집합의 분할

著 : 雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 집합의 분할

n개의 원소를 갖고 있는 집합 A와 집합 $[k]:=\{n\in\mathbb{N} \mid n\le k\}$에 대하여

(i) $A=B_1\cup B_2\cup\ \cdots\ \cup B_k$
(ii) $\forall i\in[k],\ B_i\ne\varnothing$
(iii) $\forall i,j\in[k]\ :\ i\ne j\to B_i\cap B_j=\varnothing$

이면, $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$를 집합 A의 분할(Set Partition)이라 하고, 각 B_i를 이 분할의 블록(block)이라 한다.

원소의 개수가 n개인 집합에 대하여 k개의 블록을 가진 이 집합의 분할의 수를 제 2종 스털링 수(Stirling Numbers of the Second Kind)라 하고, $S(n, k)$로 나타내며, 이러한 집합의 모든 분할의 수를 벨 수(Bell Number), $B(n)$이라 한다. 즉,

$$B(n)=\sum_{i=1}^{n}S(n, i)$$

이다.

제 2종 스털링 수 역시 k가 특정한 값을 가질 때 비교적 간단하게 계산 가능하며, 그 외의 값을 가질 때는 점화식을 이용하여 $S(n, k)$의 값을 구할 수 있다.

① 편의상 집합 A를 $A=[n]$이라 하자. $k=1$일 때, 조건을 만족하는 분할은 $[n]=[n]$ 뿐이므로 $S(n, 1)=1$이다.

② $k=n$일 때, 조건을 만족하는 분할은 $[n]=\{1\}\cup\{2\}\cup\ \cdots\ \cup\{n\}$ 뿐이므로 $S(n, n)=1$이다.

③ $k=2$일 때, 서로 다른 n개의 원소를 두 집합에 분배하면 된다. 전체 경우의 수는 2^n가지이고 공집합이 발생하는 경우는 2가지, 두 집합은 구별되지 않으므로 최종적으로 2로 나누어주면 $S(n, 2)=2^{n-1}-1$이다.

④ $k=n-1$일 때, 집합 A의 분할은 원소의 개수가 1개인 집합 $n-2$개와 원소의 개수가

2개인 집합 1개로 구성되어 있으므로, 원소의 개수가 2개인 집합만 구성하면 나머지는 자동으로 정해진다. 따라서 $S(n, n-1) = {}_{n}\mathrm{C}_{2}$이다.

⑤ 집합 A의 분할 중 $B_i = \{n\}$인 블록 B_i의 존재 여부에 따라 경우를 나누자. 그러한 블록 B_i가 존재하는 경우, 집합 $[n-1]$을 $k-1$개의 블록으로 분할하면 되므로 이때 경우의 수는 $S(n-1, k-1)$이다. 그러한 블록 B_i가 존재하지 않는 경우, 우선 $[n-1]$을 k개의 블록으로 분할한 후 그중 하나에 원소 n을 끼워 넣으면 되므로 경우의 수는 $S(n-1, k) \times {}_{k}\mathrm{C}_{1}$이다. 따라서 합의 법칙에 의해 다음과 같은 점화식을 얻는다.

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k) \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

위 점화식은 분할수 $p(n, k)$의 점화식과 유사하지만, $k \cdot S(n-1, k)$ 항을 보면 k가 곱해지면서 분할수에 비해 더 빠르게 증가하고, k가 남아있어 계산량이 더 많을 것이라고 유추해볼 수 있다.

예제 1) 30030을 1보다 큰 세 자연수의 곱으로 나타내는 방법의 수와, 세 자연수의 곱으로 나타내는 방법의 수를 각각 구하여라.

pf) $30030 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$이다. 이때 세 자연수가 모두 1보다 크다는 것은 집합 $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$을 분할한 각 블록이 공집합이 아님을 의미하므로 이때의 경우의 수는 $S(6, 3)$과 같다. 또한 1을 허용하는 경우 블록의 수가 3개 이하이므로 이때의 경우의 수는 $S(6, 3) + S(6, 2) + S(6, 1)$이 된다.

따라서 답은 $S(6, 3) = 90$, $S(6, 3) + S(6, 2) + S(6, 1) = 122$이다. ($S(6, 3)$의 값은 (*)의 점화식을 이용하여 구하면 된다.) ■

예제 2) 집합 $[n]$의 분할을 생각하여 다음이 성립함을 보여라.

$$(1)\ S(n,\ k) = \sum_{i=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_{i} \times S(i,\ k-1)$$

$$(2)\ B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_{i} \times B(i) \text{ (단, } B(0) = 1)$$

pf) (1) n이 포함된 블록을 X라 하자. $n(X) = i$일 때, X의 나머지 원소들을 정하는 방법의 수는 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{i-1} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-i}$가지이고, 나머지 $n-i$개의 원소들을 $k-1$개의 블록으로 분할하는 방법의 수는 $S(n-i, k-1)$이다. 이때 $i=1$부터 $n-1$까지 가능하므로 이들을 모두 합하면 문제의 등식이 증명된다. ■

(2) (1)과 같은 방법으로 블록 X를 정의하자. $n(X)=i$일 때, X의 나머지 원소들을 정하는 방법의 수는 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{i-1}={}_{n-1}\mathrm{C}_{n-i}$가지이고, 나머지 $n-i$개의 원소들을 블록으로 분할하는 방법의 수는 $B(n-i)$이다. 이때 $i=1$부터 n까지 가능하므로 이들을 모두 합하면 문제의 등식이 증명된다. ■

예제 3) $S(n, n-2)$를 구하여라.

pf) 집합 $[n]$을 $n-2$개의 블록으로 분할하면, 각 블록의 원소의 개수는 다음의 두 가지 상황만이 가능하다 : $\overbrace{3, 1, 1, \cdots, 1}^{n-2}$ 또는 $\overbrace{2, 2, 1, 1, \cdots, 1}^{n-2}$. 첫 번째 경우, 원소의 개수가 3개인 블록만 결정하면 나머지는 자동으로 정해지므로 이때의 경우의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{3}$이다. 두 번째 경우, 원소의 개수가 2개인 블록 2개만 결정하면 나머지는 자동으로 정해지므로 이때의 경우의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{4}\times 3$이다.

따라서 구하는 전체 경우의 수는

$$S(n, n-2)={}_{n}\mathrm{C}_{3}+4\times {}_{n}\mathrm{C}_{4}=\frac{n(n-1)(n-2)^2}{6}$$

이다. ■

Ⅱ. 함수의 개수 구하기

제 2종 스털링 수를 이용하면 전사함수의 개수를 쉽게 구할 수 있다.

예제 4) 전사함수 $f:[6]\rightarrow[3]$의 개수를 구하여라.

pf) 정의역 $[6]$을 공집합이 아니고 서로소인 세 집합으로 분할하고, 이들에게 1, 2, 3을 할당하면 되므로 구하는 경우의 수는 $3!\times S(6, 3)=540$개다. ■

예제 5) $3<n\in\mathbb{N}$일 때, $S(n, 3)$이고, n이 짝수라면 $S(n, 3)$은 3의 배수임을 보여라.

pf) 함수 $f:[n]\rightarrow[3]$을 생각하자. 전사함수 f의 개수는 $S(n, 3)\times 3!$이고, 이를 포함과 배제의 원리로 구하면 $3^n-{}_{3}\mathrm{C}_{2}\cdot 2^n+{}_{3}\mathrm{C}_{1}\cdot 1^n=3^n-3\cdot 2^n+3$가지이므로

$$S(n, 3)=\frac{3^{n-1}-2^n+1}{2}$$

이다. 한편 $n=2n_1$이면

$$S(n,\,3)=\frac{3^{2n_1-1}-2^{2n_1}+1}{2}$$

에서 $3^{2n_1-1}-2^{2n_1}+1\equiv 1+1\equiv 0\pmod 2$,
$3^{2n_1-1}-2^{2n_1}+1\equiv(-1)^{2n_1}+1\equiv 0\pmod 3$이므로 $S(2n_1,\,3)$은 3의 배수이다. ■

< Claim >

(1) 함수 $f:[n]\to[m]$에 대하여 치역의 원소의 개수가 k인 함수 f의 개수는 ${}_m\mathrm{C}_k\cdot S(n,\,k)k!$이다.

(2) $m^n=\sum_{i=1}^{\min\{m,\,n\}}\{{}_m\mathrm{C}_i\cdot S(n,\,i)i!\}$이 성립한다.

pf) (1) 집합 $[m]$에서 치역의 원소 k개를 선택하는 방법의 수는 ${}_m\mathrm{C}_k$가지 이고, 이때 정의역 $[n]$을 k개의 블록으로 분할하여 각각에 치역의 원소를 할당해야 하므로 전체 경우의 수는 ${}_m\mathrm{C}_k\cdot S(n,\,k)k!$이다. ■

(2) $[n]$에서 $[m]$으로 가는 함수 f는 모두 m^n개이고, f의 치역의 원소의 개수는 1개에서 $\min\{m,\,n\}$개까지 가능하므로 이들의 합을 구하면 다음을 얻는다. ■

$$m^n=\sum_{i=1}^{\min\{m,\,n\}}\{{}_m\mathrm{C}_i\cdot S(n,\,i)i!\}$$

예제 6) $\sum_{i=1}^{n}i^k=\sum_{i=1}^{\min\{n,\,k\}}\{{}_{n+1}\mathrm{C}_{i+1}\cdot S(k,\,i)i!\}$이 성립함을 보여라.

pf) Claim에 의해

$$i^k=\sum_{j=1}^{\min\{i,\,k\}}\{{}_i\mathrm{C}_j\cdot S(k,\,j)j!\}$$

이 성립한다. 이때 우변은 위 등식을 $i=1$부터 n까지 합한 것이므로

$$\sum_{i=1}^{n}i^k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\min\{i,\,k\}}\{{}_i\mathrm{C}_j\cdot S(k,\,j)j!\}$$

이 성립한다. 우변의 시그마를 i의 값을 기준으로 풀면,

$i=1$일 때 : ${}_1\mathrm{C}_1 \cdot S(k, 1)1!$
$i=2$일 때 : ${}_2\mathrm{C}_1 \cdot S(k, 1)1! + {}_2\mathrm{C}_2 \cdot S(k, 2)2!$
$\vdots$
$i=n$일 때 : ${}_n\mathrm{C}_1 \cdot S(k, 1)1! + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot S(k, 2)2! + \cdots + {}_n\mathrm{C}_m \cdot S(k, m)m!$
$(m=\min\{n, k\})$

이다. 이를 세로로 읽으면 같은 행에서는 ${}_i\mathrm{C}_j \cdot S(k, j)j!$에서 j의 값이 일정하므로 j를 기준으로 다시 생각해보자. j가 1부터 m까지 변화할 때 $S(k, j)j!$의 값은 각각 일정하고, ${}_j\mathrm{C}_j + {}_{j+1}\mathrm{C}_j + \cdots + {}_n\mathrm{C}_j$가 곱해진다. 이는 하키스틱 공식에 의해 ${}_{n+1}\mathrm{C}_{j+1}$과 같으므로

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\min\{i, k\}} \{ {}_i\mathrm{C}_j \cdot S(k, j)j! \} = \sum_{j=1}^{\min\{n, k\}} \{ {}_{n+1}\mathrm{C}_{j+1} \cdot S(k, j)j! \}$$

이다. 최종적으로 j를 i로 바꿔주면 문제의 등식이 증명된다. ■

또한 $n \in \mathbb{N}$에 대하여

$$(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$$

라 하면, 제 2종 스털링 수 $S(n, k)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)(x)_k$$

이 등식은 $S(n, k)$의 점화식을 이용한 수학적 귀납법을 통해서 증명이 가능하고, Claim의 등식을 변형한 증명도 가능하다. (본문에서 자세한 증명은 생략한다.) ■

Ⅲ. RG Function

함수 $f : [n] \to [k]$는 수열 $f(1)f(2)\cdots f(n)$으로 나타낼 수 있다. 예를 들어, $n=4$, $k=3$이고 $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=1$, $f(4)=1$이면 $f=2311$과 같이 나타낸다. 함수 $f=w_1w_2\cdots w_n$이 다음 조건을 만족할 때, 함수 f를 RG 함수(Restricted Growth Function)이라 한다.

(i) $w_1 = 1$

(ii) $w_i \le \max\{w_1+1, w_2+1, \cdots, w_{i-1}+1\}$ $(2 \le i \le n)$

즉, $f = w_1 w_2 \cdots w_n$이 RG 함수이면 i번째 수 w_i는 그 앞에 있는 수들보다 많아야 1만큼 크다. 예를 들어, $n=4$, $k=3$이면 1223은 RG 함수이지만 1243은 RG 함수가 아니다.

<정의 1>

n이 자연수일 때, 두 함수 Γ_n, Π_n을 다음과 같이 정의하자.

$\Gamma_n := \{f \mid f : [n] \to [n] \text{ is a RG function}\}$

$\Pi_n := \{X \mid X \text{ is a partition of } [n]\}$

<정의 2>

$f = w_1 w_2 \cdots w_n$이 Γ_n의 원소일 때,

$$S_i := f^{-1}(i) = \{j \in [n] \mid w_j = i\} \ne \varnothing$$

이라 하고 함수 $\Phi : \Gamma_n \to \Pi_n$을 $\Phi(f) = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$로 정의하자.

<정의 3>

X가 Π_n의 원소일 때, X의 블록을 아래 조건을 만족하도록 번호를 붙여

$$X = \{S_1, S_2, \cdots\}$$

로 나타내자.

(i) $1 \in S_1$

(ii) $\min\{i \mid i \in [n] - S_1\} \in S_2$

(iii) $\min\{i \mid i \in [n] - S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{j-1}\} \in S_j$ $(3 \le j \in \mathbb{N})$

각 i $(1 \le i \le n)$에 대하여 $i \in S_j$이면 $v_i = j$라 하고, 함수 $\Psi : \Pi_n \to \Gamma_n$을

$$\Psi(X) = v_1 v_2 \cdots v_n$$

으로 정의하자.

위에서 정의한 집합 Γ_n, Π_n과 함수 Φ, Ψ에 대하여 Ψ는 Φ의 역함수이고, Φ는 집합 Γ_n에서 Π_n으로 가는 일대일대응 함수이다. 따라서 모든 RG 함수 $f:[n]\to[n]$의 개수는 벨 수 $B(n)$과 같다.

Ⅳ. 참고문헌

[1] 박종안, *이산수학(6판)*

[2] Statistics How To, *Stirling Numbers of the Second Kind*, 2017. 10. 22.
https://www.statisticshowto.com/stirling-numbers-second-kind/

[3] Wikipedia, *Stirling numbers of the second kind*, 2021. 12. 22.
https://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_numbers_of_the_second_kind

[4] Campbell, L. R., Dahlberg, S., Dorward, R., Gerhard, J., Grubb, T., Purcell, C., & Sagan, B. E. (2018). Restricted growth function patterns and statistics. Advances in Applied Mathematics, 100, 1-42.
https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0196885818300599

[5] Wolfram MathWorld, *Stirling Number of the Second Kind*
https://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.html