제 2 교시

수학 영역

theme1. 주기함수와 단조함수의 교점

1. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1 \ \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)$$

이다. 자연수 n에 대하여 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

theme1. 자작 문제 [출제] 유수진

2. 두 곡선 $y=|\log_n x|$와 $y=\sin\pi x$가 만나는 교점의 x좌표 중 가장 작은 값을 a_n, 가장 큰 값을 b_n이라 하자. 두 곡선 $y=|\log_n x|$와 $y=\sin\pi x$의 교점의 개수를 $g(n)$이라고 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $2<a_2+b_2<\frac{5}{2}$

ㄴ. $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$

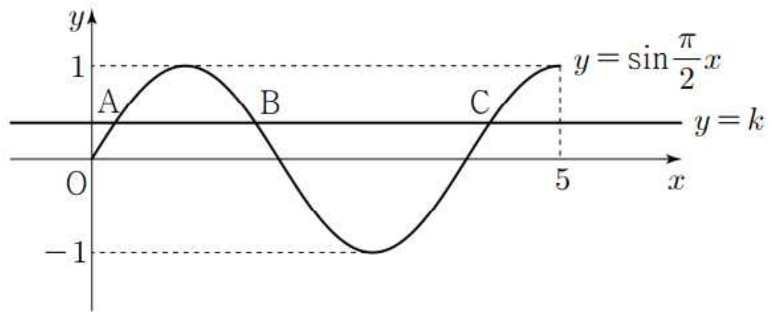
ㄷ. $\sum_{k=2}^{10} g(k)=100$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

theme2. 삼각함수의 대칭성과 주기

3. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x\,(0 \le x \le 5)$가 직선 $y=k\,(0<k<1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\frac{5}{4}$　② $\frac{11}{8}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{13}{8}$　⑤ $\frac{7}{4}$



2022.07. 인천교육청 10번 [수학 I]

theme2. 사관학교 기출 [출제] 유수진

4. $0 \le x < 8$일 때, 방정식 $\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{3}{4}$의 모든 해의 합을 구하시오. [3점]

theme2. 자작 문제 [출제] 유수진

5. 자연수 n에 대하여, $0 \le x \le n$일 때, 방정식 $\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{1}{3}$의 모든 해의 합이 90이 되도록 하는 모든 n값의 합을 구하시오. [3점]

theme2. 수열의 귀납적 정의

6. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은 [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

2023.06 평가원 15번 [수학 I]

theme2. 자작 문제 [출제] 유수진

7. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{2k} a_n & (a_n < 1) \\ \dfrac{a_n}{2^k} & (a_n \ge 1) \end{cases}$$

이다. $a_1 = 2^{-24}$일 때, $a_m = 1$인 자연수 m이 존재하도록 하는 24 이하의 자연수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

theme1. 다항 함수의 그래프 추론 (p.s. 다항함수의 미분가능성)

8. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)\,dt & (x \ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2023.06 평가원 공통 14번 [수학II]

theme1. 자작 문제 [출제] 나동하

9. 양수 a에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수

$$g(x)=\begin{cases} -\int_a^x f(t)dt & (x<a) \\ \int_a^x f(t)dt & (x \ge a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=3a$에서 극값을 가진다.
(나) 방정식 $|f(x)|=16$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f'(a)=0$
ㄴ. $\int_a^{4a} |f(x)|\,dx=27$
ㄷ. 방정식 $f(x)=-9(x-a)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

theme2. 정적분으로 정의된 함수의 극대, 극소

10. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

2022.06 평가원 공통 20번 [수학Ⅱ]

theme2. 자작 문제 [출제] 박진우

11. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+2}|f(t)|dt$는 $x=2$에서 극댓값 p를 갖는다. $f(5)=9$일 때, p의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.) [4점]

theme1. 확률의 대칭성

12. 각 면에 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 2가 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 6번 던질 때, $n(1 \le n \le 6)$번째 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자.

$a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 + a_6$일 때, $a_1 = a_4 = 1$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2022.07.인천교육청 30번 [확률과 통계]

theme1. 자작 문제 [출제] 이강록, 박재형

13. 주사위를 네 번 던져 나온 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(c, 0)$, $\mathrm{C}(0, d)$가 다음 조건을 만족시킬 확률을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(가) $\angle \mathrm{OBA} > \frac{\pi}{2}$

(나) $\angle \mathrm{OCA} < \frac{\pi}{2}$

(단, O는 원점, p, q는 서로소인 자연수) [4점]

theme2. 함수의 개수와 케이스 분류

14. 집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(f(1))=4$
(나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$

2023.06.평가원 29번 [확률과 통계]

15.

필기 노트

$y=\frac{x}{x^2+c}$

$y=\frac{1}{x^2+c}$

$y=x^2e^x$

$y=\frac{\ln x}{x}$

$y=x\ln x$

$y=(\ln x)^2$

$f(x)=x^2$, $g(x)=x(x-1)(x+1)$

$g(f(x))$

$f(x)=x^2$, $g(x)=e^x$

$g(f(x))$

$f(x)=|x(x-1)(x+1)|$, $g(x)=\ln x$

$g(f(x))$

$f(x)=\sin x$, $g(x)=x(x-1)(x+1)$

$g(f(x))$

theme1. 합성함수의 그래프 추론
자작 문제

[출제] 이강록

16. 최고차항의 계수가 $-\frac{1}{2}$이고 극댓값이 0인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $|g(x)|$가

$$|g(x)|=-\int_{\alpha}^{f(x)}(t^2+2t)e^{t+2}dt$$

이다. 이때, 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.
(나) 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근의 개수는 3이다.
(다) 방정식 $g'(x)=0$의 실근의 개수는 5이다.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 최댓값과 최솟값을 가질 때, 두 값의 차로 가능한 모든 값 중 가장 큰 값을 M이라 하자.
$\alpha\times f(3\sqrt{2})+M$의 값을 구하시오. (단, α는 상수) [4점]

theme2. 초월함수의 그래프 추론
자작 문제

17. 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}-c$와 실수 t에 대하여, 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라고 하자. 이때 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고, 함수 $\|f(x)\|$는 $x=2$에서 극대이다.
(나) $\lim\limits_{t\to c+}g(t)-\lim\limits_{t\to c-}g(t)=-5$

$f(5)=pe^{-5}-qe^{r}$일 때, $p+q+r$의 값을 구하시오.
(단, p, q, r는 유리수) [4점]

theme2. 자작 문제 [출제] 이강록

18. 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}x^2+ax+b\right)e^{x-3}$과 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=0$
(나) 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖고, 극댓값은 갖지 않는다.

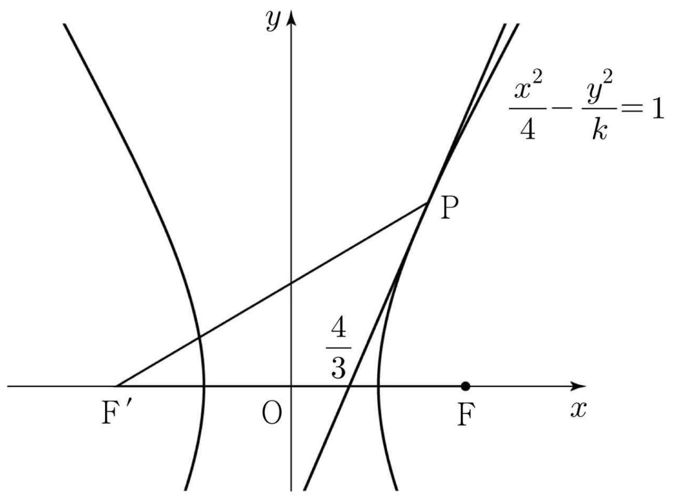
$f(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{15}{2}$

theme1. 이차곡선과 그 접선의 지엽적 성질

19. 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 $\frac{4}{3}$이다. $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13



2023.07 교육청 기하 26번 [기하]

theme1. 자작 문제 [출제] 이강록

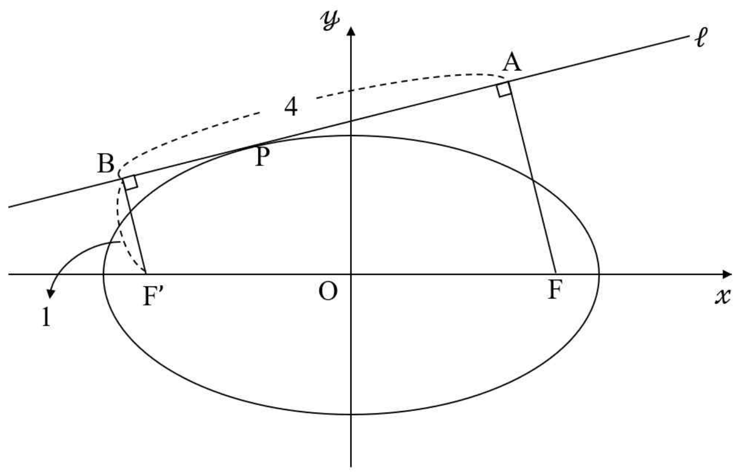
20. 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 위의 제 1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 1이다. $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$의 값은? [3점]

theme1. 자작 문제 [출제] 이강록

21. 그림과 같이 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 2사분면 위의 한점 P에서의 접선 l이 있다. 두 초점 F, F′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{F'B}}=1$이고, 점 F′에서 직선 FA위로의 수선의 발이 선분 $\overline{\mathrm{FA}}$를 수직이등분 할 때, ab의 값은?

(단, a, b, c는 상수) [4점]

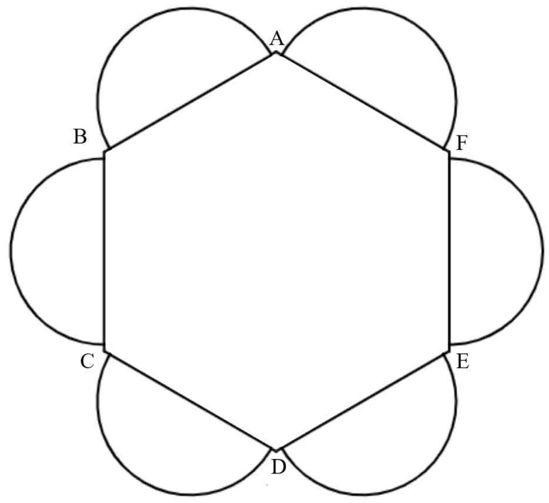
① $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$



theme2. 정사영과 이면각 자작 문제 [출제] 유동혁

22. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF와 정육각형의 각 변의 중점을 중심으로 하고 지름의 길이가 $\sqrt{14}$인 반원이 6개 존재한다. 이때, 각 반원이 이웃한 반원과 접하도록 정육각형 ABCDEF의 각 변을 접는 선으로 하여 접었을 때의 접점을 각각 A′, B′, C′, D′, E′, F′이라 하자. 평면 ABCDEF와 평면 A′BC′이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 할 때, $\cos^2\theta=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수) [4점]



theme3. 벡터 내적의 최댓값, 최솟값
자작 문제

[출제] 유동혁

23. $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=7$인 삼각형 ABC가 있다. 이때, $\angle\mathrm{AXC}=\frac{\pi}{3}$을 만족시키는 점 X의 자취 위에 존재하는 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 최댓값이 $p+\frac{q}{r}\sqrt{3}$일 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 썸튜브 구독 버튼을 홀수 번 눌렀는지 확인하시오.

미적분 추가 기출 문제
theme. 함수의 특징점

24. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a\,(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

2021.09 평가원

25. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \le 2) \\ \ln(x-2) & (x>2) \end{cases}$이다.
실수 t에 대하여 직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개일 때, k의 값은? [4점]

① -2　② $-\dfrac{9}{4}$　③ $-\dfrac{5}{2}$　④ $-\dfrac{11}{4}$　⑤ -3

2018.06 평가원 (답:4번)

26. 실수 m에 대하여 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은? [4점]

① -3　② $-\frac{3}{4}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{15}{4}$　⑤ 6

2012.11 수능

27. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)= f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y = g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y = g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k 값의 범위는 $-1 < k < 0$이다.

$g(-2) \times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

2014.11 수능

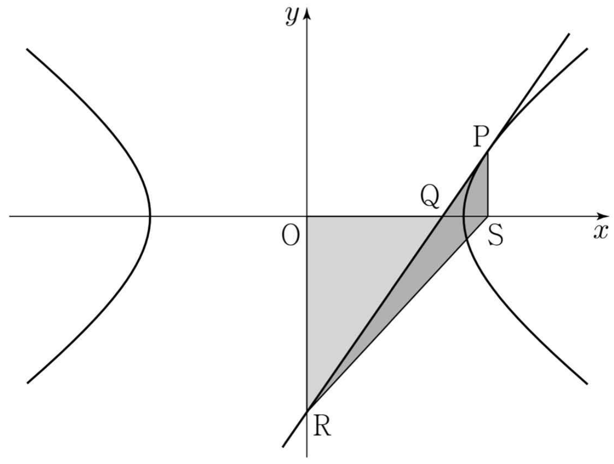
기하 추가 기출 문제
theme. 이차곡선과 그 접선의 성질

28. 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}\left(\frac{9}{4}, 0\right)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c > 0)$을 초점으로 하는 타원과 포물선 $y^2 = 9x$가 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PF}} = \frac{25}{4}$이고 포물선 $y^2 = 9x$ 위의 점 P에서의 접선이 점 F′을 지날 때, 타원의 단축의 길이는? [4점]

① 13 ② $\frac{27}{2}$ ③ 14 ④ $\frac{29}{2}$ ⑤ 15

2022.04 교육청

29. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4, k)$ $(k > 0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 $\mathrm{S}(4, 0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1 : A_2 = 9 : 4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]



① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

2022.06 평가원

1번	②	2번	②	3번	③	4번	12	5번	57
6번	②	7번	60	8번	④	9번	⑤	10번	13
11번	4	12번	133	13번	169	14번	115	15번	×
16번	264	17번	25	18번	②	19번	④	20번	60
21번	③	22번	166	23번	93	24번	12	25번	④
26번	④	27번	72	28번	⑤	29번	③		

제 2 교시

수학 영역

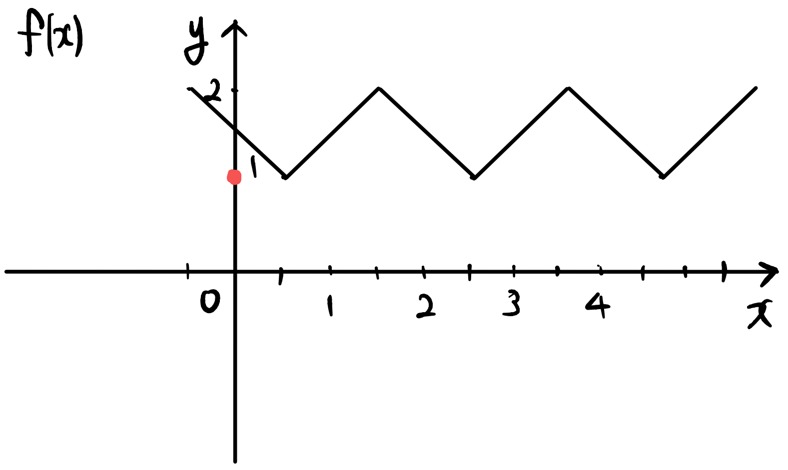
theme1. 주기함수와 단조함수의 교점

1. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1 \quad \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)$$

이다. 자연수 n에 대하여 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15



Point. 반드시 지나는 점!

$y=2^{\frac{x}{n}}$는 반드시 (0.1)과 (n.2)를 지난다.

n=1일 때 → (0.1)과 (1.2) 있기 교점 1개
n=2일 때 → (0.1)과 (2.2) 있기 교점 3개
n=3일 때 → (0.1)과 (3.2) 있기 교점 3개 pattern!
n=4일 때 → (0.1)과 (4.2) 있기 교점 5개
n=5일 때 → (0.1)과 (5.2) 있기 교점 5개

답: 4+5=9

theme1. 자작 문제 [출제] 유수진

2. 두 곡선 $y=|\log_n x|$와 $y=\sin\pi x$가 만나는 교점의 x좌표 중 가장 작은 값을 a_n, 가장 큰 값을 b_n이라 하자. 두 곡선 $y=|\log_n x|$와 $y=\sin\pi x$의 교점의 개수를 $g(n)$이라고 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

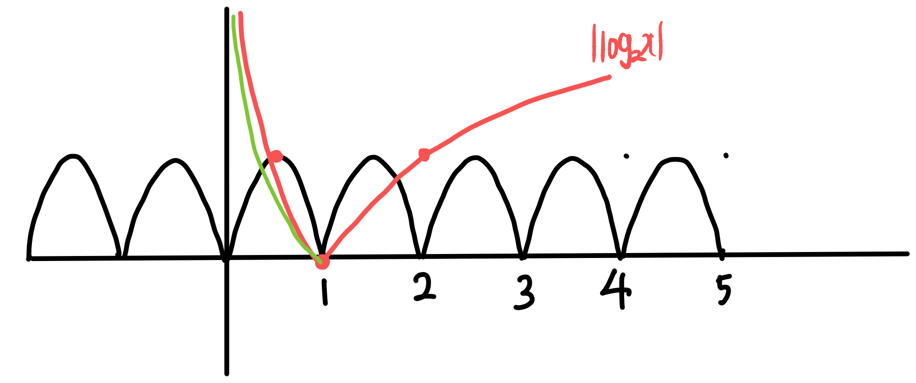
ㄱ. $2<a_2+b_2<\frac{5}{2}$

ㄴ. $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$

ㄷ. $\sum_{k=2}^{10} g(k)=100$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $|\log_n x|$는 반드시 (1.0) (n.1) 지난다.



$a_2=\frac{1}{2}$ (그래프 위 특수한 점)

$\frac{3}{2}<b_2<2$

ㄴ. n이 커질수록 $-\log_n x$는 y축에 가까워진다.

a_n, a_{n+1} 모두 양수 $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$

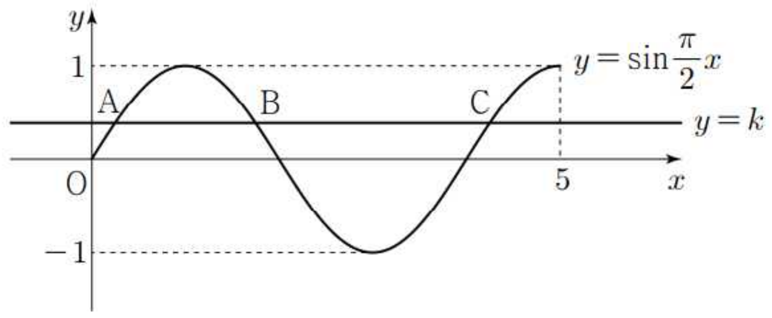
~~ㄷ~~. ($-\log_n x$와 f(x)가 만나는 1보다 작은 근) + (1.0) + ($\log_n x$와 f(x)가 만나는 근)
∈ 1개 ∈ 1개 ∈ n이 1커질 때마다 2씩 증가

$g(K)=2K-1$ $\sum_{K=2}^{10} 2K-1=99$

theme2. 삼각함수의 대칭성과 주기

3. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x\,(0 \le x \le 5)$가 직선 $y=k\,(0<k<1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



2022.07. 인천교육청 10번 [수학 I]

주기 : 4

A+B=2

B+C=6

$A+B+C=\frac{25}{4}$

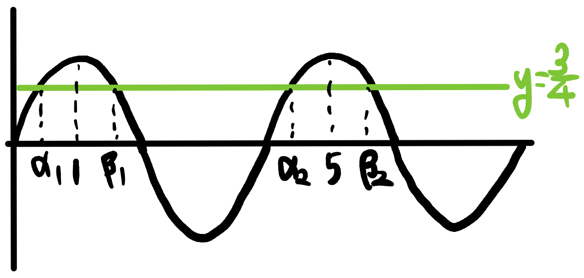
$A=\frac{1}{4}$ $B=\frac{7}{4}$

$B-A=\frac{3}{2}$

theme2. 사관학교 기출

[출제] 유수진

4. $0 \le x < 8$일 때, 방정식 $\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{3}{4}$의 모든 해의 합을 구하시오. [3점]



$\alpha_1+\beta_1=2$

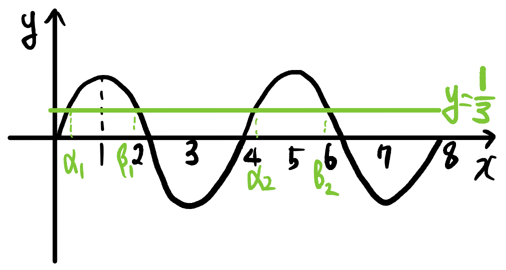
$\alpha_2+\beta_2=10$

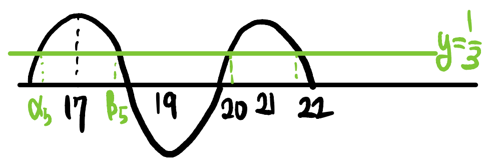
답 : 12

theme2. 자작 문제

[출제] 유수진

5. 자연수 n에 대하여, $0 \le x \le n$일 때, 방정식 $\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{1}{3}$의 모든 해의 합이 90이 되도록 하는 모든 n값의 합을 구하시오. [3점]





주기 : 4

$\alpha_1+\beta_1=2$

$\alpha_2+\beta_2=10$

$\alpha_k+\beta_k$ 공차 8인 등차수열

26 34

$\alpha_3+\beta_3=18$

$\sum_{k=1}^{★} 8k-6=90$ ★=5

가능한 n : 18, 19, 20

(21이면 α_6가 들어감)

theme2. 수열의 귀납적 정의

6. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은 [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

2023.06 평가원 15번 [수학 I]

1) ☆ point. 새로운 수열 직접 해보면서 규칙 찾기

$a_2 = \dfrac{1}{k+1} > 0$

$a_3 = \boxed{\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}} < 0$

$a_4 = \dfrac{2}{k+1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{\boxed{k-1}}{k(k+1)}$

K=1 $a_4=0$ (a_1, a_2, a_3)형태 반복

$n=3m+1$ (m은 0이상의 정수) 일때, $a_n=0$

$m=7$일 때, $n=22$이므로 이 때, $a_{22}=0$

∴ $k=1$ 가능

K≠1 $a_4>0$

$a_5 = 2\left(\boxed{\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}}\right) < 0$

$a_6 = \dfrac{3}{k+1} - \dfrac{2}{k} = \dfrac{\boxed{k-2}}{k(k+1)}$

K=2 $a_6=0$ $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$형태 반복

$n=5m+1$ (m은 0이상의 정수) 일 때 $a_n=0$

$5m+1=22$를 만족하는 m 존재X

∴ $k=2$ 불가능

K≠2 $a_6>0$

$a_7 = 3\left(\boxed{\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}}\right) < 0$

$a_8 = \dfrac{4}{k+1} - \dfrac{3}{k} = \dfrac{\boxed{k-3}}{k(k+1)}$

K=3 $a_8=0$ $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_7)$형태 반복

$n=7m+1$ (m은 0이상의 정수)일때 $a_n=0$

$m=3$일때, $7m+1=22$ 이 때 $a_{22}=0$

∴ $k=3$ 가능

$k=1$ $a_{3m+1}=0$

$k=2$ $a_{5m+1}=0$

$k=3$ $a_{7m+1}=0$

⋮

$a_{☆m+1}=0$

① ☆ $= 2k+1$ (k는 자연수) → ☆ ≥ 3

② ☆$m+1 = 22$

☆$m = 21$

m은 0이상의 정수이므로

☆은 21의 양의 약수

∴ 가능한 ☆ (3, 7, 21)

→ 가능한 k (1, 3, 10)

theme2. 자작 문제 [출제] 유수진

7. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{2k} a_n & (a_n < 1) \\ \dfrac{a_n}{2^k} & (a_n \ge 1) \end{cases}$$

이다. $a_1 = 2^{-24}$일 때, $a_m = 1$인 자연수 m이 존재하도록 하는 24 이하의 자연수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

풀이1)

① 2^{-24}에서 증가하다가 $a_m=1$

$2^{-24} \times (2^{2k})^{m-1} = 1$

$-24 + 2k(m-1) = 0$

$k(m-1) = 12$

∴ k는 12의약수, 1, 2, 3, 4, 6, 12

② 2^{-24}에서 증가 후 감소할 때 $a_m=1$

i) $2^{-24} \times 2^{2k} \ge 1$ 인 경우 : $k \ge 12$인경우

$2^{-24} \times 2^{2k} \div 2^k = 2^{k-24} = 1$

∴ $k=24$ (2^k으로 더 나누면 반드시 1보다작음)

ii) $2^{-24} \times (2^{2k})^2 \ge 1$인 경우 : $6 \le k < 12$ 인 경우

$2^{-24} \times (2^{2k})^2 \div 2^k = 2^{3k-24} = 1$

∴ $k=8$ (2^k로 더 나누면 i)과 동일해짐)

iii) $2^{-24} \times (2^{2k})^3 \ge 1$인 경우 : $4 \le k < 6$인경우

$2^{-24} \times (2^{2k})^3 \div 2^k = 2^{5k-24} = 1$

이를 만족하는 자연수 k 없음

iv) 그 이후에는 범위 내에 자연수 k 없음

∴ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

답: 60

풀이2) a_m은 a_1에 2^{2k}를 α번, 2^{-k}를 β번 곱한 것이다.

(단, $\alpha+\beta=m-1$)

$a_m = 2^{-24} \times (2^{2k})^{\alpha} \times (2^{-k})^{\beta}$

$= 2^{-24+2\alpha k-\beta k} = 1$

$2\alpha k - \beta k - 24 = 0$

$k(2\alpha-\beta) = 24$

↳ k는 24의 약수

theme1. 다항 함수의 그래프 추론
(p.s. 다항함수의 미분가능성)

8. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

↳ $g(x)$는 미분가능!

$$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)\,dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

$* \; g(0)=0$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f(0)=0$
~~ㄴ~~. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다. (∵ ①)
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2023.06 평가원 공통 14번 [수학II]

ㄱ. $g(x)$가 다항함수 ⇒ $g'(x)$도 연속

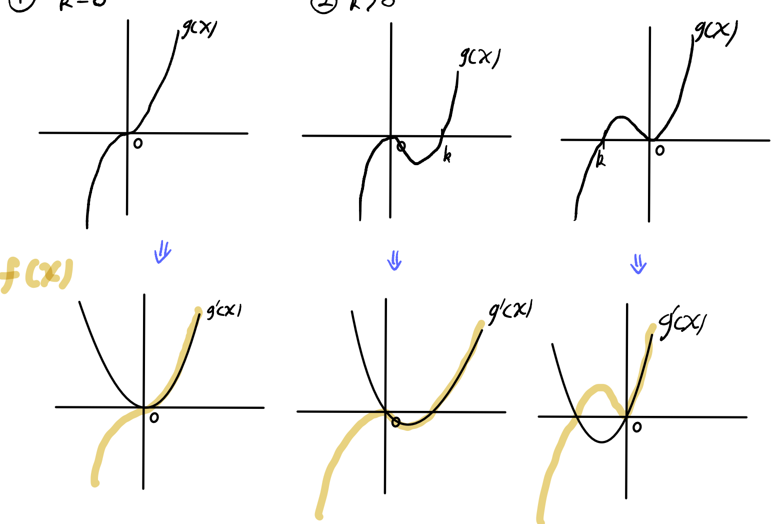
⇒ $\lim_{x\to 0^-} g'(x) = g'(0) = \lim_{x\to 0^+} g'(x)$

$g'(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$ ⇒ $-f(0)=f(0)$ ∴ $f(0)=0$

ㄴ. $g(0)=g'(0)$ x^3-kx^2, $3x^2-2kx$

⇒ $g(x)=x^2(x-k)$

① $k=0$ ② $k>0$ ③ $k<0$



ㄷ. $g'(x)=3x^2-2kx$

∴ $f(x)=\begin{cases} -3x^2+2kx & (x<0) \\ 3x^2-2kx & (x\geq 0) \end{cases}$, $f(1)=3-2k$ ⇒ $2<3-2k<4$ ⇒ $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

$h(x)=f(x)-x=\begin{cases} -3x^2+(2k-1)x & (x<0) \\ 3x^2-(2k+1)x & (x\geq 0) \end{cases}$

$h(x)=0$ 의 근: $x=\underbrace{\frac{2k-1}{3}}_{<0}$, 0, $\underbrace{\frac{2k+1}{3}}_{>0}$ 총 3개 (∵ $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$)

theme1. 자작 문제 [출제] 나동하

9. 양수 a에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 사차함수

$$g(x)=\begin{cases} -\int_a^x f(t)dt & (x<a) \\ \int_a^x f(t)dt & (x\geq a) \end{cases}$$

$g'(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<a) \\ f(x) & (x\geq a) \end{cases}$

가 다음 조건을 만족시킨다.

⇒ $g(a)=g'(a)=0$ $(f(a)=0)$

(가) 함수 $f(x)$는 $x=3a$에서 극값을 가진다.
(나) 방정식 $|f(x)|=16$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

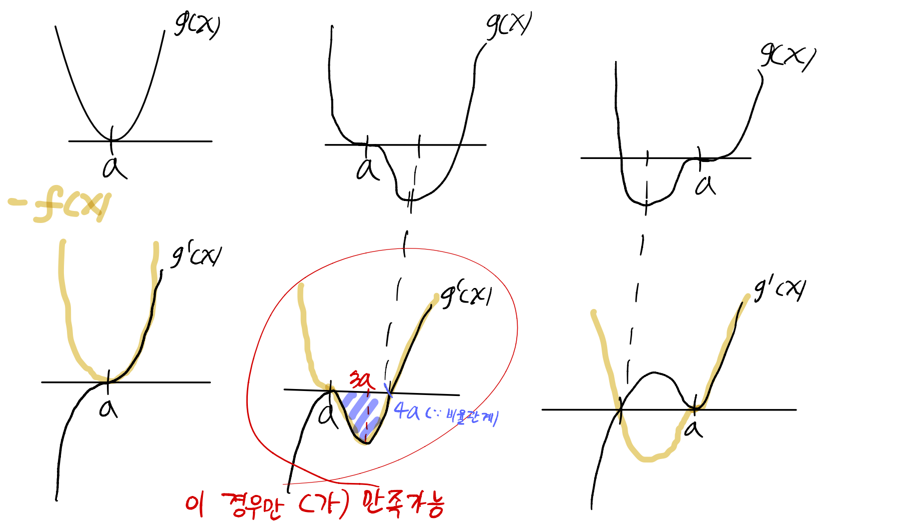
ㄱ. $f'(a)=0$
ㄴ. $\int_a^{4a}|f(x)|\,dx=27$
ㄷ. 방정식 $f(x)=-9(x-a)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(x)$가 미분가능!, $g(x)$가 사차함수!

⇒ $g''(x)=\begin{cases} -f'(x) & (x<a) \\ f'(x) & (x\geq a) \end{cases}$, $f'(a)=-f'(a)$ ∴ $f'(a)=g''(a)=0$

ㄴ.



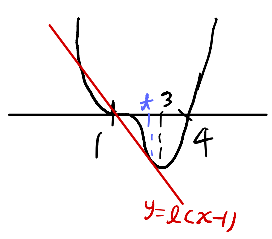
이 경우만 (가) 만족가능

⇒ $g'(x)=4(x-a)^2(x-4a)$, $g'(3a)=-16$ (∵ (나) 조건)

∴ $a=1$

$\int_a^{4a}|f(x)|dx=\int_1^4 -g'(x)dx=$ 색칠된 넓이 $=\frac{|-4|\times(4-1)^4}{12}=27$

ㄷ.



실근 개수 3개 ⇒ 접선

⇒ $\frac{f(t)}{t-1}=f'(t)$

∴ $\frac{4(t-1)^2(t-4)}{(t-1)}=8(t-1)(t-4)+4(t-1)^2$

∴ $4t-16=12t-36$

∴ $t=\frac{5}{2}$, $f'(\frac{5}{2})=-9$

⇒ $l=-9$

theme2. 정적분으로 정의된 함수의 극대, 극소

10. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

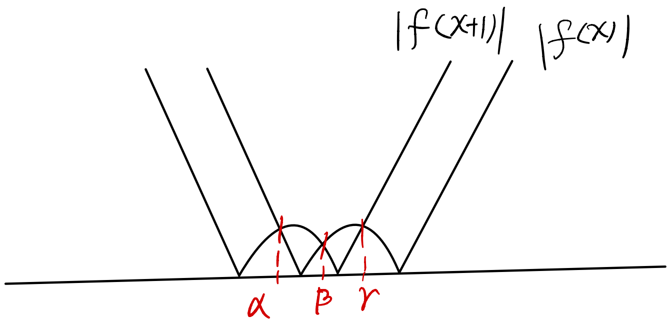
2022.06 평가원 공통 20번 [수학Ⅱ]

$*$ $F'(x)=|f(x)|$

$\Rightarrow g(x)=F(x+1)-F(x)$

$g'(x)=F'(x+1)-F'(x)$

$=|f(x+1)|-|f(x)|$



$g'(\alpha)=g'(\beta)=g'(\gamma)=0$

$\Rightarrow$ $g'(x)$의 부호 변화 조사

$\Rightarrow$ α, γ 에서 극소, β 에서 극대

$\therefore \alpha=1, \gamma=4$

$\Rightarrow |f(2)|-|f(1)|=|f(5)|-|f(4)|=0$

$\Rightarrow -f(2)-f(1)=f(5)+f(4)=0$

$f(x)=2x^2+ax+b$ 라 하고 연립

$\Rightarrow b=13 \quad \therefore f(0)=13$

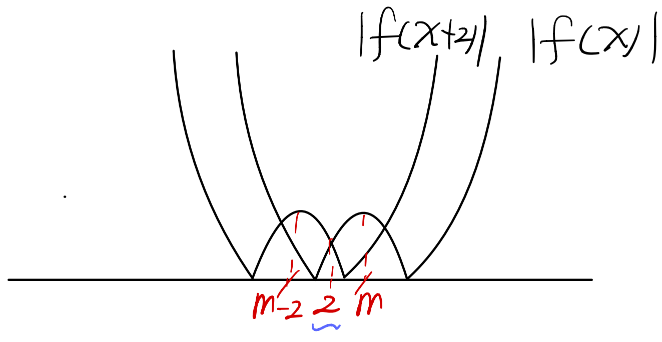
theme2. 자작 문제 [출제] 박진우

11. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+2}|f(t)|dt$는 $x=2$에서 극댓값 p를 갖는다. $f(5)=9$일 때, p의 값을 구하시오. (단, p는 상수이다.) [4점]

$g'(x)=|f(x+2)|-|f(x)|$

$f(x)=3(x-m)^2+n$ 라 하고 $g(x)$ 부호변화 관찰!

$\Rightarrow$

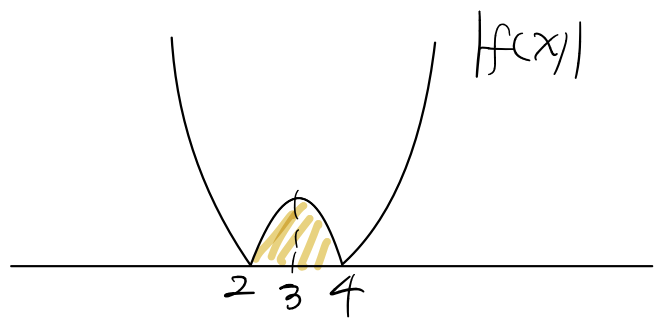


$=\frac{m+m-2}{2}$ ($\because$ 대칭성)

$\therefore m=3$

$\therefore f(x)=3(x-3)^2-3$

$\Rightarrow$



$*$ $g(2)=\int_{2}^{4}|f(x)|dx=$ 색칠된 넓이

$=\frac{3\times(4-2)^3}{6}$ (넓이공식!)

$=4$

1이 나올 확률 : $\frac{1}{3}$

2가 나올 확률 : $\frac{2}{3}$

theme1. 확률의 대칭성

12. 각 면에 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 2가 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 6번 던질 때, $n(1 \le n \le 6)$번째 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자.

독립시행

'때'에서 끊자!

$a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 + a_6$일 때 $a_1 = a_4 = 1$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다.

$\frac{P(☆\&□)}{P(☆)}$

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2022.07.인천교육청 30번 [확률과 통계]

$*$ ($a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 + a_6$일 확률)

$= \frac{1}{2} \times (1 - (a_1+a_2+a_3 = a_4+a_5+a_6$일 확률$))$

↳ 이유: 독립시행이므로

$a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 + a_6$이든

$a_1 + a_2 + a_3 < a_4 + a_5 + a_6$이든

확률이 똑같다.

① $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$일 확률 *어차피 합이 같으면 숫자 구성이 똑같다!

$a_1 + a_2 + a_3$만 생각했을 때

1이 3개 $\sim \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot {}_3C_3 = \frac{1}{3^3}$

1이 2개 $\sim \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot {}_3C_2 = \frac{6}{3^3}$

1이 1개 $\sim \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot {}_3C_1 = \frac{12}{3^3}$

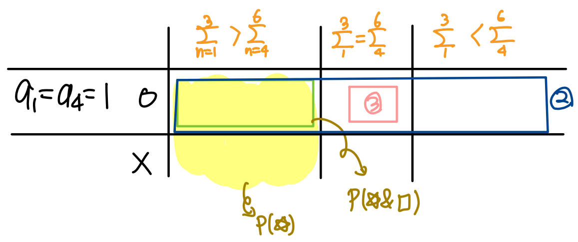
1이 0개 $\sim \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot {}_3C_0 = \frac{8}{3^3}$

$a_4 + a_5 + a_6$만 생각했을 때에도 똑같은 숫자가 나온다.

↳ 제곱해서 더하자!

$\to \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 + \left(\frac{6}{3^3}\right)^2 + \left(\frac{12}{3^3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3^3}\right)^2$

$= \frac{1+36+144+64}{3^6} = \frac{245}{3^6}$ $\to P(☆) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{245}{3^6}\right)$



② $a_1 = a_4 = 1$일 확률 $\to \frac{1}{9}$

③ $a_1 = a_4 = 1$이고 $\sum_{n=1}^{3} = \sum_{n=4}^{6}$일 확률

$\to \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2\right) = \frac{33}{3^6}$

$a_1 = a_4 = 1$

$a_2 + a_3 = a_5 + a_6$

1이 2개 $\to \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot {}_2C_2 = \frac{1}{9}$

1이 1개 $\to \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot {}_2C_1 = \frac{4}{9}$

1이 0개 $\to \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot {}_2C_0 = \frac{4}{9}$

$P(☆\&□) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - \frac{33}{3^6}\right)$

$\frac{P(☆\&□)}{P(☆)} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{33}{3^6}}{1 - \frac{245}{3^6}} = \frac{3^4 - 33}{3^6 - 245} = \frac{48}{484} = \frac{12}{121}$

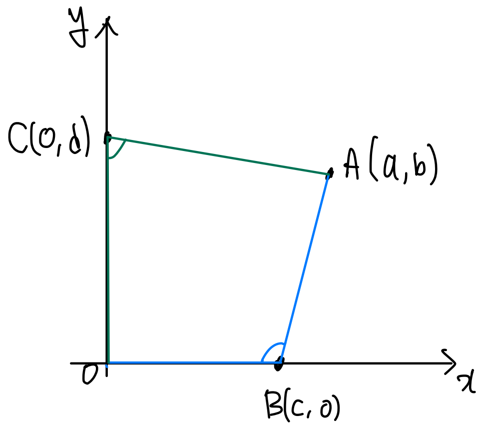
$\boxed{133}$

theme1. 자작 문제 [출제] 이강록, 박재형

13. 주사위를 네 번 던져 나온 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(c, 0)$, $\mathrm{C}(0, d)$가 다음 조건을 만족시킬 확률을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(가) $\angle \mathrm{OBA} > \frac{\pi}{2}$ $\sim$ $a > c$
(나) $\angle \mathrm{OCA} < \frac{\pi}{2}$ $\sim$ $d > b$

(단, O는 원점, p, q는 서로소인 자연수) [4점]



① $a > c$일 확률

↳ $\frac{1}{2} \times (1 - (a = c$일 확률$))$

$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12}$

② $d > b$일 확률

↳ $\frac{5}{12}$

∴ $a > c$이면서 $d > b$일 확률은

$\frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$

$\boxed{169}$

theme2. 합수의 개수와 케이스 분류

14. 집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(f(1))=4$ → $f(1)\neq 1$, $f(1)=a$, $f(a)=4$
(나) $f(1)\leq f(3)\leq f(5)$

2023.06.평가원 29번 [확률과 통계]

(i) $a=2$일 때

$f(1)=2\underbrace{\leq}_{p} f(3)\underbrace{\leq}_{q} f(5)\underbrace{\leq}_{r} 5$, $f(2)=4$ → 음이 아닌 정수

$p+q+r=3$

↳ ${}_3H_3$가지

$\underbrace{{}_5C_1}_{f(4)\text{의 값을 결정하는 경우의 수}}\times{}_3H_3=5\times 10=50$ (가지)

(ii) $a=3$일 때

$f(1)=3\leq f(3)\leq f(5)\leq 5$

$f(3)=4$

→ $f(5)=4$ or $f(5)=5$

↳ 2가지

$\underbrace{({}_5C_1)^2}_{f(2),f(4)\text{의 값을 결정하는 경우의 수}}\times 2=50$ (가지)

(iii) $a=4$일 때

$f(1)=4$, $f(4)=4$,

$f(1)=4\underbrace{\leq}_{p} f(3)\underbrace{\leq}_{q} f(5)\underbrace{\leq}_{r} 5$

$p+q+r=1$

↳ ${}_3H_1$ 가지

$\underbrace{{}_5C_1}_{f(2)\text{의 값을 결정하는 경우의 수}}\times{}_3H_1=15$ (가지)

(iv) $a=5$일 때

$f(1)=5$, $f(5)=4$

$f(1)\leq f(3)\leq f(5)$가 성립하지 않음!

→ 0가지

$\boxed{115}$

$50+50+15+0=115$

필기 노트

$y=\frac{x}{x^2+c}$

$y=\frac{1}{x^2+c}$

$y=x^2e^x$

$y=\frac{\ln x}{x}$

$y=x\ln x$

$y=(\ln x)^2$

$f(x)=x^2,\ g(x)=x(x-1)(x+1)$

$g(f(x))$

$f(x)=x^2,\ g(x)=e^x$

$g(f(x))$

$f(x)=|x(x-1)(x+1)|,\ g(x)=\ln x$

$g(f(x))$

$f(x)=\sin x,\ g(x)=x(x-1)(x+1)$

$g(f(x))$

theme1. 합성함수의 그래프 추론 자작 문제

[출제] 이강록

16. 최고차항의 계수가 $-\frac{1}{2}$이고 극댓값이 0인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $|g(x)|$가

$$|g(x)|=-\int_{\alpha}^{f(x)}(t^2+2t)e^{t+2}dt$$

$-\{(x^2e^{x+2})\circ f(x)-\alpha^2e^{\alpha+2}\}$

이다. 이때, 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다. 우함수
(나) 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근의 개수는 3이다.
(다) 방정식 $g'(x)=0$의 실근의 개수는 5이다.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 최댓값과 최솟값을 가질 때, 두 값의 차로 가능한 모든 값 중 가장 큰 값을 M이라 하자. $\alpha\times f(3\sqrt{2})+M$의 값을 구하시오. (단, α는 상수) [4점]

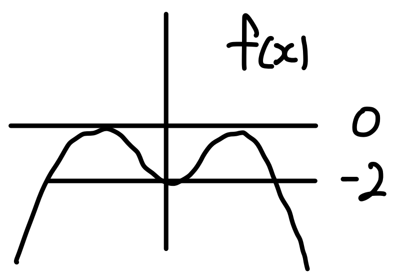
먼저, 주어진 함수 $|g(x)|$에서 $h(x)=(t^2+2t)e^{t+2}$라 하면.

(다) 조건 $g'(x)=0 \rightsquigarrow -h(f(x))=0$ 실근 5개..?

$\Rightarrow$ 즉, $f(x)=0$ or -2 실근 5개.

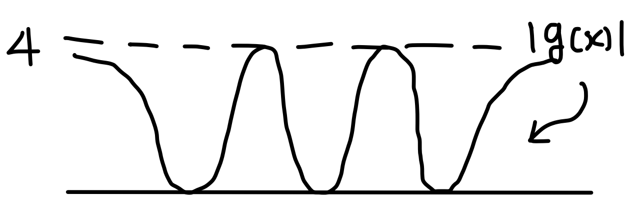
$f(x)=-\frac{1}{2}(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})^2$

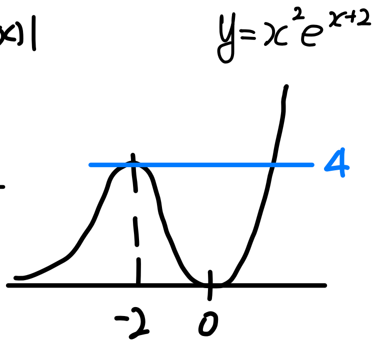
$f(3\sqrt{2})=-\frac{1}{2}\times 32\times 8=-128$



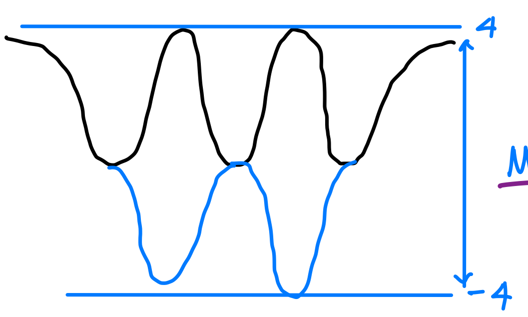
(나) 조건 $f(x)=\alpha$의 실근 3개 $\rightsquigarrow$ $\alpha=-2$ 임

즉, $|g(x)|=-\int_{\alpha}^{f(x)}(t^2+2t)e^{t+2}$ 의 그래프 개형은.





$g(x)$로 가능한 개형 중: M의 최댓값.



$M=8$

$\therefore 264$

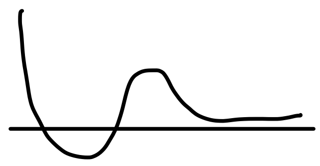
theme2. 초월함수의 그래프 추론 자작 문제

17. 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}-c$와 실수 t에 대하여, 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라고 하자. 이때 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고, 함수 $\lvert f(x)\rvert$는 $x=2$에서 극대이다.
(나) $\lim\limits_{t\to c+}g(t)-\lim\limits_{t\to c-}g(t)=-5$

$f(5)=pe^{-5}-qe^{r}$일 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. (단, p, q, r는 유리수) [4점]

일반적인 (이차)x(지수) 함수의 개형



(가) 조건. $|f(x)|$가 극대?

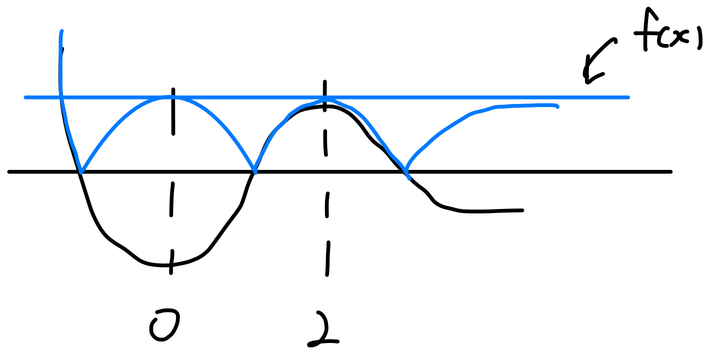
① $f(x)$가 극대이면서 (+)

or

② $f(x)$가 극소이면서 (−)

(가)조건에 의해 ②의 경우는 불가.

즉, $f(x)$는 $x=2$에서 극대.



위의 경우에 (나) 조건 성립, $\rightsquigarrow$ $-f(0)=f(2)=c$, $f'(0)=0$, $f'(2)=0$.

$\Rightarrow f(x)=x^2e^{-x}-2e^{-2}$

$\therefore f(5)=25e^{-5}-2e^{-2}$

$p+q+r=25$

theme2. 자작 문제 [출제] 이강록

18. 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}x^2+ax+b\right)e^{x-3}$과 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=0$
(나) 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖고, 극댓값은 갖지 않는다.

$f(3)$의 값은? [4점]

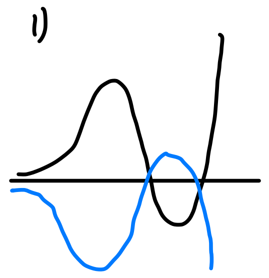
① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{15}{2}$

(가) 조건 $g(x)=\pm f(x)$ ⇝ 구간별로 정의.

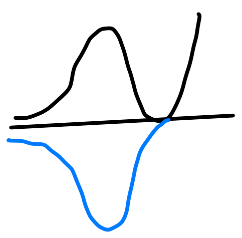
(이차)×(지수) 그래프 개형

— → $f(x)$
— → $-f(x)$

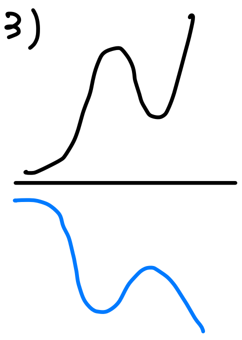
1)



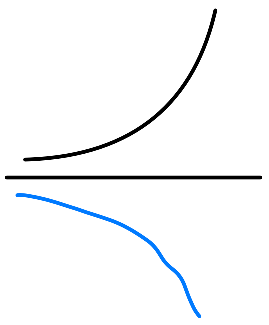
2)



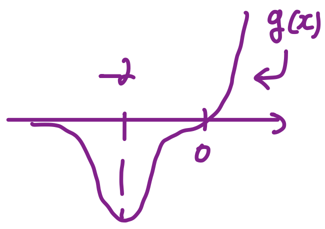
3)



4)



2) 번의 경우만, $g(x)$ 극대 존재 X.



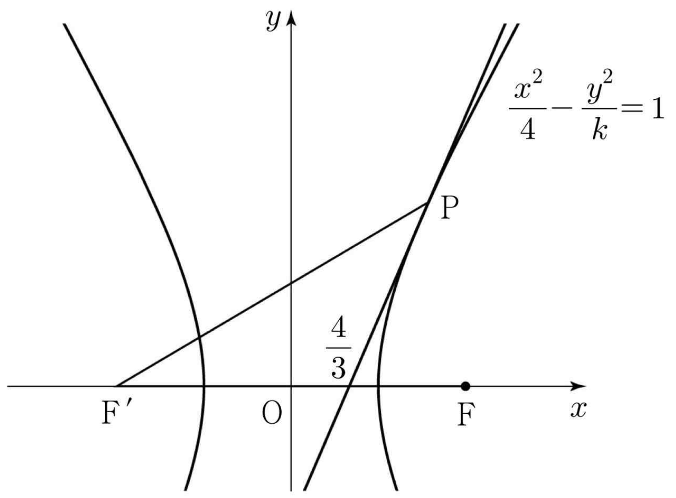
⇝ $f(x)=\frac{1}{3}x^2e^{x-3}$

$f(3)=3$ //

theme1. 이차곡선과 그 접선의 지엽적 성질

19. 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 $\frac{4}{3}$이다. $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



2023.07 교육청 기하 26번 [기하]

걍 풀기) $\frac{x_1 x}{4}-\frac{y_1 y}{k}=1$ 의 x절편 $\frac{4}{3}$.

$\therefore x_1 = 3, \quad \frac{y_1^2}{k}=\frac{5}{4}$

$PF' = FF' = 2c$

$(PF')^2 = (2c)^2$

$= (3+c)^2 + y_1^2$

$3c^2 - 6c - 9 = y_1^2 = \frac{5}{4}k$

$\frac{5}{4}k = \frac{5}{4}(c^2-4)$

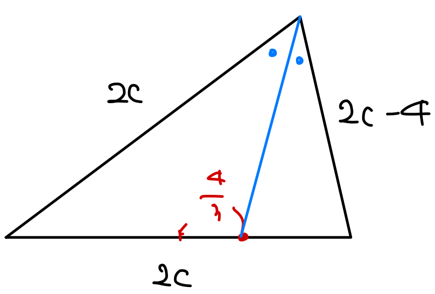
$\frac{7}{4}c^2 - 6c - 4 = 0$

$7c^2 - 24c - 16 = 0$

$(7c+4)(c-4)=0$

$c=4$. $k = c^2-4 = 12$

쌍곡선 반사성질)



$2c : 2c-4$

$= c+\frac{4}{3} : c-\frac{4}{3}$

$= c : c-2$

$c^2 - \frac{4}{3}c = c^2 - \frac{2}{3}c - \frac{8}{3}$

$\therefore c=4, \quad k = c^2-4$

$=12$

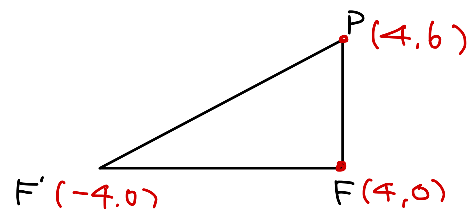
theme1. 자작 문제 [출제] 이강록

20. 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 위의 제 1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 1이다. $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$의 값은? [3점]

$P(x_1, y_1)$

$\frac{x_1 x}{4}-\frac{y_1 y}{12}=1$ 의 x절편 1.

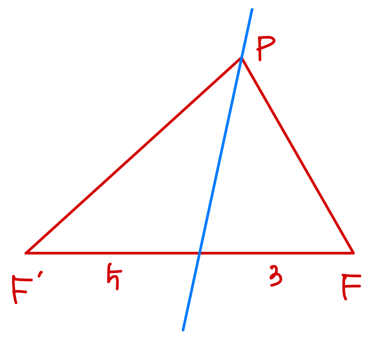
$\therefore x_1 = 4, \quad c=4$



$PF \cdot PF' = 6 \cdot 10 = 60$

반사성질

$c^2 = 4+12, \quad c=4$



$PF' : PF = 5:3$

$3PF' = 5PF$

$PF' = PF+4$

$3(PF+4) = 5PF$

$PF=6, \quad PF'=10$

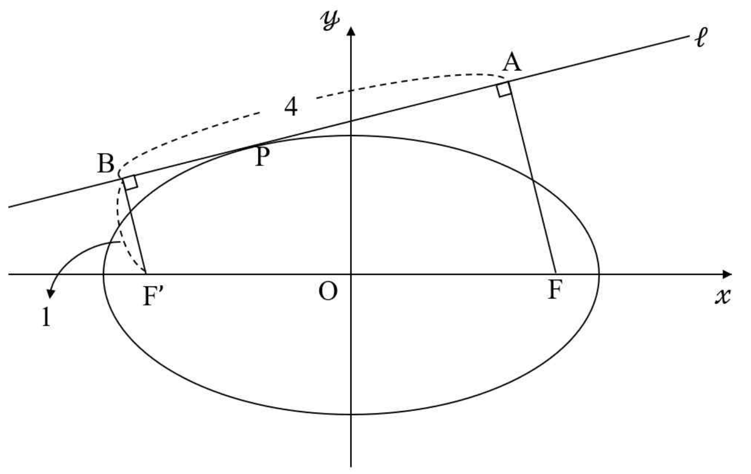
$\therefore 60$

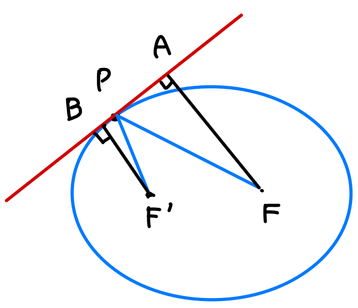
theme1. 자작 문제 [출제] 이강록

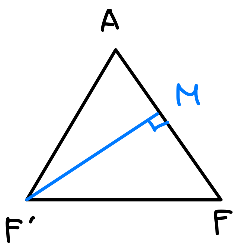
21. 그림과 같이 초점이 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 2사분면 위의 한점 P에서의 접선 l이 있다. 두 초점 F, F′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{F'B}}=1$이고, 점 F′에서 직선 FA위로의 수선의 발이 선분 $\overline{\mathrm{FA}}$를 수직이등분 할 때, ab의 값은?

(단, a, b, c는 상수) [4점]

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$







AB = 4 = MF′ (ABF′M은 "직사각형")

AM = MF = F′B = 1

$FF' = \sqrt{17}$, $c = \frac{\sqrt{17}}{2}$

타원의 반사성질.

$\triangle APF \sim \triangle BPF'$ (AA닮음)

AF : BF′ = 2 : 1 (닮음비)

P는 AB의 2 : 1 내분점. $AP = \frac{8}{3}$, $BP = \frac{4}{3}$

$\therefore PF = \frac{10}{3}$ $PF' = \frac{5}{3}$

$PF + PF' = 5 = 2a$.

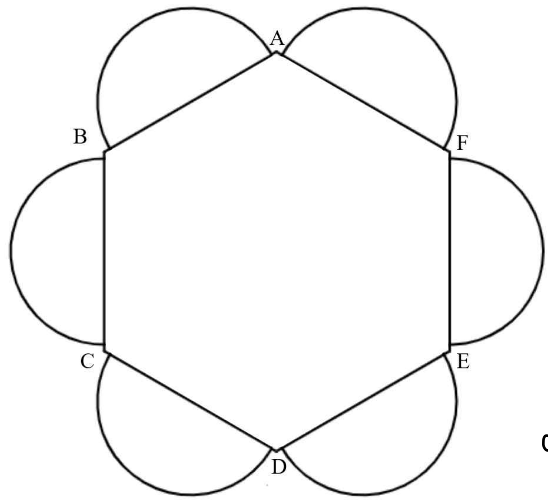
$a = \frac{5}{2}$. $b = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$

$ab = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

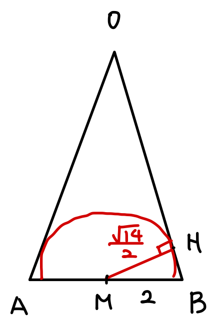
theme2. 정사영과 이면각 자작 문제 [출제] 유동혁

22. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF와 정육각형의 각 변의 중점을 중심으로 하고 지름의 길이가 $\sqrt{14}$인 반원이 6개 존재한다. 이때, 각 반원이 이웃한 반원과 접하도록 정육각형 ABCDEF의 각 변을 접는 선으로 하여 접었을 때의 접점을 각각 A′, B′, C′, D′, E′, F′이라 하자. 평면 ABCDEF와 평면 A′BC′이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때, $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수) [4점]



$\cos\theta = \frac{\triangle A''BC''}{\triangle A'BC'}$



$HB = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

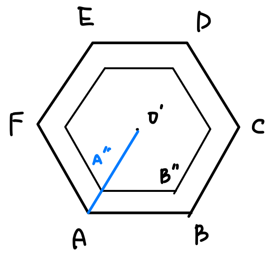
$OH \cdot HB = MH^2$

$OH = \frac{14}{4} \times \sqrt{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$.

$OB = 4\sqrt{2}$. H는 OB의 7 : 1 내분점.

즉. $OA'' : AA'' = 7:1$ 이므로,

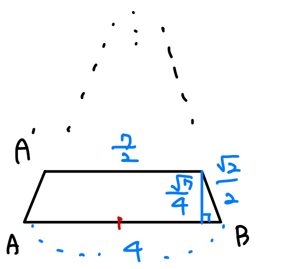
$OA'' = \frac{7}{2}$.



① $\triangle A''BC'' = \frac{1}{2} A''C'' \cdot \left(\frac{1}{2}OB' + BB''\right)$

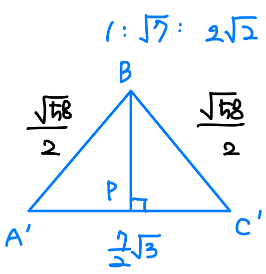
$= \frac{1}{2} A''C'' \cdot \frac{9}{4}$

② $\triangle A'BC'$



$A'B = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{232}{16}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$



$\therefore BP = \sqrt{\frac{58}{4} - \frac{147}{16}}$ 232 147

$= \frac{\sqrt{85}}{4}$

$\triangle A'BC' = \frac{1}{2} \cdot A'C' \cdot \frac{\sqrt{85}}{4}$

$\therefore \cos\theta = \frac{9/4}{\sqrt{85}/4} = \frac{9}{\sqrt{85}}$

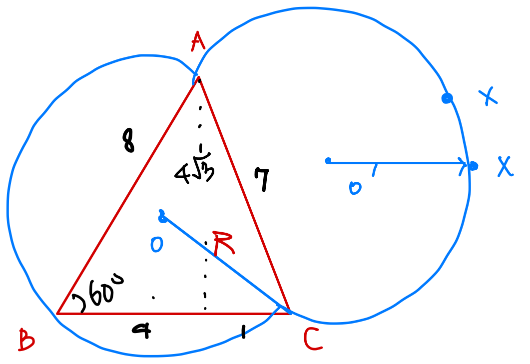
$\cos^2\theta = \frac{81}{85}$

$p+q = 166$

theme3. 벡터 내적의 최댓값, 최솟값 자작 문제

[출제] 유동혁

23. $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=5$, $\overline{AC}=7$인 삼각형 ABC가 있다. 이때, $\angle AXC=\frac{\pi}{3}$을 만족시키는 점 X의 자취 위에 존재하는 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은? [4점]



$\angle AXC=\frac{\pi}{3}$ 이므로, 자취는 다음과 같다.

Rewind) 원주각.

$2R\sin 60^\circ = 7$. $R=\frac{7}{\sqrt{3}}$

따라서, $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'Q}$ 로.

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}$가 최대이려면, $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{O'Q}=R\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{5}\right)$

$|\overrightarrow{OO'}|=R$.

$$\therefore \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'Q})\cdot\overrightarrow{BC}$$
$$\le \overrightarrow{OO'}\cdot\overrightarrow{BC}+2\cdot R\frac{\overrightarrow{BC}}{5}\cdot\overrightarrow{BC}$$
$$=\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot 5\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}+2\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}\ 5$$
$$=20+\frac{70}{\sqrt{3}}$$

※ 확인 사항

○ 썸튜브 구독 버튼을 홀수 번 눌렀는지 확인하시오.

미적분 추가 기출 문제

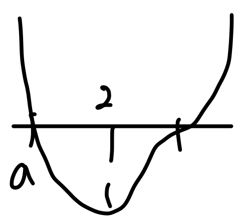
theme. 함수의 특징점

24. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [4점] 3중근 idea.

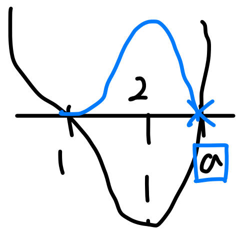
(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a\,(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

2021.09 평가원

★ 4차함수, ⊕ 절댓값 ⟶ 미분 불가능 점 1개..?



or



삼중근 개형 생각함.

a>2 모순됨

⟶ 사차함수의 비율관계.

$f(x) = \underline{k}(x-1)^3(x-\frac{n}{3}) + \underline{f(1)}$ ⟹ 구하는 값이 $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$ 인데.. 의미없다.

→ $f(x) = (x-1)^3(x-\frac{n}{3})$ 로 설정함

$f'(x) = 3(x-1)^2(x-\frac{n}{3}) + (x-1)^3$

$$\frac{f'(5)}{f'(3)} = \frac{3\times16\times\frac{8}{3}+64}{3\times4\times\frac{2}{3}+8} = \frac{16\times12}{16} = 12$$

25. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \le 2) \\ \ln(x-2) & (x>2) \end{cases}$이다.

실수 t에 대하여 직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개일 때, k의 값은? [4점]

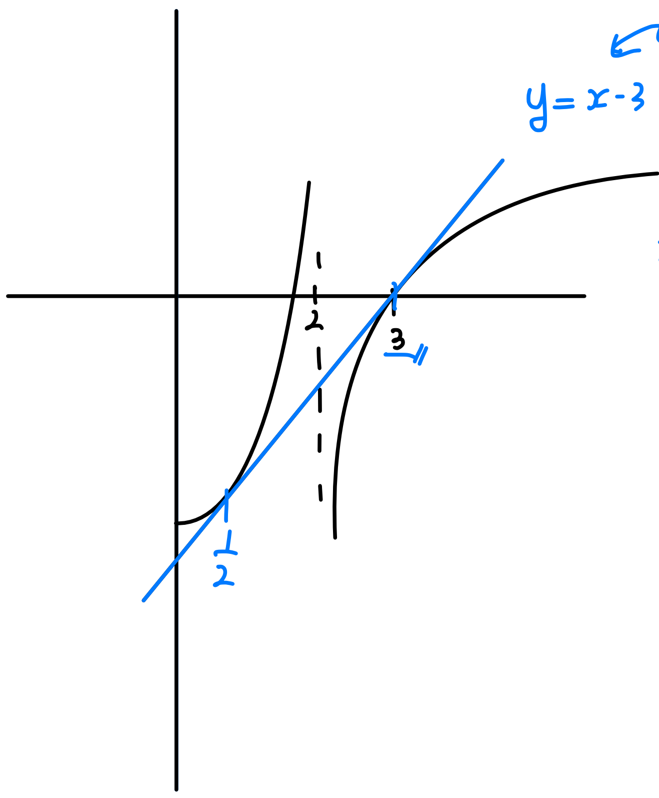
↳ 기울기 1인 공통접선..?

공통접선에 대한 idea.

① -2 ② $-\frac{9}{4}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{11}{4}$ ⑤ -3

2018.06 평가원 (

$f'(x)=\begin{cases} 2x & (x<2) \to x=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x-2} & (x>2) \to x=3 \end{cases}$



$y=x-3$

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}+k)$

$\frac{1}{4}+k=-\frac{5}{2}$

$k=-\frac{11}{4}$

26. 실수 m에 대하여 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은? [4점]

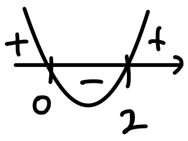
변곡점에 대한 idea.

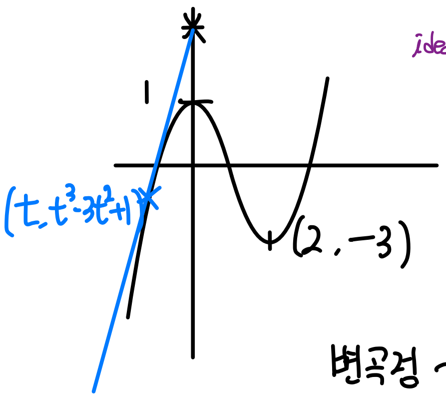
① -3 ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 6

2012.11 수능

$y=x^3-3x^2+1$

$y'=3x^2-6x \rightsquigarrow 3x(x-2)$





idea) 삼차함수의 변곡접선이 (0,2)를 지나면 f(m)은 최소한 m>0 까지는 1개일테니 최댓값 a는 이때 존재하지 않을까...?

변곡점 $\rightsquigarrow (1, -1)$

기울기 $\rightsquigarrow -3$

$\rightsquigarrow y=-3x+2$ $(0, 2)$ 지남.

(평균 변화율) = (순간 변화율)

$$\frac{t^3-3t^2-1}{t} = 3t^2-6t$$

$$t^3-3t^2-1 = 3t^3-6t^2$$

$\Rightarrow t=-\frac{1}{2}$ or 1

$\hookrightarrow$ 기울기 $\frac{15}{4}$

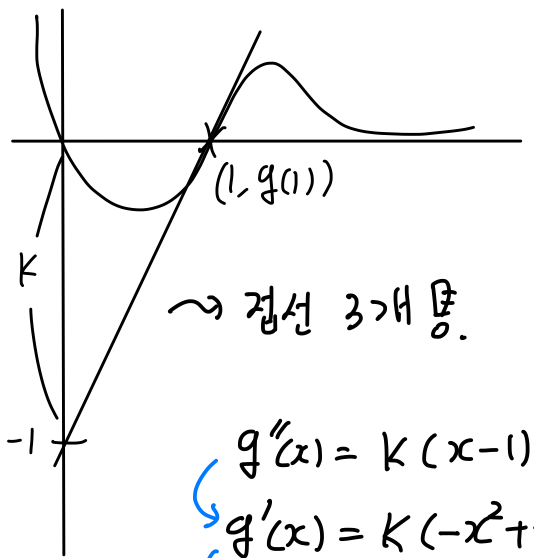
27. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
> (나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

2014.11 수능

변곡점에 대한 idea.



$\rightsquigarrow$ 접선 3개 됨.

$g''(x) = k(x-1)(x-4)e^{-x}$

$g'(x) = k(-x^2+3x-1)e^{-x}$

$g(x) = k(x^2-x)e^{-x}$

$g(1)=0,\ g'(1)=\frac{k}{e}$

변곡점 $(1, 0)$에서의 접선

$\rightsquigarrow y=\frac{k}{e}(x-1)$ $(0, -1)$ 지남.

$-\frac{k}{e}=-1$, $k=e$

$g(-2)=6e^3$, $g(4)=12e^{-3}$

72

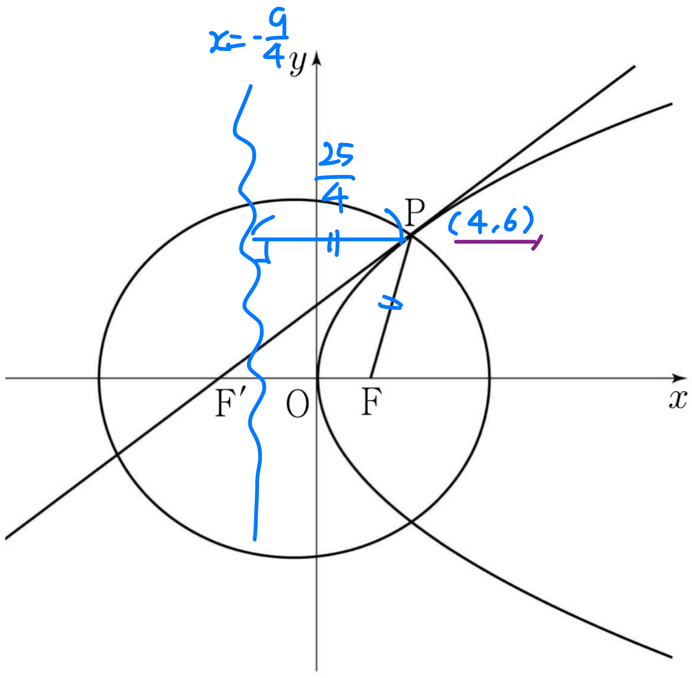
기하 추가 기출 문제

theme. 이차곡선과 그 접선의 성질

28. 좌표평면에서 두 점 $F\left(\frac{9}{4}, 0\right)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원과 포물선 $y^2=9x$가 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{PF}=\frac{25}{4}$이고 포물선 $y^2=9x$ 위의 점 P에서의 접선이 점 F′을 지날 때, 타원의 단축의 길이는? [4점]

① 13　② $\frac{27}{2}$　③ 14　④ $\frac{29}{2}$　⑤ 15

2022.04 교육청



포물선 접선의 성질에 의해 → $F'(-4, 0)$

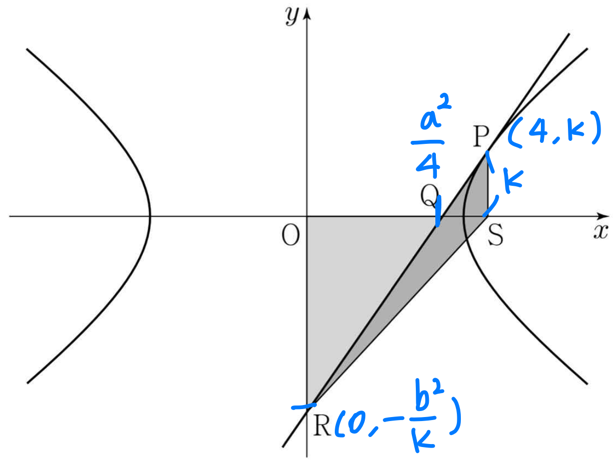
즉, $\overline{F'F}=\frac{25}{4}$, $\overline{PF'}=10$, $\overline{PF}=\frac{25}{4}$

장축 $=\frac{65}{4}$, 단축 $=k$

$\left(\frac{65}{4}\right)^2-\left(\frac{25}{4}\right)^2=k^2$

$k=15$

29. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(4, k)$ $(k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 $S(4, 0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1 : A_2 = 9 : 4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]



① $2\sqrt{10}$　② $2\sqrt{11}$　③ $4\sqrt{3}$　④ $2\sqrt{13}$　⑤ $2\sqrt{14}$

2022.06 평가원

P ~ $\frac{16}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=1$ ①, P에서의 접선

$\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$　$Q\left(\frac{a^2}{4}, 0\right)$　$R\left(0, -\frac{b^2}{k}\right)$

$(\triangle PRS) = 4\times k\times\frac{1}{2}=2k$

$(\triangle QOR) = \frac{a^2}{4}\times\frac{b^2}{k}\times\frac{1}{2}=\frac{a^2b^2}{8k}$

$\rightsquigarrow 2k : \frac{a^2b^2}{8k} = 4 : 9$

$\frac{a^2b^2}{2k}=18k$

$a^2b^2=36k^2$ ②

①, ② 연립, $a^2=12$

$2a=4\sqrt{3}$

P.S. 이 문제에서 확인 가능하듯, 이차곡선과 접선에 대한 지엽적인 성질들을 배웠지만, 그 성질들을 사용하지 않고 단순계산하는 문제들이 훨씬 많다. 이 성질들은 알면 풀이에 있어 매우 유리하나, 이는 절대적이지 않으므로 반드시 일반적인 계산 풀이가 선행되어야 한다.