☆

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원에서 선분 AB에 평행한 직선이 반원의 호 AB와 만나는 두 점 중 점 A에 가까운 점을 P, 점 B에 가까운 점을 Q라 하고, 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle \mathrm{QAB}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$일 때, 삼각형 PHQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{S(\theta)}{(\pi-4\theta)^2}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [27]



기대T Comment
유독 이 문항에 대한 변형문제를 많이 봤던 것 같다. (물론 상황 자체가 기본세팅이긴 하지만..)

24. 21055 - 0272 / ★★★☆☆

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=e$이고 모든 실수 x에 대하여

$$e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=2x-1$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [26~27]

① $\frac{3}{e}$

② $\frac{3}{e}+1$

③ $\frac{4}{e}+1$

④ $\frac{3}{e}+2$

⑤ $\frac{4}{e}+2$

기대T Comment
좌변에 있는 $-$의 출생의 이유 (e^{-x}) 를 알아야 좌변이 적분될 것이다. 하지만 저 $-$가 몫의 미분법에 의해서 나올 수 도 있다는 것을 인지하고 있어야한다. (실제로 교육청에선 꽤 나왔던 소재)

25. 21055 - 0281 / ★★★☆☆

함수 $f(x)=\sqrt[3]{x}$에 대하여

$$\int_{1}^{8}\frac{x+1}{\{f(x)\}^2+f(x)+1}dx-\int_{1}^{8}\frac{2\{f(x)\}^{-1}}{f(x)+\{f(x)\}^{-1}+1}dx=\frac{q}{p}$$

이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [28]

기대T Comment
함수 f(x)가 단순(=역함수도 이미 알고 있는 상황)하기 때문에 1) 역함수 적분을 할지 2) 실제 f, f^-1을 대입하여 계산할지 결정해야 한다. 이 문제는 실제로 둘 다 되지만, 후자만 되는 문제 충분히 출제가능하므로 시나리오엔 넣어둘 수 있도록 하자. (cf. 하지만 1)이 안되고 2)만 되는 문제는, 출제가치가 떨어지긴 하다.)

!!수리논술 Final 신청링크 QR코드!!

1주차 (Live/비대면)	채점 or 첨삭	소개 (1주차 수업은 오직 네이버 Band 비대면으로만 진행, 2,3주차는 대면+비대면 동시진행)
가톨릭 의예과반 (2회)	O	1. 모의고사 1회분 응시 이후 해설강의 수강 + 재출제 가능성 높은 기출 요소 정리 2. 채점 or 첨삭 O
건국대 (이과+수의예과) (2회)	O	1. '기하'가 빠졌지만 기하학 문제는 60% 이상 내왔던 건대 특성 맞춤 모의 2회 응시 및 해설강의 2. 채점 or 첨삭 O
서강대 (1회)	X	1. 수학적 의미가 적으나 복잡한 계산이나 증명을 주로 내는 서강대 타겟 모의고사 1회분 및 재출제 가능성 높은 기출 요소 정리 2. 컴팩트한 수업으로 경향예측 및 실전전략수립
숭실대/항공대 (1회)	X	1. 모의고사 1회분 및 재출제 가능성 높은 기출 요소 정리 2. 컴팩트한 수업으로 경향예측 및 실전전략 수립
경희대A반 (이과전체) -토요일 시험반- (2회)	O (금 제출)	1. 시험일정에 맞춰 반 선택 (모의고사 각각 2, 3회 진행 및 주요 기출 요소 정리) 2. 채점 or 첨삭 O
경희대B반 (이과+약대) -일요일 시험반- (3회)	O (토 제출)	
성균관대 (이과전체+약대) (2회)	O	1. 하나의 제시문에 관련된 소문항을 차근차근 풀어가는 연습이 필요한 학교. 난이도 자체는 높지 않으므로 2번의 특강으로 수리논술 워밍업 후 시험보러가면 큰 소득이 있기에 좋은 학교! 2. 채점 or 첨삭 O
서울과기대 (월요일 시험반)(3회)	O	1. 시험일정에 맞춰 반 선택 (모의고사 각각 2, 3회 진행 및 주요 기출 요소 정리) 2. 채점 or 첨삭 O
서울과기대 (화요일 시험반) (4회)	O	

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2022 수능완성 수1/수2/미적 선별					
1.	81	11.	33	21.	12
2.	9	12.	2	22.	2
3.	9	13.	49	23.	5
4.	4	14.	2	24.	2
5.	5	15.	3	25.	21
6.	4	16.	3		
7.	3	17.	4		
8.	3	18.	3		
9.	5	19.	3		
10.	5	20.	32		

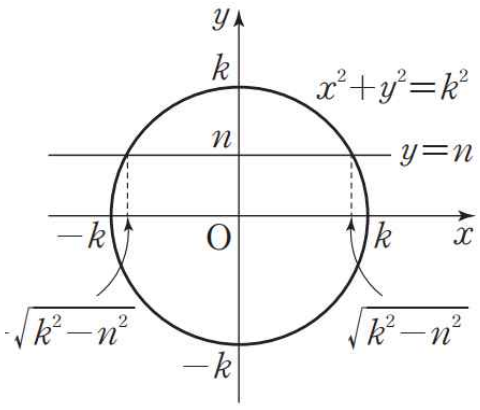
!!수리논술 Final 신청링크 QR코드!!

논술 액기스 Final (Only Live/비대면)	강의	내용
* 모든 수업 기본적으로 1.25배속 편집하여 제공 -> 시간절약 효과 * 정규반 강의 중 일부분을 발췌했으며, 첨삭은 포함되지 않습니다.		
논술노베특강 (부제: 유베되기 9시간 전)	1강	증명법 (강한수학적귀납법, 귀류법 등)
	2강	미분 (고난도 미분, 사잇값정리와 평균값 정리)
	3강	적분 (고난도 적분, 삼각치환, 여러 적분테크닉)
* 수능 기하를 응시했다면 필수 수강! 수리논술에서 미적분 비중은 70%에 육박!! * 사실상 모든 학교에 도움이 되는 액기스 Final		
미적심화특강	1강	젠센부등식 활용, 함수방정식, 미분방정식
* 서울 중상위권 대학 논술 지원자거나 의치한약수 지원자라면 수강 강추하는 수업		
확통완성특강 (기본+심화)	1강	확률과 통계 전반적 개념 (조건부확률, 중복조합 등등)
	2강	포함배제의 원리
	3강	조합의 성질
* 확통이 포함되는 모든 학교에 반드시 도움이 되는 액기스 Final		
기하완성특강 (빈출 위주)	1강	기하 교과서 기본개념 톺아보기
	2강	논술용 고난도 주제정리, 문제풀이
* 수능에서 기하를 선택하지 않은 학생들은 1, 2강 모두 수강해야하며, 논술을 따로 준비하지 않은 기하러들은 1강은 빠르게, 2강은 착실히 들을 것		

2주차 (대면+비대면)	소개
한양대 (이과전체)	1. 한양대 모범답안자 배출, 22학년도 모의논술 문항 적중 등 기대T의 시그니쳐 강의 중 하나 2. 철저히 한양대 스러운 문제들로 구성한 모의고사 문제들에 곁들여지는 'Smart, But simple'을 강조하는 해설강의가 핵심 3. 출제스타일이 매우 유사한 이화여대 지원자도 수강 추천
중앙대 (이과+의예+약학)	1. 무난한 난이도로 대부분 출제되나 몇몇 킬러문제에 의해 당락이 결정되는 만큼 충분한 문풀 준비가 필요한 학교 2. 과와 관련없이 비슷한 난이도일 뿐더러 공통된 시험지형식으로 출제되는 학교이므로 의예과나 약학과, 또는 안성캠 지원자들도 상관없이 수강 가능
세종대+광운대 연합반	1. 제시문이 있냐(광운) 없냐(세종)로 난이도가 결정될 뿐 유사한 문제스타일을 가진 두 학교를 분석하면서 기출대비(=지원학교문제)와 예상문제대비(=상대학교문제)를 동시에 할 수 있는 강좌 2. 두 학교 사이의 미묘한 출제경향차이 또한 강조해주기 때문에 둘 중 한 학교에 지원했더라도 수강 추천 (과년도 [세종:광운:둘다지원] 수강생비율 [3:4:3]) 3. 해설지만 봐서는 억지였던 풀이들이 수업을 들은 후 자연스럽게 익혀지는 신기한 경험 가능!
고려대 세종캠 약대	1. 고려대 본캠 수리논술 합격 출신 강사의 믿을 수 있는 출제예상 문항선별 안목 2. 논술을 처음 시행하는 약대인 만큼 모의논술에서도 무난한 난이도, 유명한 소재들 위주로 출제됐고 실제시험도 그럴 예정. 다른 학교 수리논술을 준비할 때에도 Base가 돼줄 필수주제 위주로 단기간 정리!
경북+부산 연합반 (Only Live + 비대면)	1. 수능형 스타일을 출제하는 학교들의 연합 Final. (의치약 지원자는 전용 Final 수강할 것!) 2. 고려 세종, 한국외대 지원자 수강 추천 (연세 미래캠 지원자도 수강은 가능하나 확통특강 추가하여 들을 것) 3. 1~3회차는 주로 출제될 수학I, II 위주 진행, 4~5회차 강의는 각 학교별 맞춤문제로 진행함으로써 학교별 개성까지 챙겨갈 수 있는 Final (경북, 외대 : 수학I,II / 부산, 고려:미적)
비고	* 전부 5회 수업 * 모든반 첨삭 제공 * 수업장소 : 대치오르비학원 (대면+비대면 전부 진행)

1)
[정답/모범답안]
81

[해설]
원 $x^2+y^2=k^2\,(k>2)$위의 점 중 y좌표가 1보다 큰 자연수인 점들의 집합이 A이므로 $(a,n)\in A$이면 $x^2=k^2-y^2$에서 $a^2=k^2-n^2$, 즉 $a=\pm\sqrt{k^2-n^2}$ 이다.

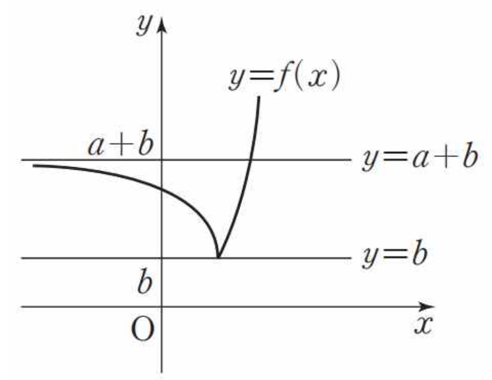


(i) n이 $2\le n<k$인 짝수일 때
$a=\pm\sqrt{k^2-n^2}$이므로
$\sqrt{k^2-n^2}$의 n제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$,$-\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$
$-\sqrt{k^2-n^2}$의 n제곱근 중 실수는 없다.
따라서 a의 n제곱근 중 양의 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$ 의 1개이다.
(ii) n이 $3\le n<k$인 홀수일 때
$a=\pm\sqrt{k^2-n^2}$이므로
$\sqrt{k^2-n^2}$의 n제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$
$-\sqrt{k^2-n^2}$의 n제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{-\sqrt{k^2-n^2}}$
따라서 a의 n제곱근 중 양의 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$ 의 1개이다.
(iii) $n=k$일 때
a=0이므로 0의 n제곱근은 0뿐이다.
따라서 a의 n제곱근 중 양의 실수는 없다.
(i), (ii), (iii)에서 $2\le n<k$인 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 양의 실수는 하나씩 생기고 모두 서로 다르다. 따라서 집합 B의 원소의 개수가 7이므로 $8<k\le 9$일 때 n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8에서 집합 B의 원소의 개수가 하나씩 생기므로 k^2의 최댓값은 9^2=81이다.

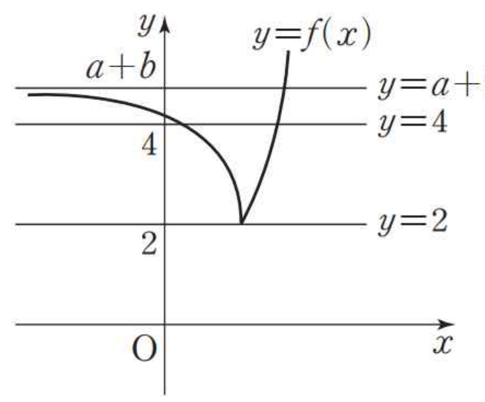
{참고}
(1) A={$(a,n)|a^2+n^2=k^2$,n은 1보다 크고 k보다 작거나 같은 자연수}
(2) $2\le n_1<n_2<k\,(n_1,n_2$는 자연수)일 때
$a_1=\sqrt{k^2-{n_1}^2}$, $a_2=\sqrt{k^2-{n_2}^2}$이면 $0<a_2<a_1$이고 $\sqrt[n_2]{a_2}<\sqrt[n_1]{a_1}$이다.
즉, $\sqrt[n_2]{a_2}\ne\sqrt[n_1]{a_1}$이다.

2)
[정답/모범답안]
9

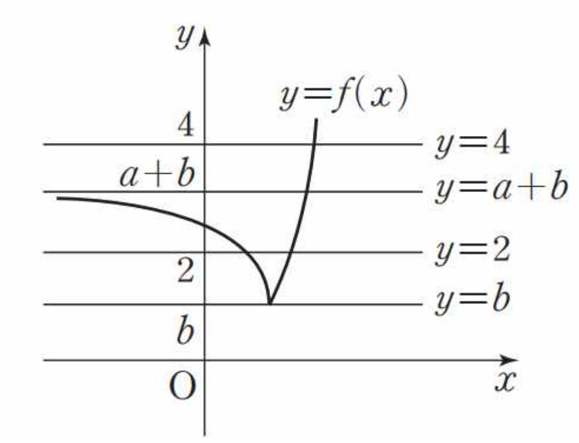
[해설]
$f(x)=|3^x-a|+b$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$4^{f(x)}-5\times2^{\,f(x)+2}+64=0$
$(2^{\,f(x)})^2-20\times2^{\,f(x)}+64=0$, $(2^{\,f(x)}-4)(2^{\,f(x)}-16)=0$
$2^{\,f(x)}=4$또는 $2^{\,f(x)}=16$
$f(x)=2$ 또는 $f(x)=4$
(i) b=2일 때
직선 y=2와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 한 점에서만 만난다.



방정식 $4^{f(x)}-5\times2^{\,f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 y=4가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로
$a+b>4$
따라서 순서쌍 (a,b)는 (3, 2), (4, 2), (5, 2), ⋯, (9, 2)의 7개이다.
(ii) $b\ne2$일 때
조건을 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



방정식 $4^{f(x)}-5\times 2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$는 한 점에서만 만나야 하므로

$b<2, 2<a+b\le 4$

따라서 순서쌍 (a,b)는 (2, 1), (3, 1)의 2개이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍 (a,b)의 개수는

$7+2=9$

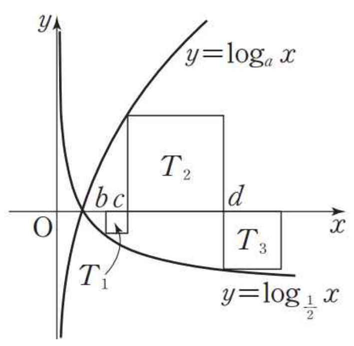
3)

[정답/모범답안]

9

[해설]

그림과 같이 3개의 정사각형 T_1, T_2, T_3 각각의 x축 위에 있는 두 꼭짓점 중 x좌표의 값이 작은 점의 x좌표를 각각 b, c, d라 하자.



정사각형 T_1의 한 변의 길이가 1이므로

$\log_{\frac{1}{2}} b=-1, b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

정사각형 T_3의 한 변의 길이가 3이므로

$\log_{\frac{1}{2}} d=-3, d=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$

$c=b+1=2+1=3$이고 $d-c=8-3=5$이므로

정사각형 T_2의 한 변의 길이는 5이다.

$\log_a 3=5$에서 $a^5=3$

따라서 $a^{10}=3^2=9$

4)

[정답/모범답안]

4

[해설]

$\log_{\frac{1}{2}}[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\ge -5$

$-\log_2[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\ge -5$

$\log_2[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\le 5$

진수는 0보다 커야 하므로 $\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}>0$

즉, $f(x)<2$ 또는 $f(x)>6$……㉠

$\log_2[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\le 5$에서

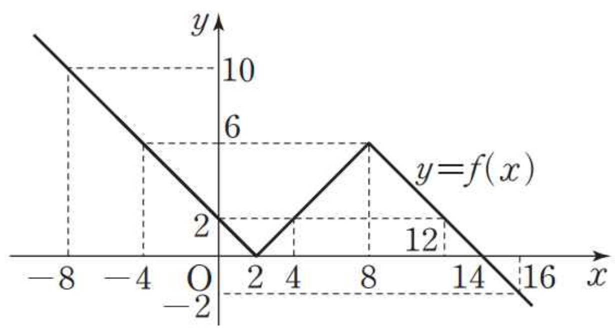
$\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}\le 2^5=32$

$\{f(x)\}^2-8f(x)-20\le 0,\ \{f(x)+2\}\{f(x)-10\}\le 0$

$-2\le f(x)\le 10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)$의 값의 범위는

$-2\le f(x)<2$ 또는 $6<f(x)\le 10$



$-8\le x<-4$ 또는 $0<x<4$ 또는 $12<x\le 16$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-8, -7, -6, -5, 1, 2, 3, 13, 14, 15, 16$이므로 그 개수는 11이다.

5)

[정답/모범답안]

5

[해설]

$\angle AOB=\theta$, $\overline{OC}=a$, $\overline{CD}=b$라 하면

색칠한 두 영역의 넓이가 서로 같으므로

$\frac{1}{2}a^2\theta=\frac{1}{2}\times 10^2\times\theta-\frac{1}{2}\times(a+b)^2\times\theta$

$a^2+(a+b)^2=10^2$

a, b는 모두 자연수이므로 $a=6$, $a+b=8$

세 호 CE, DF, AB의 길이의 합이 6π이므로

$6\theta+8\theta+10\theta=6\pi, 24\theta=6\pi, \theta=\frac{\pi}{4}$

따라서 통로 CEFD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(a+b)^2\times\theta-\frac{1}{2}\times a^2\times\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\times(8^2-6^2)=\frac{7}{2}\pi$

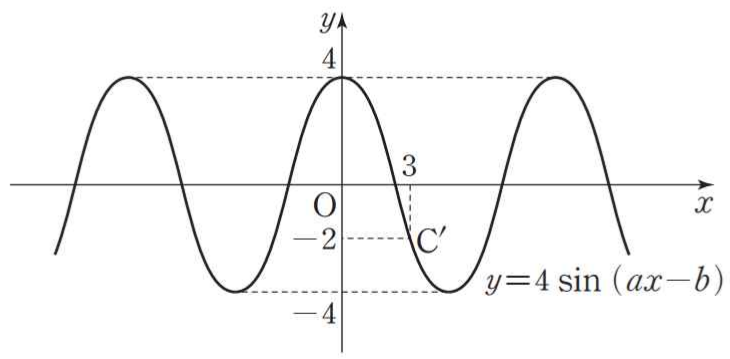
6)

[정답/모범답안]

4

[해설]

함수 $y=4\sin\,(ax-b)$의 그래프는 함수 $y=4\sin\,(ax-b)-1$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=4\sin\,(ax-b)-1$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=4\sin\,(ax-b)-1$의 그래프가 점 C(3, -3)을 지나므로
함수 $y=4\sin\,(ax-b)$의 그래프는 점 C′(3, -2)를 지난다.
$y=4\sin\,(ax-b)$라 하자.

0<α<3일 때 $f(\alpha)=0$이면 $f(0)=4, f(3)=-2$이므로

$(3-\alpha):\alpha=\frac{\pi}{6}:\frac{\pi}{2}=1:3, 3-\alpha=\frac{\alpha}{3}$

즉, $\alpha+\frac{\alpha}{3}=3$에서 $\alpha=3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

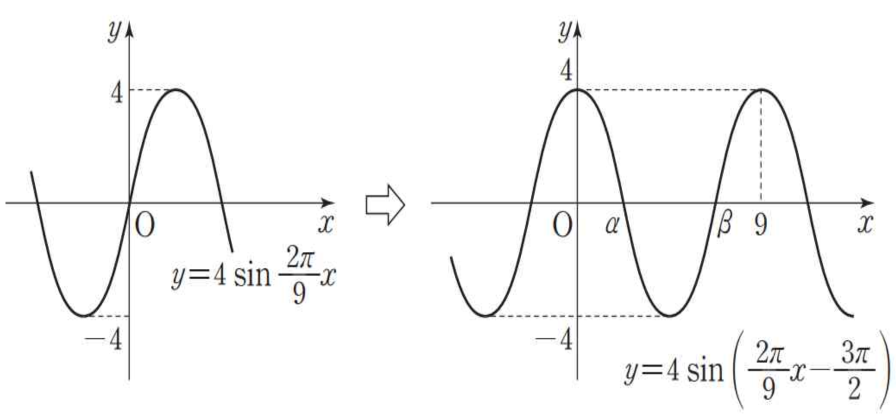
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 주기는 $4\alpha=4\times\frac{9}{4}=9$이다.

즉, $\frac{2\pi}{a}=9$에서 $a=\frac{2\pi}{9}$

함수 $y=4\sin(ax-b)=4\sin\left\{a\left(x-\frac{b}{a}\right)\right\}$의 그래프는 함수 $y=4\sin ax$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{b}{a}$만큼 평행이동한 것이다.

$\alpha<\beta<9$일 때 $f(\beta)=0$이면 $\beta=9\times\frac{3}{4}=\frac{27}{4}$이므로 $\frac{b}{a}$의 최솟값은

$\frac{27}{4}$이고 그때의 b의 값은 $b=\frac{27}{4}\times a=\frac{27}{4}\times\frac{2\pi}{9}=\frac{3\pi}{2}$



따라서 $\frac{a+b}{\pi}$의 최솟값은 $\frac{\frac{2\pi}{9}+\frac{3\pi}{2}}{\pi}=\frac{31}{18}$

{주의}

함수 $f(x)=4\sin\,(ax-b)=4\sin\left(\frac{2\pi}{9}x-b\right)$의 그래프가 점 C′(3, -2)를 지난다는 것을 이용하여 b의 최솟값을 구할 때는 주의해야 한다.

$f(3)=4\sin\left(\frac{2\pi}{9}\times3-b\right)=-2, \sin\left(\frac{2\pi}{3}-b\right)=-\frac{1}{2}$

$b>0$이므로 $\frac{2\pi}{3}-b<\frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3}-b=-\frac{\pi}{6}$에서 $b=\frac{5\pi}{6}$

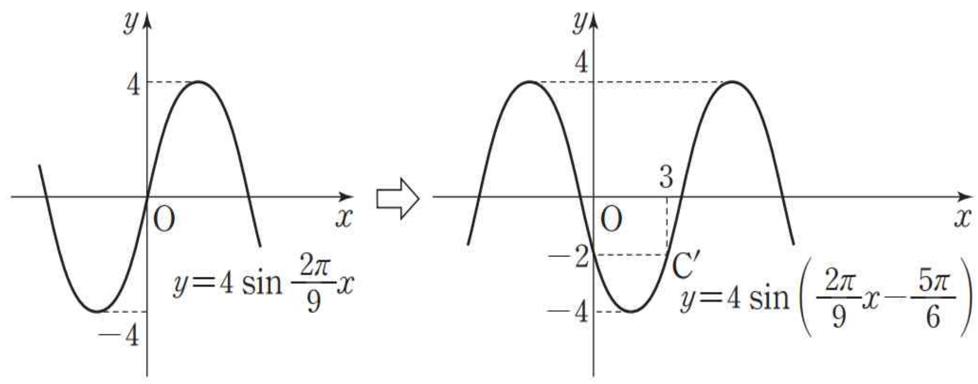
$\frac{2\pi}{3}-b=-\frac{5\pi}{6}$에서 $b=\frac{3\pi}{2}$

⋮

$b=\frac{5\pi}{6}$일 때 $f(x)=4\sin\left(\frac{2\pi}{9}x-\frac{5\pi}{6}\right)=4\sin\left\{\frac{2\pi}{9}\left(x-\frac{15}{4}\right)\right\}$

이므로 그림과 같이 함수 $y=4\sin\frac{2\pi}{9}x$의 그래프를 x축의 방향으로

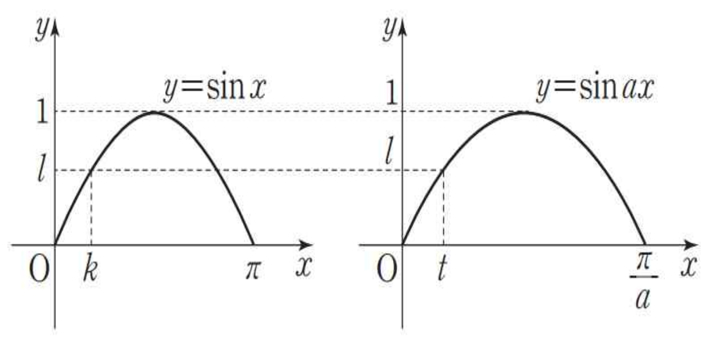
$\frac{15}{4}$만큼 평행이동한 것으로 주어진 그래프와 일치하지 않는다.



{참고}

다음 그림에서 삼각함수의 그래프의 주기가 바뀌어도 비례식

$k:\pi=t:\frac{\pi}{a}$가 성립한다.



$\sin at=l$에서 $at=k, t=\frac{k}{a}$

따라서 $t:\frac{\pi}{a}=\frac{k}{a}:\frac{\pi}{a}=k:\pi$이다.

7)

[정답/모범답안]

3

[해설]

$\frac{x-\pi}{3}=\theta$라 하면 $x=3\theta+\pi$이므로

$\frac{2x+\pi}{6}=\frac{2(3\theta+\pi)+\pi}{6}=\theta+\frac{\pi}{2}$

x에 대한 부등식 $2\sin^2\left(\frac{x-\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{2x+\pi}{6}\right)<0$을 θ에 대한 부등식으로 바꾸면

$2\sin^2\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)<0$

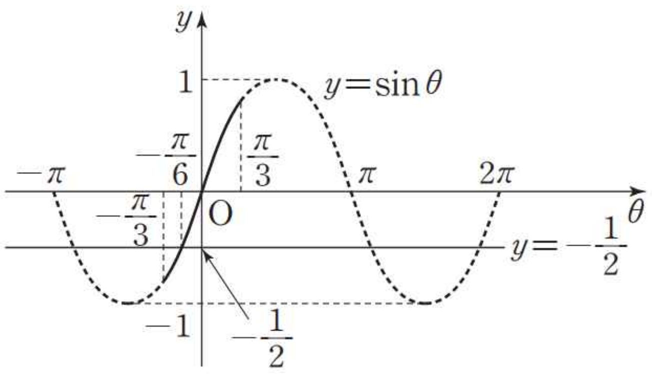
$2\sin^2\theta+\sin\theta<0$

$\sin\theta(2\sin\theta+1)<0$

$-\frac{1}{2}<\sin\theta<0$ …… ㉠

$0\le x<2\pi$이므로 $--\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{3}$이다.

$y=\sin\theta$의 그래프는 다음과 같으므로 $-\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{3}$에서 부등식 ㉠을 만족시키는 θ의 값의 범위는 $-\frac{\pi}{6}<\theta<0$



즉, $-\frac{\pi}{6}<\frac{x-\pi}{3}<0$이므로

$-\frac{\pi}{2}<x-\pi<0$, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\pi$이므로

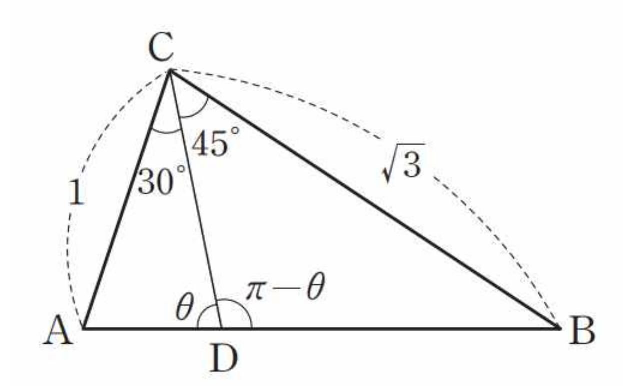
$4\alpha+\beta=2\pi+\pi=3\pi$

8)

[정답/모범답안]

3

[해설]



그림과 같이 ∠ADC=θ로 놓으면

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\overline{AD}}{\sin 30^\circ}$

$\overline{AD}=\frac{1}{\sin\theta}\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2\sin\theta}$

삼각형 BCD에서 ∠BDC=π-θ이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{\overline{BD}}{\sin 45^\circ}$

$\overline{BD}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-\theta)}\times\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2\sin\theta}$

따라서

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2\sin\theta}}{\frac{1}{2\sin\theta}}=\sqrt{6}$$

{다른 풀이}

삼각형 ADC와 삼각형 BCD의 넓이의 비는 선분 AD와 선분 BD의 길이의 비와 같다.

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{(\text{삼각형 BCD의 넓이})}{(\text{삼각형 ADC의 넓이})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\sqrt{3}\times\sin 45^\circ}{\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times 1\times\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$$

9)

[정답/모범답안]

5

[해설]

삼각형 ABP에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AP}}{\sin 60^\circ}$가 성립하므로

$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}$의 최솟값은 $\overline{AP}$의 길이가 최소일 때이다.

10)
[정답/모범답안]

5

[해설]

원에 내접하는 삼각형의 개수를 n이라 하면

$30^\circ \times n < 180^\circ$ 에서

$n < 6$

따라서 원에 내접하는 삼각형의 최대 개수는 5이다.

또 삼각형 $\mathrm{AP_1P_{n+1}}$(n=1, 2, 3, 4, 5)의 외접원의 반지름의 길이가 R이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\sin 30^\circ}=2R$ 이므로 $\overline{\mathrm{P_1P_2}}=2R\times\dfrac{1}{2}=R$

$\dfrac{\overline{\mathrm{P_1P_3}}}{\sin 60^\circ}=2R$ 이므로 $\overline{\mathrm{P_1P_3}}=2R\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R$

$\dfrac{\overline{\mathrm{P_1P_4}}}{\sin 90^\circ}=2R$이므로 $\overline{\mathrm{P_1P_4}}=2R\times 1=2R$

$\dfrac{\overline{\mathrm{P_1P_5}}}{\sin 120^\circ}=2R$이므로 $\overline{\mathrm{P_1P_5}}=2R\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R$

$\dfrac{\overline{\mathrm{P_1P_6}}}{\sin 150^\circ}=2R$ 이므로 $\overline{\mathrm{P_1P_6}}=2R\times\dfrac{1}{2}=R$

따라서

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{P_1P_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{5}=\overline{\mathrm{P_1P_{k+1}}}$$
$$=\overline{\mathrm{P_1P_2}}+\overline{\mathrm{P_1P_3}}+\overline{\mathrm{P_1P_4}}+\overline{\mathrm{P_1P_5}}+\overline{\mathrm{P_1P_6}}$$
$$=4R+2\sqrt{3}R$$
$$=2(2+\sqrt{3})R=6(2+\sqrt{3})$$

이므로 $R=3$

11)
[정답/모범답안]

33

[해설]

$\overline{\mathrm{PC}}=x$라 하면

삼각형 APC에서 코사인법칙에 의하여

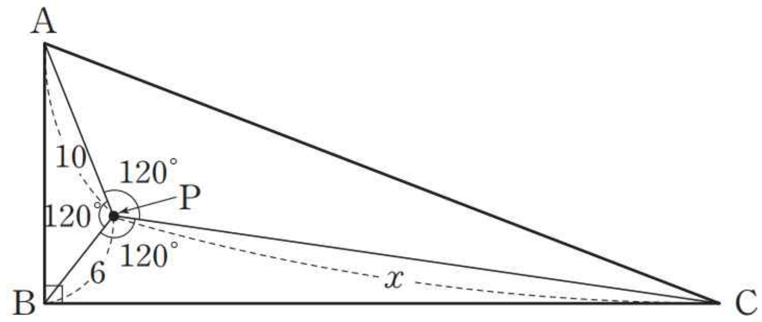
$$\overline{\mathrm{AC}}^2=10^2+x^2-2\times 10\times x\times\cos 120^\circ$$
$$=100+x^2+10x$$

삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=10^2+6^2-2\times 10\times 6\times\cos 120^\circ$$
$$=100+36+60=196$$

삼각형 BCP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=6^2+x^2-2\times 6\times x\times\cos 120^\circ$$
$$=36+x^2+6x$$



삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$$

$$100+x^2+10x=196+36+x^2+6x$$

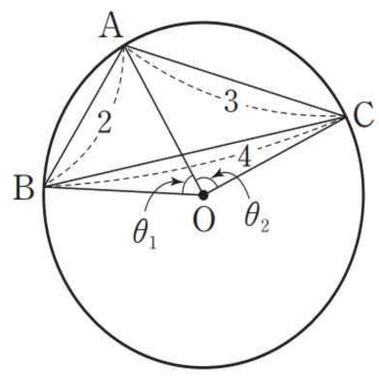
$$4x=132$$

따라서 $x=33$

12)
[정답/모범답안]

2

[해설]



$\theta_3=\theta_1+\theta_2$이므로 그림과 같이 현을 옮겨 세 변의 길이가 각각 2, 3, 4인 삼각형 ABC를 만들 수 있다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\times 2\times 3}=-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}$$

$$\cos A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin A}=2R$$

$$R=\frac{4}{2\times\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{8}{\sqrt{15}}$$

삼각형 ABO에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta_1=\frac{R^2+R^2-2^2}{2\times R\times R}=\frac{2\times\frac{64}{15}-4}{2\times\frac{64}{15}}$$
$$=\frac{128-60}{128}=\frac{68}{128}=\frac{17}{32}$$

13)
[정답/모범답안]

49

[해설]

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos(\angle BAD)$

$=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos120^\circ$

$=4+9-2\times2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=19$……㉠

$\overline{BC}=\overline{CD}=x$로 놓으면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos120^\circ$

$=x^2+x^2-2\times x\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=3x^2$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$3x^2=19, x^2=\frac{19}{3}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이와 삼각형 BCD의 넓이의 합이므로

$\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times x\times x\times\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times2\times3\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times x^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{19\sqrt{3}}{12}$

$=\frac{37\sqrt{3}}{12}$

$p=12,\ q=37$이므로

$p+q=12+37=49$

14)
[정답/모범답안]

2

[해설]

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=(a+b)^2-2ab-2ab\cos C$

$=(a+b)^2-2ab(1+\cos C)$

주어진 조건에서

$c=2\sqrt{26}, a+b=8+2\sqrt{2}, C=135^\circ$

이므로

$(2\sqrt{26})^2=(8+2\sqrt{2})^2-2ab\ (1+\cos135^\circ)$

$104=72+32\sqrt{2}-2ab\left\{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

$104=72+32\sqrt{2}-2ab+\sqrt{2}ab$

$(2-\sqrt{2})ab=-32+32\sqrt{2}$

$ab=\frac{32(\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}}$

$=\frac{32(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}$

$=\frac{32}{\sqrt{2}}=16\sqrt{2}$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times16\sqrt{2}\times\sin135^\circ$

$=\frac{1}{2}\times16\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8$

15)
[정답/모범답안]

3

[해설]

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$……㉠

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos120^\circ$

$=4+9-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=19$

$\overline{AC}>0$이므로 $\overline{AC}=\sqrt{19}$

$\overline{AB}\mathbin{/\!/}\overline{EC}$이고 $\overline{BC}\mathbin{/\!/}\overline{AD}$에서 사각형 ABCP는 평행사변형이다.

따라서 삼각형 ABC와 삼각형 CPA는 서로 합동이므로

삼각형 CPA의 높이를 h라 하면 삼각형 CPA의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times h=\frac{1}{2}\times\sqrt{19}\times h$……㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{19}\times h=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$h=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\frac{3\sqrt{57}}{19}$

한편, 삼각형 ACP와 삼각형 DEP는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AC}:\overline{DE}=\sqrt{19}:\sqrt{57}=1:\sqrt{3}$

따라서 삼각형 DEP의 높이를 h'이라 하면

$h'=\sqrt{3}h=\frac{9\sqrt{19}}{19}$

그러므로 삼각형 PDE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times h'=\frac{1}{2}\times\sqrt{57}\times\frac{9\sqrt{19}}{19}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{19}\times\frac{9\sqrt{19}}{19}$

{다른 풀이}

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos120^\circ$

$=4+9-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

=19

$\overline{\mathrm{AC}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{19}$

$\overline{\mathrm{AB}}\,/\!\!/\,\overline{\mathrm{EC}}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}\,/\!\!/\,\overline{\mathrm{AD}}$에서 사각형 ABCP는 평행사변형이다.

평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 서로 같으므로

$\overline{\mathrm{CP}}=2, \overline{\mathrm{AP}}=3$

한편, 삼각형 ACP와 삼각형 DEP는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{19}:\sqrt{57}=1:\sqrt{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{PE}}=\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{3}$,$\overline{\mathrm{PD}}=\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{PA}}=3\sqrt{3}$

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{DPE}=120^\circ$이므로

삼각형 PDE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PD}}\times\overline{\mathrm{PE}}\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

{참고}

삼각형 ACP와 삼각형 DEP는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{19}:\sqrt{57}=1:\sqrt{3}$에서 넓이의 비는 1:3

삼각형 ABC와 삼각형 CPA는 서로 합동이고 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로 삼각형 PDE의 넓이는 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$이다.

16)

[정답/모범답안]

3

[해설]

조건 (가)에서 $f(1)-g(1)=0$, $f'(1)-g'(1)=0$이므로

삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$은 $x=1$을 중근으로 갖는다.

다른 한 근을 k라 하면

$f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-k)$ …… ㉠

조건 (나)에서 $g'(1)=-g'(3)$이므로 이차함수 $g(x)$의 그래프에서 축의 방정식은

$x=\frac{1+3}{2}=2$

그러므로 상수 a, b에 대하여

$g(x)=a(x-2)^2+b=a(x^2-4x+4)+b$

로 놓을 수 있다.

$g'(x)=a(2x-4)$

$g'(1)=-2a=4$

이므로

$a=-2$

$g(x)=-2(x-2)^2+b$

㉠에서

$f(x)=(x-1)^2(x-k)+g(x)$

이므로

$f(x)=(x-1)^2(x-k)-2(x-2)^2+b$

$=(x^2-2x+1)(x-k)-2(x^2-4x+4)+b$

$f'(x)=(2x-2)(x-k)+(x^2-2x+1)-2(2x-4)$

$f'(-1)=4k+20=8$

$k=-3$

$f(x)-g(x)=(x-1)^2(x+3)$

따라서 $f(2)-g(2)=5$

17)

[정답/모범답안]

4

[해설]

함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x\geq0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같고, $x<0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 $x>0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭인 연속함수이다.

조건 (가)에서 $f(1)=f'(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

$f(x)=(x-1)^2(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-2x+1)(x^2+ax+b)$

$f'(x)=(2x-2)(x^2+ax+b)+(x-1)^2(2x+a)$

$=(x-1)\{4x^2+(3a-2)x+2b-a\}$

조건 (나)에서 함수 $|g(x)-3|$은 $x=k$, $x=-k$에서만 미분가능하지 않으며 $k\neq0$이므로 함수 $|g(x)-3|$은 $x=0$에서 미분가능하다.

함수 $|g(x)-3|$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이므로 $x=0$에서 미분가능하려면 $f'(0)=0$이어야 한다.

$f'(0)=-2b+a=0$에서

$a=2b$

그러므로

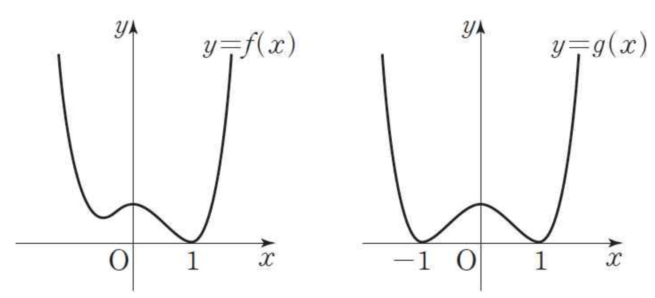
$f'(x)=(x-1)\{4x^2+(3a-2)x\}$

$=4x(x-1)\left(x-\frac{2-3a}{4}\right)$

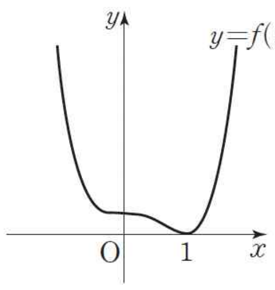
조건 (다)에서 열린구간 (0, 1)에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)f'(x_2)>0$이므로 함수 $y=f(x)$는 열린구간 (0, 1)에서 항상 증가하거나 항상 감소한다. 즉, 극값을 갖지 않는다.

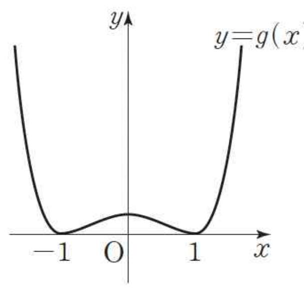
따라서 $\frac{2-3a}{4}\leq0$ 또는 $\frac{2-3a}{4}\geq1$

(ⅰ) $a>\frac{2}{3}$일 때

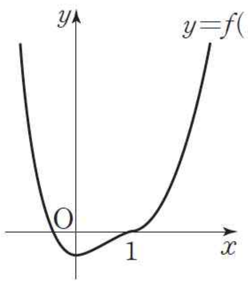


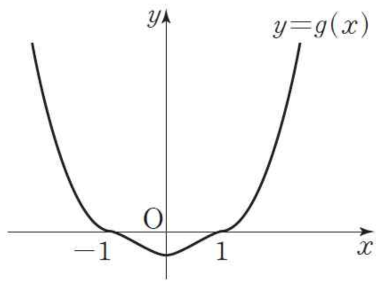
(ⅱ) $a=\frac{2}{3}$일 때



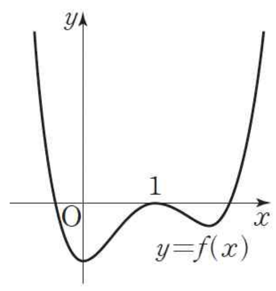


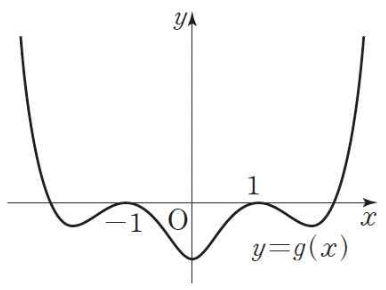
(ⅲ) $a=-\frac{2}{3}$일 때





(ⅳ) $a< -\frac{2}{3}$일 때





ㄱ. $f(0)>0$이면 (ⅰ), (ⅱ)의 경우로 함수 $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)
ㄴ. (ⅲ)의 경우 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖지 않는다.'(거짓)
ㄷ. (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 조건 (나)를 항상 만족시키려면 $f(0)=b \le 3$
따라서 $f(2)=4+2a+b=4+4b+b=5b+4 \le 19$로 $f(2)$의 최댓값은 19이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

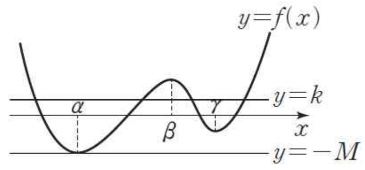
18)

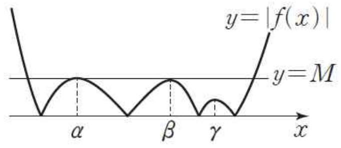
[정답/모범답안]

3

[해설]

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고, 극댓값을 가지므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근 α, β, $\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$를 갖는다.
이때 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대, $x=\gamma$에서 극소이다.
조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$는 서로 다른 세 점에서 만나므로 $-k$는 함수 $f(x)$의 극값이다.
조건 (나)에서 $k>0$이므로 $-k<0$이고 조건 (다)에서 $M\ge 0$이므로 $-k\ne M$이다. 그러므로 $-k$는 함수 $f(x)$의 두 극솟값 중 큰 값과 같다. 이때 조건 (나)를 만족시키려면 $M>k$이어야 한다.
또한 조건 (다)를 만족시키려면 두 극솟값 중 작은 값은 $-M$이어야 한다.
$f(\alpha)=-M$, $f(\beta)=M$, $f(\gamma)=-k$인 경우 그래프는 그림과 같다.





ㄱ. $M>k>0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$는 서로 다른 4개의 점에서 만난다. 그러므로 방정식 $f(x)-k=0$은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다. (참)
ㄴ. $-M$은 함수 $f(x)$의 두 극솟값 중 작은 값이므로 방정식 $f(x)=-M$, 즉 $f(x)+M=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. (거짓)
ㄷ. $2M>M>0$이므로 방정식 $|f(x)|=2M$은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

19)

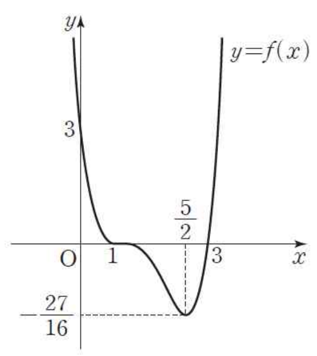
[정답/모범답안]

3

[해설]

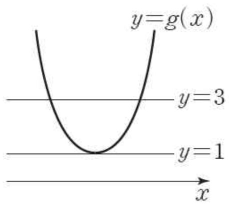
$f(x)=(x-1)^3(x-3)=(x^3-3x^2+3x-1)(x-3)$에서
$f'(x)=(3x^2-6x+3)(x-3)+(x-1)^3$
$=3(x-1)^2(x-3)+(x-1)^3$
$=(x-1)^2(3x-9+x-1)$
$=(x-1)^2(4x-10)$
$f'(x)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	극소	↗



방정식 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=0$의 서로 다른 실근은 방정식 $g(x)=1$ 또는 $g(x)=3$의 서로 다른 실근이다.
방정식 $(f\circ g)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(m)$이라 하면
$m<1$일 때 $h(m)=4$
$m=1$일 때 $h(m)=3$

$1<m<3$일 때 $h(m)=2$
$m=3$일 때 $h(m)=1$
$m>3$일 때 $h(m)=0$
이므로 조건 (가)에서 $m=1$



[$m=1$인 경우]

조건 (나)에서 $(f\circ g)(x)\geq(f\circ g)(2)$이고 $g(x)\geq 1$
이므로 함수 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$는 $x=2$일 때 최솟값을 갖고,

함수 $y=f(x)$는 $x=\frac{5}{2}$일 때 최솟값을 가지므로

$g(2)=\frac{5}{2}$

$g(2)=(2-k)^2+1=\frac{5}{2}$

$(2-k)^2=\frac{3}{2}$

$2-k=\sqrt{\frac{3}{2}}$ 또는 $2-k=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$k=2-\sqrt{\frac{3}{2}}$ 또는 $k=2+\sqrt{\frac{3}{2}}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$\left(2-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(2+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

20)

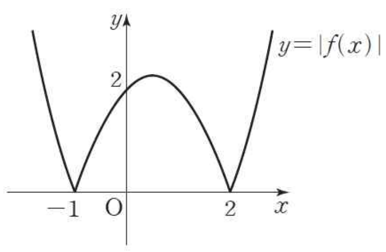
[정답/모범답안]

32

[해설]

$f(x)=(x+1)(x-2)$에서

$$|f(x)|=\begin{cases}x^2-x-2 & (x\leq -1\text{ 또는 }x\geq 2)\\ -x^2+x+2 & (-1<x<2)\end{cases}$$



]

$-1\leq a\leq 0$이므로 $2\leq a+3\leq 3$

따라서

$g(a)=\int_a^{a+3}|f(x)|dx$

$=\int_a^2(-x^2+x+2)dx+\int_2^{a+3}(x^2-x-2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_a^2+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^{a+3}$

$=\frac{10}{3}+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2-2a+\frac{1}{3}(a+3)^3-\frac{1}{2}(a+3)^2-2(a+3)+\frac{10}{3}$

$=\frac{2}{3}a^3+2a^2+2a+\frac{31}{6}$

$g'(a)=2a^2+4a+2=2(a+1)^2\geq 0$

함수 $g(a)$는 증가하는 함수이므로 $-1\leq a\leq 0$에서 함수 $g(a)$는 최솟값 $g(-1)$, 최댓값 $g(0)$을 갖는다.

$g(-1)=\frac{9}{2}$, $g(0)=\frac{31}{6}$이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{31}{6}+\frac{9}{2}=\frac{31+27}{6}=\frac{29}{3}$

따라서 $p=3$, $q=29$이므로

$p+q=3+29=32$

21)

[정답/모범답안]

12

[해설]

두 등비수열 $\{a_n\},\{b_n\}$의 공비를 각각

$r,s\,(-1<r<1,-1<s<1)$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-r},\sum_{n=1}^{\infty}=\frac{2}{1-s}$

조건 (가)에서 $3\times\frac{1}{1-r}=\frac{2}{1-s}$,$3(1-s)=2(1-r)$

$s=\frac{2}{3}r+\frac{1}{3}$ …… ㉠

조건 (나)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 첫째항이 2이고 공비가

$rs\,(-1<rs<1)$인 등비급수이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{2}{1-rs}$

$\frac{2}{1-rs}=3$에서 $rs=\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$r\left(\frac{2}{3}r+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$,$2r^2+r-1=0$

$(r+1)(2r-1)=0$

$-1<r<1$이므로 $r=\frac{1}{2}$이고 ㉠에서 $s=\frac{2}{3}$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{2}{1-\frac{2}{3}}=6$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2\times 6=12$

22)

[정답/모범답안]

2

[해설]

점 Q의 y좌표는 $2f(t)$이므로 $Q(f(t), 2f(t))$

$\overline{AQ}^2=\overline{PQ}^2$에서

$\{f(t)-1\}^2+\{2f(t)\}^2=\{f(t)-t\}^2+\{2f(t)-\ln t\}^2$

$\{f(t)\}^2-2f(t)+1+4\{f(t)\}^2$

$=\{f(t)\}^2-2tf(t)+t^2+4\{f(t)\}^2-4f(t)\ln t+(\ln t)^2$

$(2t-2+4\ln t)f(t)=t^2-1+(\ln t)^2$

$$f(t)=\frac{t^2-1+(\ln t)^2}{2t-2+4\ln t}(t\neq 1)$$

$$\lim_{t\to1}f(t)=\lim_{t\to1}\frac{t^2-1+(\ln t)^2}{2t-2+4\ln t}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{t+1+\frac{(\ln t)^2}{t-1}}{2+\frac{4\ln t}{t-1}}$$

이때 $\lim_{t\to1}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{t\to1}\ln t=0$이므로

$$\lim_{t\to1}f(t)\frac{2+1\times0}{2+4}=\frac{1}{3}$$

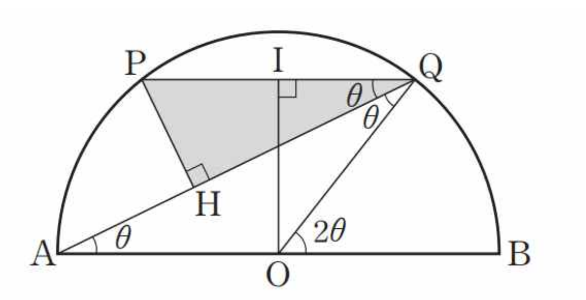
23)

[정답/모범답안]

5

[해설]

반원의 중심을 O라 하자



$\angle QAB=\theta$이므로

$\angle AQO=\angle AQP=\theta$, $\angle QOB=2\theta$, $\angle OQP=2\theta$

점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{QI}=\cos2\theta$ 이므로 $\overline{PQ}=2\cos2\theta$

이때 $\overline{PH}=\overline{PQ}\sin\theta=2\cos2\theta\times\sin\theta$,

$\overline{QH}=\overline{PQ}\cos\theta=2\cos2\theta\times\cos\theta$이므로

$$S(B\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PH}\times\overline{QH}=2\cos^2 2\theta\times\sin\theta\times\cos\theta$$

$\frac{\pi}{4}-\theta=t$라 하면 $\pi-4\theta=4t, 2\theta=\frac{\pi}{2}-2t, \theta=\frac{\pi}{4}-t$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{S(\theta)}{(\pi-4\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{2\cos^2 2\theta\sin\theta\cos\theta}{(\pi-4\theta)^2}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{(4t)^2}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2\sin^2 2t\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{16t^2}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin2t}{2t}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서 $p=4, q=1$이므로

$p+q=4+1=5$

24)

[정답/모범답안]

2

[해설]

$e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=2x-1$에서

$\frac{d}{dx}\{e^{-x}f(x)\}=2x-1$이므로

$e^{-x}f(x)=\int(2x-1)dx=x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=e$이므로 위의 등식의 양변에 x=1을 대입하면

$e^{-1}f(1)=1-1+C=1$에서 $C=1$

$e^{-x}f(x)=x^2-x+1$에서

$f(x)=(x^2-x+1)e^x$

$f'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x+1)e^x$

$\quad\quad=(x^2+x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x(x+1)e^x=0$

x=-1 또는 x=0

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $M=f(-1)=\frac{3}{e}, m=f(0)=1$이므로

$M+m=\frac{3}{e}+1$

25)

[정답/모범답안]

21

[해설]

$$\int_1^8 \frac{x+1}{\{f(x)\}^2+f(x)+1}dx-\int_1^8 \frac{2\{f(x)\}^{-1}}{f(x)+\{f(x)\}^{-1}+1}dx$$

$$=\int_1^8 \frac{\{f(x)\}^3+1}{\{f(x)\}^2+f(x)+1}dx-\int_1^8 \frac{2}{\{f(x)\}^2+f(x)+1}dx$$

$$=\int_1^8 \left[\frac{\{f(x)\}^3+1}{\{f(x)\}^2+f(x)+1}-\frac{2}{\{f(x)\}^2+f(x)+1}\right]dx$$

$$=\int_1^8 \frac{\{f(x)\}^3-1}{\{f(x)\}^2+f(x)+1}dx$$

$$=\int_1^8 \frac{\{f(x)-1\}\left[\{f(x)\}^2+f(x)+1\right]}{\{f(x)\}^2+f(x)+1}dx$$

$$=\int_1^8 \{f(x)-1\}dx$$

$$=\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x\right]_1^8$$

$$=\left(\frac{3}{4}\times 16-8\right)-\left(\frac{3}{4}-1\right)=\frac{17}{4}$$

따라서 $p=4, q=17$이므로

$p+q=4+17=21$