수학 영역

5지선다형

1. $\left(\sqrt{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$\left(3^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 3$

2. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 - a_2$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$a_5 - a_2 = 3 \cdot 2$

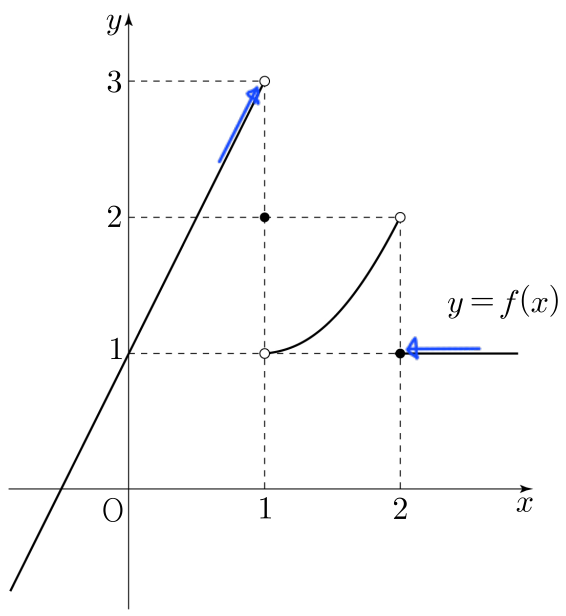
$= 6$

3. 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 1$의 최댓값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$x=0$ 대입 $f(0) = 9+1 = 10$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 1-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3+1=4$

5. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=2x+4$이고 $f(-1)+f(1)=0$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$f(x)=x^2+4x+C$

$f(-1)+f(1)=(-3+C)+(5+C)=0 \Rightarrow \therefore C=-1$

$f(2)=4+8-1$
$=11$

7. 함수 $f(x)=x^3-3x$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

$\frac{52-(-2)}{4-1}=18=f'(k)$

$f'(k)=3k^2-3=18$

$\therefore k=\sqrt{7}$

6. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\sin\left(ax+\frac{\pi}{6}\right)$의 주기가 4π일 때, $f(\pi)$의 값은? [3점]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

주기: $\frac{2\pi}{a}=4\pi$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$f(\pi)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+a}{x-2} & (x<2) \\ -x^2+b & (x\ge 2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x^2+3x+a \sim 10+a=0$ $\therefore a=-10$

$\lim_{x\to 2-}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to 2-}(x+5)=7$

$\lim_{x\to 2+}(-x^2+b)=-4+b=7$ $\therefore b=11$

$\therefore a+b=1$

9. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-3g(x)\}=1,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to\infty}\underbrace{g(x)}_{\infty}\underbrace{\left\{2\cdot\dfrac{f(x)}{g(x)}-3\right\}}_{0}=1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3}{2}$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{4\cdot\frac{f}{g}+1}{3\cdot\frac{f}{g}-1}=\dfrac{6+1}{\frac{9}{2}-1}=2$

10. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=4t-10$$

이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와 점 P의 시각 $t=k(k>1)$에서의 위치가 서로 같을 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

$x(t)=2t^2-10t+C$

$\Rightarrow x(1)=-8+C=x(k)=2k^2-10k+C$

$\Leftrightarrow k^2-5k+4=0$

$\therefore k=4$

11. $0 < x < 2\pi$일 때, 방정식 $2\cos^2 x - \sin(\pi + x) - 2 = 0$의 모든 해의 합은? [4점]

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

$2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 = 0$

$2\sin^2 x - \sin x = 0$

$\sin x = 0$ OR $\frac{1}{2}$

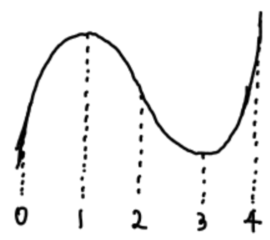
$\therefore x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi \rightsquigarrow 2\pi$

12. 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$의 최댓값이 12일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x-3)(x-1)$



최대 $x=1$ 대입

$f(1) = 1 - 6 + 9 + a = 12$

$\therefore a = 8$

13. 두 양수 a, $b(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를
$f(x)=(x-a)(x-b)$라 하자.

$$\int_0^a f(x)dx=\frac{11}{6},\ \int_0^b f(x)dx=-\frac{8}{3}$$

일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

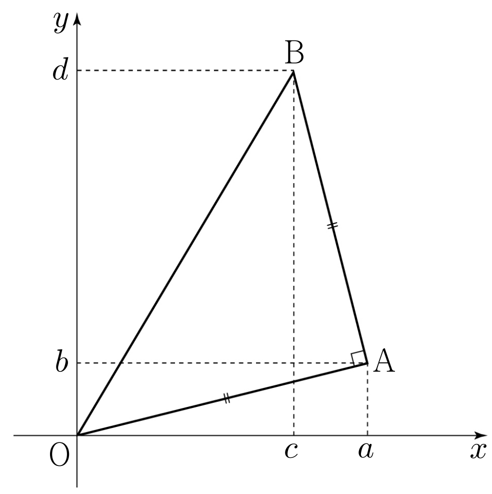
① 4　② $\frac{9}{2}$　③ 5　④ $\frac{11}{2}$　⑤ 6

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx$$
$$= -\frac{8}{3}-\frac{11}{6}$$
$$= -\frac{9}{2}$$

14. 4 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 n 이하의 네 자연수 a, b, c, d가 있다.

○ $a>b$
○ 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,b)$, $\mathrm{B}(c,d)$와 원점 O에 대하여 삼각형 OAB는 $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.

다음은 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=4}^{20} T_n$의 값을 구하는 과정이다.



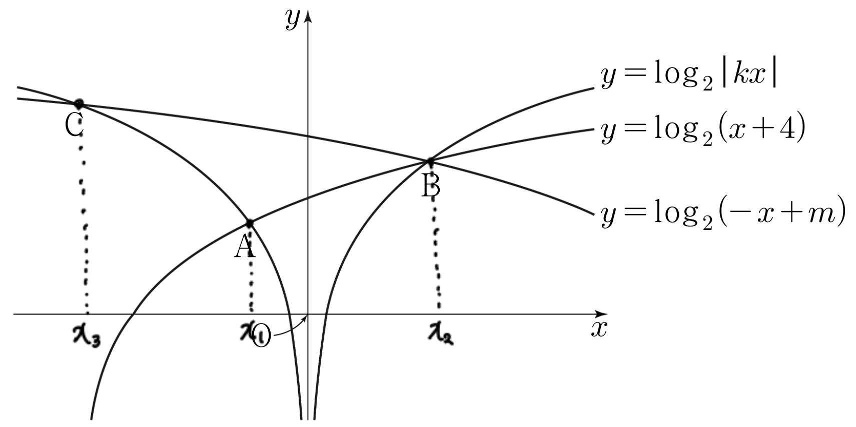
점 $\mathrm{A}(a,b)$에 대하여
점 $\mathrm{B}(c,d)$가 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$를 만족시키려면
$c=a-b$, $d=a+b$이어야 한다.
이때, $a>b$이고 d가 n 이하의 자연수이므로 $b<\frac{n}{2}$이다.
$\frac{n}{2}$ 미만의 자연수 k에 대하여
$b=k$일 때, $a+b\le n$을 만족시키는 자연수 a의 개수는
$n-2k$이다.
2 이상의 자연수 m에 대하여
(i) $n=2m$인 경우 $\Rightarrow$ $b<\frac{n}{2}=m$ 이므로,
　b가 될 수 있는 자연수는 1부터 $\boxed{m-1}$ 까지이므로
　$T_{2m}=\sum_{k=1}^{\boxed{m-1}}(2m-2k)=\boxed{m^2-m}$
(ii) $n=2m+1$인 경우　b 자연수 1부터 m까지
　$T_{2m+1}=\boxed{(다)}$　$T_{2m+1}=\sum_{k=1}^{m}(2m+1-2k)=m^2$
(i), (ii)에 의해 $\sum_{n=4}^{20} T_n = 614$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(5)+g(6)+h(7)$의 값은? [4점]

① 71　② 74　③ 77　④ 80　⑤ 83

$f(5)+g(6)+h(7) = 4+30+49$
$= 83$

15. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$이고, m은 실수이다.) [4점]



〈보 기〉

ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. $x_2^2=x_1x_3$

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ

$\left.\begin{aligned} &\cdot \log_2(x_1+4)=\log_2(-kx_1) \\ &\cdot \log_2(-2x_1+4)=\log_2(-2kx_1)=1+\log_2(-kx_1) \\ &\qquad =\log_2(2x_1+8) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1&=-1 \\ k&=3 \end{aligned}$

ㄴ

$\left.\begin{aligned} x_1&=-\frac{4}{k+1} \\ x_2&=\frac{m}{k+1} \\ x_3&=-\frac{m}{k-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2^2=x_1x_3 \Leftrightarrow m=\frac{4(k+1)}{k-1}$?

대입 $kx_2=x_2+4=-x_2+m$

$m=\frac{4(k+1)}{k-1}$　(참)

ㄷ

$x_2^2=x_1x_3 \Rightarrow x_2=x_1r,\ x_3=x_1r^2$

$\overline{AB}$ 기울기 + $\overline{AC}$ 기울기 = 0

$\frac{\log_2(kx_2)-\log_2(-kx_1)}{x_2-x_1}+\frac{\log_2(-kx_1)-\log_2(-kx_3)}{x_1-x_3}$

$=\frac{\log_2(-r)}{x_1(r-1)}+\frac{\log_2(r^2)}{x_1(r^2-1)}=0$ 에서 $r=-3$, $x_2=-3x_1$, $x_3=9x_1$

ㄴ 에서, $\left.\begin{aligned} x_2=-3x_1 &\Leftrightarrow m=12 \\ x_3=9x_1 &\Leftrightarrow k=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m+k^2=16$

단답형

16. 함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여 $f'(1)=4$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]　②

$f'(x)=2x+a$

$f'(1)=2+a=4 \Rightarrow a=2$

17. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$일 때, $30(\sin\theta+\cos\theta)$의 값을 구하시오. [3점]　40

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+\frac{7}{9}$

$=\frac{16}{9}$

$\Rightarrow \sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$

$\therefore 30(\sin\theta+\cos\theta)=40$

18. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-2x)f(x)$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가질 때, $g'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

8

$f(3)=2,\ f'(3)=0$

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$

$g'(3)=(4)f(3)+(3)f'(3)$

$=8$

19. 첫째항이 $\frac{1}{4}$이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_5=\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}$$

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

16

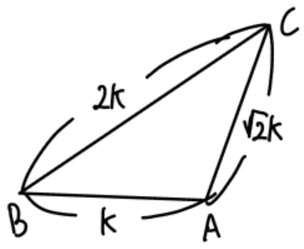
$a_3+a_5=\frac{a_3+a_5}{a_3a_5} \Rightarrow a_3a_5=1$

$\frac{1}{16}r^6=1 \Rightarrow r^3=4$

$\therefore a_{10}=\frac{1}{4}r^9=16$

20. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CA}}=1:2:\sqrt{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π일 때, 선분 CA의 길이를 구하시오. [4점]

7



$\Rightarrow \cos B=\frac{3}{4}$

$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$R=2\sqrt{7} \Rightarrow \overline{AC}=2R\sin B$

$=7$

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n \ge 0) \\ a_n+5 & (a_n < 0) \end{cases}$$

5

을 만족시킨다. $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오. [4점]

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	$\cdots$	a_{15}
(1	-1	4	2	0	-2	3)//	1	-1	$\cdots$	1
(2	0	-2	3	1	-1	4)//	2	0	$\cdots$	2
(3	1	-1	4	2	0	-2)//	3	1	$\cdots$	3
(4	2	0	-2	3	1	-1)//	4	2	$\cdots$	4
☆ $\boxed{5}$	(3	1	-1	4	2	0	-2)//	3	$\cdots$	-2

22. 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=3x+a,\ g(x)=\int_2^x (t+a)f(t)dt$$

라 하자. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

251

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이다.
(나) 곡선 $y=|h(x)|$가 x축에 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이다.

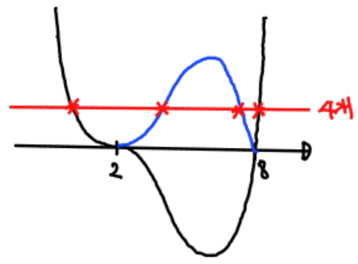
$f(x)=3x+a$, $g(x)=\int_2^x (t+a)(3t+a)dt = (x-2)(x^2+2(a+1)x+(a+2)^2)$

$\Rightarrow h(x)=(3x+a)(x-2)(x^2+2(a+1)x+(a+2)^2)$

i) $3x+a=3(x-2)$, $a=-6$ 일 때,

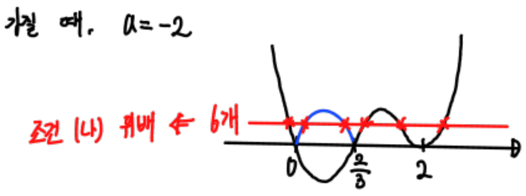
$h(x)=3(x-2)^2(x^2-10x+16)$

$h(-1)=3\cdot 9\cdot 27=729$



ii) $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $(x-2)$를 인수로 가질 때, $a=-2$

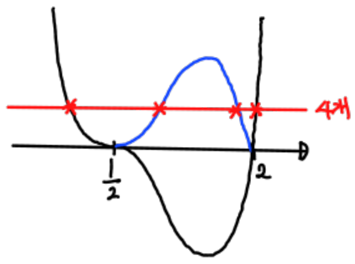
$h(x)=(3x-2)(x-2)^2x$



iii) $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $(3x+a)$를 인수로 가질 때, $a=-\frac{3}{2}$

$h(x)=3(x-\frac{1}{2})^3(x-2)$

$h(-1)=\frac{243}{8}$



iv) $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 중근 $D/4=0$, $a=-\frac{3}{2}$

iii)과 동일

$\therefore h(-1)$ 최소 $=\frac{243}{8}$ $p+q=251$

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_{n}\Pi_{2}=25$일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$n^2=25 \Rightarrow n=5$

24. 다항식 $(x+2a)^5$의 전개식에서 x^3의 계수가 640일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

${}_5C_3 \cdot (2a)^2 = 640 \Rightarrow a=4$

25. 빨간색 볼펜 5자루와 파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 560 ② 570 ③ 580 ④ 590 ⑤ 600

$_4H_5 \cdot {}_4H_2 = 560$

26. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리의 자연수 중에서 다음 조건을 만족시키는 N의 개수는? [3점]

> (가) N은 홀수이다.
> (나) $10000 < N < 30000$

① 720 ② 730 ③ 740 ④ 750 ⑤ 760

1	1	1	1	1
2	2	2	2	3
	3	3	3	5
	4	4	4	
	5	5	5	

$\Rightarrow 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 = 750$

27. 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k}$일 때, $f(n)=1023$을 만족시키는 n의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

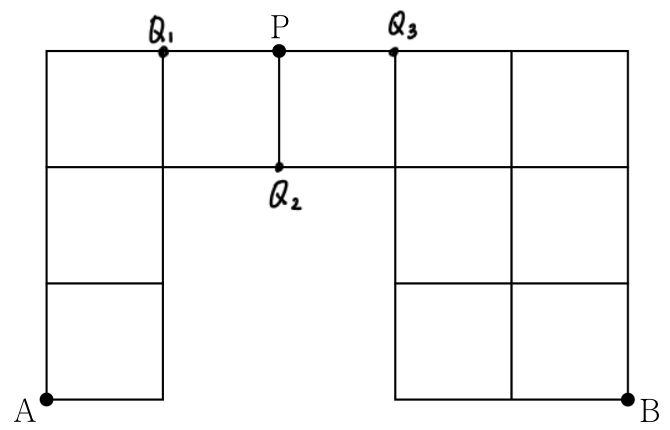
$f(n) = {}_{2n+1}C_2 + {}_{2n+1}C_4 + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n}$

$= 2^{2n} - 1 \quad (\because 2^{2n} = {}_{2n+1}C_0 + {}_{2n+1}C_2 + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n})$

$= 1023$

$\therefore n=5$

28. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우의 수는? [4점]



① 78 ② 82 ③ 86 ④ 90 ⑤ 94

i) $A \to Q_1 \to P \to Q_2 \to B$

$\frac{4!}{3!} \times \frac{4!}{2!2!} = 24$

ii) $A \to Q_1 \to P \to Q_3 \to B$

$\frac{4!}{3!} \times \frac{5!}{2!3!} = 40$

iii) $A \to Q_2 \to P \to Q_3 \to B$

$\frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{2!3!} = 30$

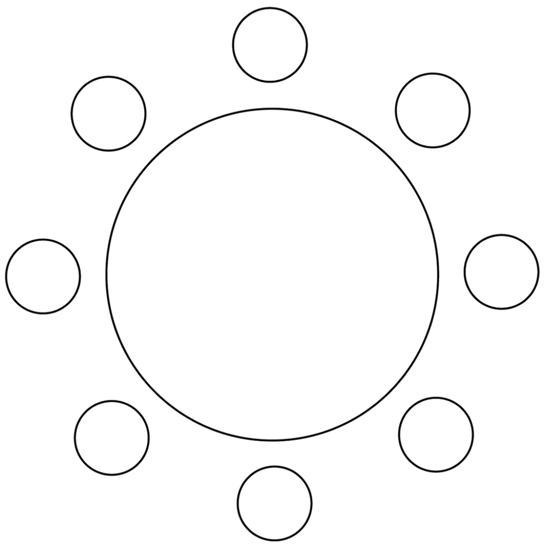
$\therefore 24+40+30 = 94$

단답형

29. 두 남학생 A, B를 포함한 4명의 남학생과 여학생 C를 포함한 4명의 여학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) C는 여학생과 이웃하지 않는다.

288



i) A,B C 남 or 남 C A,B

- A,B 중 하나 선택 ⇒ 2
- 남자 선택 ⇒ 2
- 좌우 배치 ⇒ 2
- 원순열 ⇒ 4!

⇒ $2\times2\times2\times4! = 192$

ii) 남 C 남

- A,B 이웃 ⇒ 2
- 남자 좌우 배치 ⇒ 2
- 원순열 ⇒ 4!

⇒ $2\times2\times4! = 96$

$\therefore\ 192+96 = 288$

30. 다음 조건을 만족시키는 14 이하의 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수를 구하시오. [4점]

206

(가) $x_1+x_2+x_3+x_4=34$
(나) x_1과 x_3은 홀수이고 x_2와 x_4는 짝수이다.

$x_1 = 2x_1'+1$
$x_2 = 2x_2'+1$
$x_3 = 2x_3'+2$
$x_4 = 2x_4'+2$

⇒ $x_1'+x_2'+x_3'+x_4' = 14$

전체 ${}_4H_{14} = {}_{17}C_3 = 680$

i) x_n' 1개가 7 이상인 경우

$x_n' = x_n''+7$

⇒ ${}_4H_7 = {}_{10}C_3 = 120$

(7,7,0,0), (7,0,7,0), (7,0,0,7) 제외

⇒ $4\times117 = 468$

ii) x_n' 2개가 7 이상인 경우

(7,7,0,0), (7,0,7,0), (7,0,0,7)
(0,7,7,0), (0,7,0,7), (0,0,7,7)

⇒ 6가지

$\therefore\ 680-(468+6) = 206$

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{n+1}}{3^n+1}$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{1+\frac{1}{3^n}}=3$

24. 함수 $f(x)=\log_3 6x$에 대하여 $f'(9)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9\ln 3}$ ② $\frac{1}{6\ln 3}$ ③ $\frac{2}{9\ln 3}$ ④ $\frac{5}{18\ln 3}$ ⑤ $\frac{1}{3\ln 3}$

$f'(x)=\frac{1}{x\ln 3} \Rightarrow f'(9)=\frac{1}{9\ln 3}$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)=5$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3na_n}{n^2+4}$의 값은? [3점]

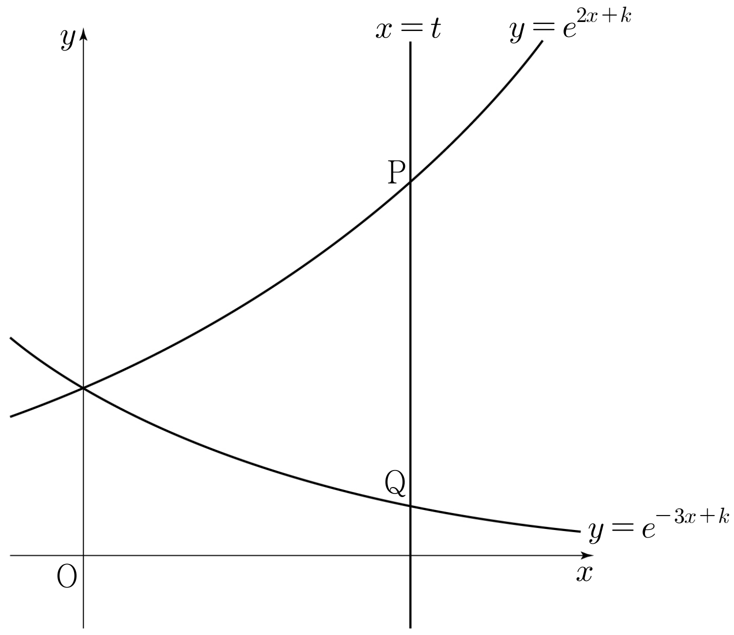
① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\cdot\frac{a_n}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}=\frac{2+3\cdot2}{1+0}=8$

26. 좌표평면에서 양의 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=e^{2x+k}$, $y=e^{-3x+k}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=t$를 만족시키는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$에 대하여 $\lim_{t\to0+}e^{f(t)}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$



$P(t, e^{2t+k})$ $Q(t, e^{-3t+k})$

$\Rightarrow \overline{PQ}=(e^{2t+f(t)})-(e^{-3t+f(t)})=t$

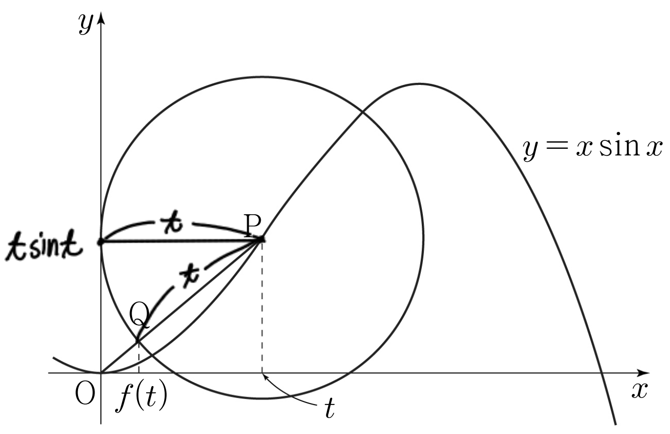
$e^{f(t)}=\frac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$

$\therefore \lim_{t\to0+}e^{f(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{\frac{e^{2t}-1}{t}-\frac{e^{-3t}-1}{t}}$

$=\frac{1}{2-(-3)}=\frac{1}{5}$

27. 그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\, t\sin t)\,(0<t<\pi)$를 중심으로 하고 y축에 접하는 원이 선분 OP와 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{f(t)}{t^3}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

$\overline{OP} = t\sqrt{1+\sin^2 t}$, $\overline{OQ} = t(\sqrt{1+\sin^2 t}-1)$

$f(t) : t = \overline{OQ} : \overline{OP}$

$= t(\sqrt{1+\sin^2 t}-1) : t\sqrt{1+\sin^2 t}$

$\Leftrightarrow \quad f(t) = \dfrac{t(\sqrt{1+\sin^2 t}-1)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$

$\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{f(t)}{t^3} = \lim\limits_{t\to0+}\dfrac{\sin^2 t}{t^2}\cdot\dfrac{1}{(\sqrt{1+\sin^2 t})(\sqrt{1+\sin^2 t}+1)}$

$= 1\cdot\dfrac{1}{1\cdot2} = \dfrac{1}{2}$

28. 그림과 같이 길이가 4인 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 지름으로 하는 원 O_1이 있다. 원 O_1의 외부에 $\angle \mathrm{B_1A_1C_1}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{A_1B_1}}:\overline{\mathrm{A_1C_1}}=4:3$이 되도록 점 $\mathrm{C_1}$을 잡고 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$을 그린다. 원 O_1과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 교점 중 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 점 $\mathrm{D_1}$을 포함하지 않는 호 $\mathrm{A_1B_1}$과 두 선분 $\mathrm{A_1D_1}$, $\mathrm{B_1D_1}$로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 $\mathrm{A_1D_1}$과 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 원 O_2의 교점을 $\mathrm{A_2}$, 점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 직선 $\mathrm{A_1B_1}$과 평행한 직선이 원 O_2와 만나는 점 중 $\mathrm{A_2}$가 아닌 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$를 잡고, 점 $\mathrm{D_2}$를 포함하지 않는 호 $\mathrm{A_2B_2}$와 두 선분 $\mathrm{A_2D_2}$, $\mathrm{B_2D_2}$로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

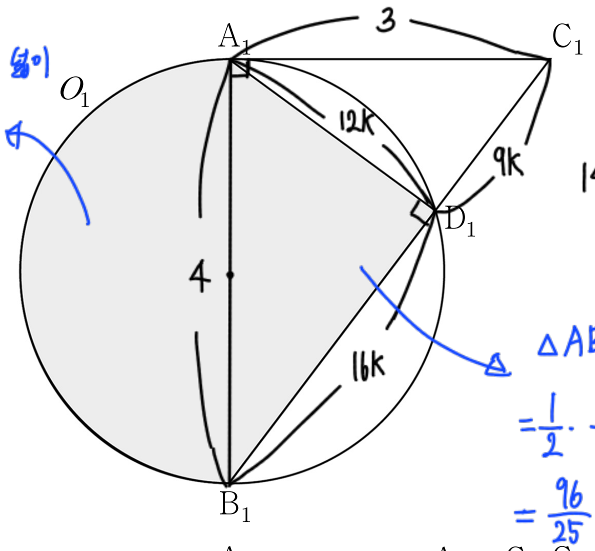
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]

부채꼴 OAB의 넓이

$=\frac{1}{2}\cdot(2)^2\cdot\pi$

$=2\pi$

R_1



$144k^2+256k^2=16$

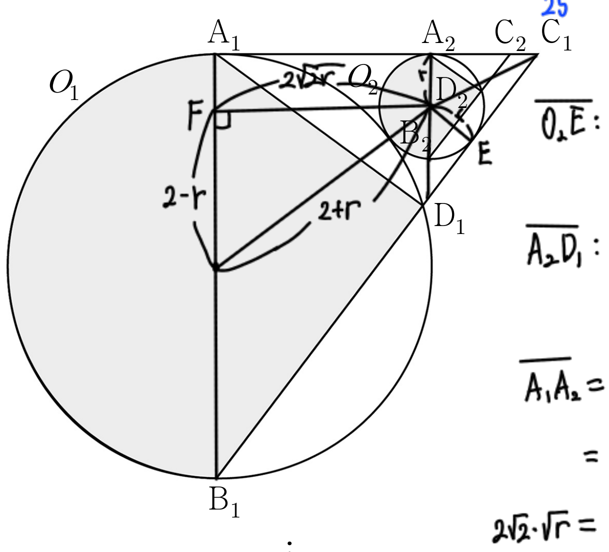
$k=\frac{1}{5}$

$\triangle \mathrm{AB_1D_1}$의 넓이

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{16}{5}$

$=\frac{96}{25}$

R_2



$\overline{O_2E}:\overline{O_2D_1}=3:5$

$=r:\frac{5}{3}r$

$\overline{A_2D_1}:\overline{A_2C_1}=4:3$

$=\frac{8}{3}r:2r$

$\overline{A_1A_2}=\overline{O_2F}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{r}$

$=\overline{A_1C_1}-\overline{A_2C_1}$

$2\sqrt{2}\cdot\sqrt{r}=3-2r$

$\therefore r=\frac{1}{2}$

⋮ ⋮

① $\frac{32}{15}\pi+\frac{256}{125}$ ② $\frac{9}{4}\pi+\frac{54}{25}$ ③ $\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$

④ $\frac{9}{4}\pi+\frac{108}{25}$ ⑤ $\frac{8}{3}\pi+\frac{128}{25}$

닮음비 $\rightarrow$ $\overline{O_1A_1}:\overline{O_2A_2}=2:\frac{1}{2}=1:\frac{1}{4}$

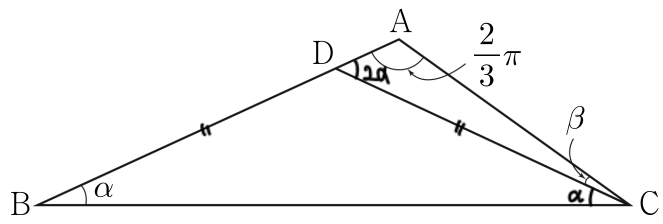
넓이비 $\Rightarrow$ $1:\frac{1}{16}$

$\Rightarrow \dfrac{2\pi+\frac{96}{25}}{1-\frac{1}{16}}=\dfrac{32}{15}\pi+\dfrac{512}{125}$

단답형

29. 그림과 같이 $\angle \mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$이고 $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AC}}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\angle \mathrm{CBD}=\alpha$, $\angle \mathrm{ACD}=\beta$라 하자. $\cos^2\alpha=\frac{7+\sqrt{21}}{14}$일 때, $54\sqrt{3}\times\tan\beta$의 값을 구하시오. [4점]

18



$$\left.\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha-1=\frac{\sqrt{21}}{7}\\ \sin 2\alpha &= \frac{2\sqrt{7}}{7}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan 2\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\beta=\frac{\pi}{3}-2\alpha \Rightarrow \tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan 2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan 2\alpha}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{1}{9}\sqrt{3}$$

$$\therefore\ 54\sqrt{3}\cdot\tan\beta=18$$

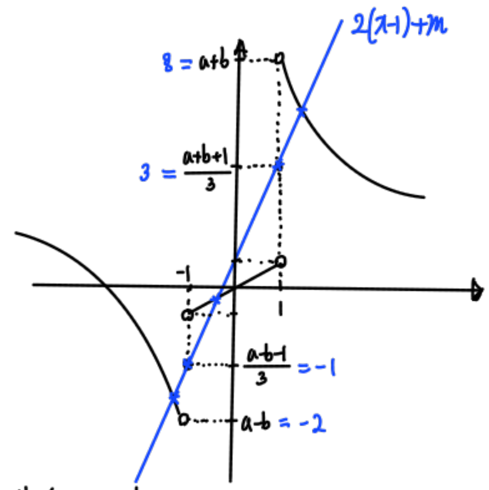
30. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}\quad (a,\ b\text{는 양의 상수})$$

라 하자. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수를 c_m이라 할 때, $c_k=5$인 자연수 k가 존재한다. $k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)$의 값을 구하시오. [4점]

13

$f(x)$	$a+\frac{b}{x}$	$\frac{a-b-1}{3}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{a+b+1}{3}$	$a+\frac{b}{x}$
	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$x>1$



• 기울기 $2 \Rightarrow \dfrac{\frac{a+b+1}{3}-\frac{a-b-1}{3}}{1-(-1)}=2 \Leftrightarrow b=5$

• $k=\frac{a}{3}+2$ 자연수 $\Rightarrow$ a는 3의 배수

$a-4<\frac{a}{3}-2<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\frac{a}{3}+2<a+5$, $a>0$ $\Rightarrow a=3,\ k=3$

$$\left.\begin{aligned}C_1&=2\\C_2&=2\\C_3&=5\\C_4&=2\\C_5&=2\\C_6&=2\\C_7&=2\\C_8&=1\\&\vdots\end{aligned}\right\}\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty}(C_m-1)=1+1+4+1+1+1+1=10$$

$$k+\sum_{m=1}^{\infty}(C_m-1)=13$$

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.