2014년(平成２６年) 센터 시험 수학2&수학B (자연계열)

첫 번째 물음-필수

두 번째 물음-필수

세 번째 물음~여섯 번째 물음 중 **두 물음을 선택**하여 답할 것. [만점: 100점]

첫 번째 물음(필수문제)[배점 30]

[1]O가 원점인 평면 좌표에서, 점 P(p,q)를 중심으로 하는 원 C가, 방정식 $y=\frac{3}{4}x$로 나타나는 직선 l에 접하고 있다.

(1)원 C의 반지름 r을 구해보자.

점 P를 지나고, 직선 l에 수직인 직선의 방정식은, $y=\frac{(가)}{(나)}(x-p)+q$ (단, (가)는 음수)

이므로, P부터 l까지 이은 수선과 l과의 교점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3}{25}(\left(다\right)p+\left(라\right)q),\frac{4}{25}(\left(다\right)p+\left(라\right)q)\right),$$

가 된다.

구하는 C의 반지름은, P와 l의 거리 PQ와

$r=\frac{1}{5}\left|\left(마\right)p-\left(바\right)q\right|$.................. ①이다.

(2)원 C가 x축에 접하여, 점 R(2,2)를 지나는 때를 생각해보자. (단, p>0, q>0이다.)

C의 방정식을 구해보자.

C는 x축에 접하므로, C의 반지름 r은 q와 같다. 따라서 ①에 따라 p =(사)q이다.

C는 점 R을 지나므로, 구하는 C의 방정식은

$\left(x-(아)\right)^2+\left(y-(자)\right)^2=(차)$ ....②

또는

$\left(x-(카)\right)^2+\left(y-(타)\right)^2=(파)$ ....③

임을 알 수 있다. (단, (차)<(파))

(3)방정식 ②를 나타내는 원의 중심을 S, 방정식 ③을 중심을 T로 두면, 직선 ST는 원점

O를 지나며, 점 O는 선분 ST를 (하)한다. (하)에 들어갈 내용으로 적절한 것을 다음 ⓪~⑤ 중에서 하나 골라라.

⓪1:1로 내분 ①1:2로 내분 ②2:1로 내분 ③1:1로 외분 ④1:2로 외분 ⑤2:1로 외분

[2]자연수 m,n에 대하여 부등식 $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leq 3$ ....④를 생각한다.

m=2, n=1일 때, $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 =$ (ㄱ)이고, 그 m, n 값의 짜임으로는 식 ④를 만족시킨다.

m=4, n=3일 때, $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 =$ (ㄴ)이고,

그 m, n 값의 짜임(m,n)으로는 식 ④를 만족시키지 않는다.

부등식 ④를 만족시키는 자연수 m, n 짜임(m, n)의 개수를 조사해보자.

④는

$\log_2 m + \frac{(ㄷ)}{(ㄹ)} \log_3 n \leq$ (ㅁ) ....⑤로 변형할 수 있다.

n이 자연수일 때, $\log_3 n$ 에 취할 수 있는 최솟값은 (ㅂ)이므로, ⑤에 따라 $\log_2 m \leq$ (ㅁ)이어야 한다. $\log_2 m \leq$ (ㅁ)에 따라, m=(ㅅ) 또는 m=(ㅇ)이어야 한다. (단, (ㅅ)<(ㅇ))

m=(ㅅ)일 때, ⑤는 $\log_3 n \leq \frac{(ㅈ)}{(ㅊ)}$가 되어, $n^2 \leq$ (ㅋ)로 변형할 수 있다. 그러므로, m=(ㅅ)일 때, ⑤를 만족하는 자연수 n을 취하는 값의 범위는 n ≤ (ㅌ)이다. 따라서 m=(ㅅ)일 때 ④를 충족시키는 자연수 m,n 짜임(m,n)의 개수는 (ㅎ)이다.

두 번째 물음(필수문제).(배점 30점)

p를 실수로, f(x)=$x^3 - px$로 둔다.

(1) 함수 f(x)가 극값을 가지기 위한 조건을 찾아보자. f(x)의 도함수는 $f'(x)$ =(ㄱ)$x^{(ㄴ)} - p$이다. 따라서 $f'(x)$에 극값이 존재한다면, (ㄱ)$x^{(ㄴ)} - p$=(ㄷ)이 성립한다. 이와 더불어, x=a의 앞뒤로 $f'(x)$의 부호가 변함을 생각하므로, p가 조건 (ㄹ)을 만족하는 때 f(x)는 반드시 극값을 가진다는 점을 알 수 있다.

(ㄹ)에 적합한 내용을 다음 ⓪~④ 중에서 하나 골라라.

⓪p=0 ①p>0 ② p≥0 ③ p<0 ④ p≤0

(2) 함수 f(x)가 $x=\frac{p}{3}$으로 극값을 취한다고 한다. 또는 곡선 y=f(x)을 C로 두고, 곡선 C 위를 움직이는 점$\left(\frac{p}{3}, f(\frac{p}{3})\right)$를 A라 하자.

f(x)가 $x=\frac{p}{3}$으로 극값을 취한다. 따라서 p=(ㅁ)이고, f(x)는 x=(ㅂ)에서 극댓값을 취하며 x=(ㅅ)에서 극솟값을 취한다. 곡선 C의 접선으로, 점 A를 지나는, 기울기가 0이 아닌 직선을 l로 한다. 직선 l의 방정식을 구하자. 직선 l과 곡선 C의 접점의 x좌표를 b로 하면, l은 점(b,f(b))를 교점으로 두는 C의 접선이므로, l의 방정식은 b를 이용하여

y=$\left(\left(\text{ㅇ}\right)b^2-\left(\text{ㅈ}\right)\right)(x-b)+f(b)$ 로 나타낼 수 있다.

또 직선 l은 점 A를 지나므로, 방정식 (ㅊ)b^3 −(ㅋ) $b^2+1=0$을 얻는다.

이 방정식을 풀면, b=(ㅌ) 또는 $b=\frac{(\text{ㅍ})}{(\text{ㅎ})}$ 이다. (단, (ㅍ)는 음의 정수)

직선 l의 기울기가 0이 아니므로, 직선 l의 방정식은 $y=\frac{(\text{가})}{(\text{나})}x+\frac{(\text{다})}{(\text{라})}$이다.

(단, (가)는 음의 정수)

점 A를 정점으로 하는 원점을 지나는 포물선을 D로 둔다. 직선 l과 포물선 D에 둘러싸인 도형 중, 부등식 x≥ 0을 나타내는 영역에 둘러싸인 부분의 면적인 S를 구해보자. 포물선 D의 방정식은 y=(마)$x^2-\left(\text{바}\right)x$이므로, 정적분의 계산을 하면 S=$\frac{(\text{사})}{24}$ 가 된다.

세 번째 물음. (선택문제)(배점 20)

수열 $\{a_n\}$의 초항은 6이고, 수열 $\{a_n\}$ 의 계차 수열은 공차가 9, 공차가 4인 등차수열이다.

(1) $a_2=\left(\text{ㄱ}\right), a_3=\left(\text{ㄴ}\right)$이다. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구해보자. $\{a_n\}$의 계차 수열의 제 n항이 $\left(\text{ㄷ}\right)n+\left(\text{ㄹ}\right)$이므로, 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=\left(\text{ㅁ}\right)n^{(\text{ㅂ})}+\left(\text{ㅅ}\right)n+(\text{ㅇ})$ ·····························① 이다.

(2) 수열 $\{b_n\}$은, 초항이 $\frac{2}{5}$이고 , 점화식

$b_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n+1}-1}b_n(n=1,2,3,\dots)$ ·····························②를 만족한다. 따라서 $b_2=\frac{(\text{ㅈ})}{(\text{ㅊ})}$이다.

수열 $\{b_n\}$의 일반항 그리고 초항부터 제 n항까지 합 S_n을 구해보자.

①,②에 따라 모든 자연수 n에 대하여,

$$b_{n+1} = \frac{(\text{ㅋ})n+(\text{ㅌ})}{(\text{ㅋ})n+(\text{ㅍ})}b_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

이 성립함을 알 수 있다.

여기서

$c_n = ((\text{ㅋ})n + (\text{ㅌ}))b_n$ ……………………………④(이)라 할 때, ③을 c_n과 c_{n+1}을 이용해 변형하면 모든 자연수 n에 관하여,

$((\text{ㅋ})n + (\text{ㅎ}))c_{n+1} = ((\text{ㅋ})n + (\text{가}))c_n$가 성립함을 알 수 있다. 이것에 따라

$d_n = ((\text{ㅋ})n + (\text{나}))c_n$ …………………………… ⑤ 로 두면, 모든 자연수 n에 대하여

$d_{n+1} = d_n$이 성립함을 알 수 있다.

$d_1 = (\text{다})$이므로, 모든 자연수 n에 대하여 $d_n = (\text{다})$ 이다.

따라서 ④와 ⑤에 따라 수열 $\{b_n\}$의 일반항은

$$b_n = \frac{(\text{다})}{((\text{ㅋ})n + (\text{ㅌ}))((\text{ㅋ})n + (\text{나}))}$$

이다. 또한

$$b_n = \frac{(\text{라})}{(\text{ㅋ})n + (\text{ㅌ})} - \frac{(\text{마})}{(\text{ㅋ})n + (\text{나})}$$

가 성립함을 이용하면, 수열 $\{b_n\}$의 초항부터 제 n항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{(\text{바})n}{(\text{사})n + (\text{아})}$$

임을 알 수 있다.

네 번째 물음.(선택 문항) (배점 20)

공간 좌표에서 정육면체 OABC-DEFG의 각 점의 위치가 O(0,0,0) A(3,0,0), B(3,3,0), C(0,3,0) D(0,0,3) E(3,0,3), F(3,3,3), G(0,3,3)이고,

OD를 2:1로 내분하는 점을 K, OA를 1:2로 내분하는 점을 L이라 한다.

BF위의 점 M, FG 위의 점 N 및 K, L의 네 점이 동일 평면 위에 있어, 사각형 KLMN은 평행사변형이라 한다.

(1) 사각형 KLMN의 면적을 구해보자. 벡터 $\overrightarrow{LK}$ 를 성분으로 나타내면

$\overrightarrow{LK}$ =((가),(나),(다))가 되고, 사각형 KLMN이 평행사변형이므로 $\overrightarrow{LK}$ =(라)이다. (라)에 적절한 것을 다음 ⓪~③ 중에서 골라라. (단, (가)는 음인 정수이다.)

⓪ $\overrightarrow{ML}$　　① $\overrightarrow{LM}$　　② $\overrightarrow{NM}$　　③ $\overrightarrow{MN}$

여기서 M(3, 3, s), N(t,3,3)으로 나타내면, $\overrightarrow{LK}$ =(라) 이므로, s=(마), t=(바)가 되어, N은 FG를 1:(사)로 내분함을 알 수 있다.

또 $\overrightarrow{LK}$와 $\overrightarrow{LM}$에 관해서 $\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{LM}$ = (사), $\left|\overrightarrow{LK}\right|=\sqrt{(아)}$ $\left|\overrightarrow{LM}\right|=\sqrt{(자)}$

이므로, 사각형 KLMN의 면적은 $\sqrt{(차)}$ 이다.

(2)사각형 KLMN을 포함하는 평면 α와 수직으로 만나는 직선을 l, 평면 α와 l의 교점을 P라 한다. $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ 와 삼각뿔 OLMN의 부피를 구해보자. P(p, q, r)로 두었을 때, $\overrightarrow{OP}$ 는 $\overrightarrow{LK}$ 및 $\overrightarrow{LM}$와 수직이므로 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LM}$=(카)이다. 따라서 p=(타)r, q=$\frac{(파)}{(하)}$r임을 알 수 있다.(단, (파)는 음의 정수)그리고 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{PL}$가 수직이므로 r=$\frac{(ㄱ)}{(ㄴ)}$이 된다.

$\left|\overrightarrow{OP}\right|$를 구하면, $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \frac{(ㄷ)\sqrt{(ㄹ)}}{(ㅁ)}$ 이다. $\left|\overrightarrow{OP}\right|$는 삼각형 LMN을 밑면으로 하는 삼각뿔 OLMN의 높이이므로, 삼각뿔 OLMN의 부피는 (ㅂ)이다.

다섯 번째 물음(선택 문제)(배점 20).

다음 표는 어느 학급의 학생 9명에게 실시된 영어와 수학 시험의 득점을 정리한 것이다. 단, 시험으로 얻은 점수는 정수이다. 또한 수치는 모두 정확한 값이고 반올림하지 않았다.

	영어	수학
학생 1	9	15
학생 2	20	20
학생 3	18	14
학생 4	18	17
학생 5	A	8
학생 6	18	C
학생 7	14	D
학생 8	15	14
학생 9	18	15
평균값	16.0	15.0
분산	B	10.00
상관계수	0.500	

소수점을 포함한 수가 나왔을 때에는, 지정된 자리의 한 자리 아래를 반올림하여 답하시오.

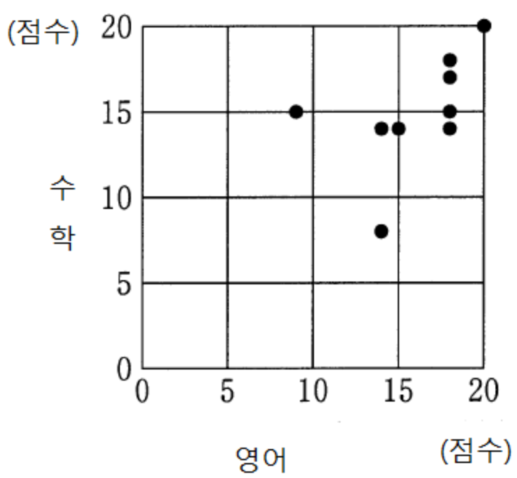
도중에 나머지 없이 나뉘는 경우, 지정된 자리까지 0을 쓸 것(5번째 물음의 모든 문항에 적용).

(1) 학생 5가 영어 시험에서 얻은 점수 A는 (가나)이고, 아홉 사람의 영어 득점에 관한 분산 B의 값은 (다라).(마바)이다. 또 아홉 사람의 수학 득점에 관한 평균값이 15점이고 영어와 수학과의 득점에 관한 상관계수의 값이 0.500이므로, 학생 6의 수학 득점 c와 학생 7의 수학 득점 D와의 관계식 C+D=(사아), C-D=(자)를 얻을 수 있다. 따라서 C는 (차카)점, D는 (타파)점이다.

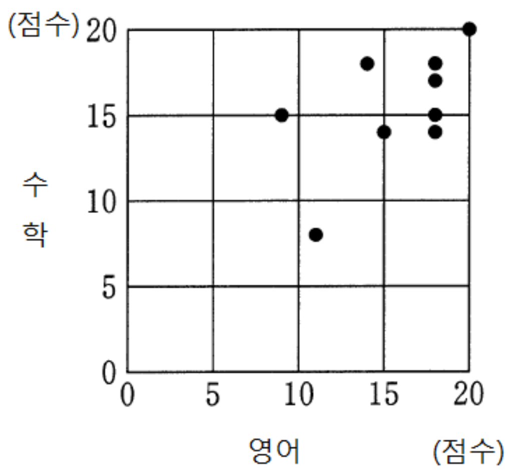
(2) 아홉 사람에 대한 영어와 수학 득점의 상관도(산포도)로 적절한 것은 (아)이다.

(아)로 적절한 것을 다음 ⓪~③에서 하나 골라라.

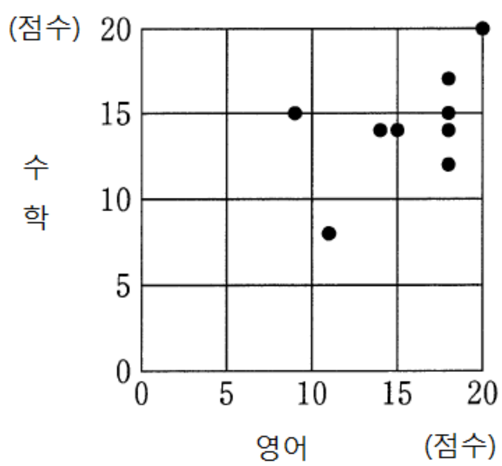
⓪



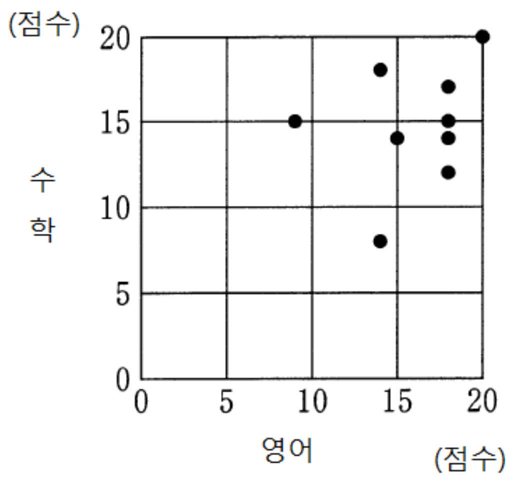
①



②



③



(3) 학생 10이 전학 와서 그 학생에 대해 같은 시험을 실시했다. 아래의 표는 첫 9명의 학생에 학생 10을 더한, 열 사람의 영어-수학 시험 점수를 정리한 것이다. 단, 아래 표의 수치는 전부 정확한 값이고 반올림되어 있지 않은 것이다.

	영어	수학
학생 1	9	15
학생 2	20	20
학생 3	18	14
학생 4	18	17
학생 5	A	8
학생 6	18	C
학생 7	14	D
학생 8	15	14
학생 9	18	15
학생 10	6	F
평균값	E	14.0
분산	18.00	18.00
상관계수	0.750	

10명의 영어 성적 평균값 E는 (하)(ㄱ).(ㄴ)점이고, 학생 10명의 수학 성적 F는 (ㄷ)점이다.

(4)학생 10이 전학 온 다음에 학생 한 사람이 전학 갔다. 남은 9명의 학생에 대해 영어 성적의 평균값은 10명의 평균값과 같이 (하ㄱ)점, (ㄴ)점이고, 수학 성적의 평균값은 10명의 평균값과 같은 14.0점이었다. 전학 간 학생은 '학생 (ㄹ)'이다. 또 10명에 영어 성적에 대한 분산은 v로, 남은 9명의 득점의 분산은 v′이라 하면, $\frac{v'}{v} = (ㅁ)$이 성립한다.

이와 더불어 10명의 영어와 수학 성적과의 상관계수의 값을 r, 남은 아홉 사람의 영어와 수학과의 상관 관계의 값을 r′ 이라 하면, $\frac{r'}{r} = (ㅂ)$이다. (ㅁ)와 (ㅂ)에 적합한 숫자를 다음 ⓪~⑤ 중에서 각각 하나씩 골라라. 단, 서로 같은 것을 골라도 좋다.

⓪ -1 ① 1 ② $\frac{9}{10}$ ③ $(\frac{9}{10})^2$ ④ $\frac{10}{9}$ ⑤$(\frac{10}{9})^2$

여섯 번째 물음(선택 문항) (배점 20)

2 이상의 자연수 N에 대하여, 1부터 N까지의 자연수를 곱한 것을 N!이라 하고, N!= $1 \times 2 \times \ldots \times \mathrm{N}$의 소인수분해를 생각해보자.

(1) N=6일 때, N!의 소인수분해는 $6! = 2^{(가)} \times 3^{(나)} \times 5$이다. 6!은 소인수 2를 (가)개, 소인수 3을 (나)개, 소인수 5를 1개 가진다.

(2) N!이 가지는 소인수 2의 개수를 구하는 방법에 대해 생각해보자.

먼저 $\frac{\mathrm{N}}{2}$의 정수 부분을 M으로 둔다. N 이하의 자연수 중에는 M개의 짝수 2, 4, ⋯, 2M이 있다. 그 외의 (양의) 홀수끼리의 곱을 Q로 두면 N!은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{N}! = \mathrm{Q} \times 2 \times 4 \times \ldots \times 2\mathrm{M} = \mathrm{Q} \times 2^{\mathrm{M}} \times \mathrm{M}!$$

따라서 N!는 적어도 M개의 소인수 2를 가지는 것을 알 수 있다. 이와 더불어 M!가 가지는 소인수 2의 개수를 구하기 위해, N!에 관한 절차를 M!에 대해 다시 활용해볼 수 있다. 즉, 'N!이 가지는 소인수 2의 개수를 구하기 위해서는 N부터 $\frac{\mathrm{N}}{2}$의 정수 부분인 M을 구해, M을 바꾸어 N으로 생각하여 같은 절차를 활용하여 새로운 M을 구한다.'는 절차의 반복을 M<2가 될 때까지 실시하면 된다. 이 절차를 반복하여 구해진 모든 것의 합인 M의 합이, N!이 지닌 소인수 2의 개수로 있다.

예를 들자면, N=13일 때에는 $\frac{13}{2}$=6.5 이므로, M=6이 된다. 이 절차를 반복하여 M을 구한 결과는 N부터 M을 구하는 절차를 화살표(→)로 나타내면, 다음과 같이 정리된다.

13 → **6** → **3** → **1**

굵은 글씨로 표시된 6, 3, 1이, 이 절차를 반복하여 구해진 M의 값이다. 그것들의 합 6+3+1=10이, 13!이 가지는 소인수 2의 개수이다.

이 절차에 따라 2 이상의 자연수 N을 입력하여, N!가 지니는 소인수 2의 개수를 출력하는 [프로그램 1]을 작성했다. 단 INT(X)는 X를 넘지 않는 최대의 정수를 나타내는 함수이다.

[프로그래밍 1]

```
100 INPUT PROMPT "N=":N
110 LET D=2
120 LET C=0
130 LET M=N
140 FOR J=1 TO N
150     LET M=INT(M/D)
160     LET   (다)
170     IF    (라)   THEN GOTO 190
180 NEXT J
190 PRINT " 소인수 ";D;"는(은) ";C;"개 "
200 END
```

[프로그램 1]의 (다)에 알맞은 식을 다음 ⓪~③ 중에서 하나 골라라.

⓪ $C = C + 1$ ① $C = M$ ② $C = C + M$ ③ $C = C + M + 1$

(라)에 적절한 식으로, 다음의 ⓪~④중에서 하나 골라라.

⓪ $M >= D$ ① $M = D$ ② $M <= D$ ③$M < D$ ④ $M > D$

[프로그램 1]을 실행하여, 변수 N에 101을 입력한다. 170행의 [GOTO 190]이 실행되는 때 변수 J의 값이 (마)이다. 또 190행에 출력된 변수 C의 값은 (바)이다.

(3)N!이 지니는 소인수 2의 개수를 구하는 방법은 다른 소인수의 개수에 관해서도 같은 식으로 적용할 수 있다. 예를 들자면 N!이 지니는 소인수 5의 개수를 구할 적에는 먼저 $\frac{N}{5}$ 의 정수 부분을 M으로 둔다. N 이하의 자연수 중에는 M개의 5의 배수가 있으므로, N!은 적어도 M개의 소인수 5를 가진다. 또 이들의 M개의 5의 배수를 5로 나눈 것의 몫은 1, 2, ⋯, M이다. M!의 소인수 5의 개수를 구하기 위해서는 M을 N이라 생각하고, 같은

절차를 반복하면 된다.

따라서 N!이 지니는 소인수 5의 개수를 구하기 위해서는 [프로그램 1]의 (사)행을 (아)로 변경하면 된다. (아)에 적절한 것을 다음 ⓪~⑤ 중에서 골라라.

⓪ INPUT PROMPT "N=":N	① INPUT PROMPT "C=":C
② INPUT PROMPT "M=":M	③ LET C=5
④ LET D=5	⑤ LET M=D

변경한 [프로그램 1]을 실행함에 따라 2014!는 소인수 5를 (자)개 가짐을 알 수 있다. 따라서, 2014!이 지니는 소인수 2의 개수와 소인수 5의 개수에 관해 생각하는 것에 따라, 2014!을 10으로 나머지 없이 나눌 수 있을 때까지 계속 나누면, (차)번 나눌 수 있다.

(4) N 이하의 모든 소수(素數)가 N!의 소인수에 포함된다. 그 개수는 소수 2나 소수 5의 사례와 같은 식으로 구할 수 있다. N 이하의 모든 소인수에 대해, N!이 지니는 소인수와 그 개수를 순서대로 출력하기 위해 [프로그램 1]을 변경하여 [프로그램 2]를 작성했다. 행 번호에 밑줄이 그여 있는 행은 변경 또는 추가된 부분이다.

단, 반복 처리 [For K=A TO B~NEXT K]에서 A가 B보다 큰 때에는, 그 반복 처리가 실시되지 않고 그 다음 처리로 진행된다.

[프로그램 2]

```
100 INPUT PROMPT "N=":N
110 FOR D=2 TO N
111     FOR K=2 TO D-1
112         IF (카)       THEN (타)
113     NEXT K
120     LET C=0
130     LET M=N
140     FOR J=1 TO N
150         LET M=INT(M/D)
160         LET    (다)
170         IF    (라)     THEN GOTO 190
180     NEXT J
190     PRINT "소인수";D;"은(는) ";C;"개 "
191 NEXT D
200 END
```

[프로그램 2]을 111행부터 113행까지 처리한 이유는 D가 소수(素數)인지 아닌지를 판정하기 위해서이다. (카), (타)에 적절한 것을 다음 ⓪~⑧ 중에서 하나 골라라. 단, 서로 같은 것을 골라도 좋다.

⓪ INT(D/K)=1	① INT(D/K)>1	② D=INT(D/K)*K
③ D<>INT(D/K)*K	④ GOTO 120	⑤ GOTO 130
⑥ GOTO 180	⑦ GOTO 190	⑧ GOTO 191

[프로그램 2]를 실시하여 변수 N에 26을 입력했을 때 190행은 (파)번 실시되었다. (파)번 중, 변수 C의 값이 2가 되는 때는 (하)번째이다. [끝]