문항카드 10

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수전형	
계열(과목) / 문항번호	자연계 1교시 / 수학 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 Ⅰ
	핵심개념 및 용어	등차수열, 등비수열, 수열의 합
예상 소요 시간	30분 / 100분	

2. 문항 및 제시문

<제시문1>

첫째항에 차례로 일정한 수를 더하여 얻어진 수열을 등차수열이라 하고, 그 일정한 수를 공차라고 한다. 그리고, 첫째항에 차례로 일정한 수를 곱하여 얻어진 수열을 등비수열이라 하고, 그 일정한 수를 공비라고 한다.

<제시문2>

자연수의 거듭제곱의 합은 다음의 등식으로 구할 수 있다.

(ⅰ) $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

(ⅱ) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

<제시문3>

수열 $\{a_n\}$을 오른쪽 그림과 같이 삼각형 모양으로, 가장 위 꼭짓점에서부터 출발하여 왼쪽에서 오른쪽으로, k번째 줄에는 k개씩 배열하자. 그리고 모든 양의 정수 n에 대하여, 이 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 한다.

$$
\begin{array}{c}
a_1 \\
a_2\ a_3 \\
a_4\ a_5\ a_6 \\
a_7\ a_8\ a_9\ a_{10} \\
a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15} \\
a_{16}\ a_{17}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}
$$

[수학1 - ⅰ] <제시문3>에서 모든 양의 정수 n에 대하여 $S_n=n^2+n+1$일 때, 삼각형의 위 꼭짓점에서부터 50번째 줄까지 각 줄의 가장 오른쪽에 배열되는 수들의 합을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학1 - ⅱ] <제시문3>에서 수열 $\{a_n\}$을 삼각형 모양으로 배열할 때, 짝수번째 줄의 배열은 역순으로 하자. 예를 들어, 두 번째 줄은 $a_2\,a_3$이 아니라 $a_3\,a_2$로 재배열하고, 네번째 줄은 $a_7\,a_8\,a_9\,a_{10}$이 아니라 $a_{10}\,a_9\,a_8\,a_7$로 재배열한다. [수학1 - ⅰ]에서와 같이 모든 양의 정수 n에 대하여 $S_n=n^2+n+1$일 때,

삼각형의 위 꼭짓점에서부터 50번째 줄까지 각 줄의 가장 오른쪽에 배열되는 수들의 합을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학1 - iii] <제시문3>에서 모든 양의 정수 n에 대하여 $S_n = 2^n$이고, 수열 $\{a_n\}$을 삼각형 모양으로 배열할 때, [수학 1 - ii]에서와 같이 짝수번째 줄의 배열은 역순으로 하자. 이때 삼각형의 위 꼭짓점에서부터 50번째 줄까지 각 줄의 가장 오른쪽에 배열되는 수들의 곱을 구하고, 그 이유를 논하시오.

3. 출제 의도

본 문제에서는 수열과 수열의 합 사이의 관계를 등차수열과 등비수열의 예를 통해 잘 이해하고 있는지 평가한다. 특히, 자연수의 거듭제곱의 합 공식을 통해, 특정한 형태로 나타나는 수열의 합과 곱을 정확하게 유도할 수 있는지 평가한다. 이를 논리적으로 서술하는 과정에서, 수열의 표현식을, 경우를 나누어 자연스럽게 정리하는 능력이 주요 평가요소이다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	2015 개정 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8]] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	관련 성취기준
제시문1	[12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
제시문2	[12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
제시문3	[12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제1-i	[12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제1-ii	[12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문제1-iii	[12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	김원경 외	비상	2020	117-133, 138-144
	수학 Ⅰ	권오남 외	(주)교학사	2020	114-132, 136-145

5. 문항 해설

[수학1-ⅰ] 수열의 합을 나타내는 식으로부터 원 수열의 일반항을 등차수열로 표현하고, 이들의 합을 자연수의 거듭제곱의 합 공식을 통해 계산할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
[수학1-ⅱ] 수열의 표현식을 짝수차/홀수차인 경우로 자연스럽게 나누어 일반항을 유도할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
[수학1-ⅲ] 수열의 합을 나타내는 식으로부터 원 수열의 일반항을 등비수열로 표현하고, 이들의 곱을 자연수의 거듭제곱의 합 공식을 통해 계산할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-i	$a_1=3$과 $n \ge 2$일 때 $a_n=2n$ 임을 보인다.	3
	$n \ge 2$일 때, 제n번째 줄의 마지막 수가 $n(n+1)$임을 보인다.	3
	$3+\sum_{n=2}^{50} n(n+1)=44201$임을 보인다.	4
1-ii	n이 짝수일 때, 제n번째 줄의 마지막 수가 n^2-n+2임을 보인다.	3
	n이 2이상인 홀수일 때, 제n번째 줄의 마지막 수가 $n(n+1)$임을 보인다.	3
	$3+\sum_{k=2}^{25}(2k-1)(2k)+\sum_{k=1}^{25}((2k)^2-(2k)+2)=42951$임을 보인다.	4
1-iii	n이 짝수일 때, 제n번째 줄의 마지막 수가 $2^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$임을 보인다.	3
	n이 2이상인 홀수일 때, n번째 줄의 마지막 수가 $2^{\frac{1}{2}(n^2+n-2)}$임을 보인다.	3
	$2\times 2^{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{25}((2k-1)^2+(2k-1)-2)}\times 2^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{25}((2k)^2-(2k))}=21426$임을 보인다.	4

7. 예시 답안

[수학1-i]
2이상인 양의 정수 n에 대해

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n+1)-((n-1)^2+(n-1)+1)=2n$$

이고, $a_1=S_1=3$이다.
2이상인 양의 정수 k에 대하여, 이 삼각형 배열의 제k번째 줄의 마지막 수는 수열의

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

번째 항이므로, $k(k+1)$이다. 따라서, 가장 위 꼭짓점에서부터 50번째 줄까지 각 줄의 가장 오른쪽에

배열되는 수들의 합은

$$3+\sum_{k=2}^{50}k(k+1)=1+\sum_{k=1}^{50}(k^2+k)=1+\frac{50\times51\times101}{6}+\frac{50\times51}{2}=44201 \text{ 이다.}$$

[수학1-ii]

k가 짝수일 때, 제k번째 줄의 마지막 수는 수열의

$$1+(1+2+\cdots+(k-1))=\frac{1}{2}(k^2-k+2)$$

번째 항이므로, k^2-k+2이다.

k가 2이상인 홀수일 때, 제k번째 줄의 마지막 수는 수열의

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

번째 항이므로, $k(k+1)$이다. 따라서, 가장 위 꼭짓점에서부터 50번째 줄까지 각 줄의 가장 오른쪽에 배열되는 수들의 합은

$$3+\sum_{m=2}^{25}(2m-1)(2m)+\sum_{m=1}^{25}((2m)^2-(2m)+2)=1+\sum_{k=1}^{25}(8m^2-4m+2)$$

이다. 이를 다시 정리하면,

$$1+8\times\frac{25\times26\times51}{6}-4\times\frac{25\times26}{2}+2\times25=42951 \text{ 이다.}$$

[수학1-iii]

2이상인 양의 정수 n에 대해

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$$

이고, $a_1=S_1=2$이다. k가 짝수일 때, 제 k번째 줄의 마지막 수는 수열의

$$1+(1+2+\cdots+(k-1))=\frac{1}{2}(k^2-k+2)$$

번째 항이므로, $2^{\frac{1}{2}(k^2-k)}$이다. k가 2이상인 홀수일 때, 제k번째 줄의 마지막 수는 수열의

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

번째 항이므로, $2^{\frac{1}{2}(k^2+k-2)}$이다. 따라서, 가장 위 꼭짓점에서부터 50번째 줄까지 각 줄의 가장 오른쪽에 배열되는 수들의 곱은

$$2\times2^{\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{25}((2m-1)^2+(2m-1)-2)}\times2^{\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{25}((2m)^2-(2m))}$$

이다. 이를 다시 정리하면, 2^N의 형태이고,

$$\begin{aligned}N=1+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{25}((2m-1)^2+(2m-1)-2+(2m)^2-2m)&=1+\sum_{k=1}^{25}(4m^2-2m-1)\\&=1+4\times\frac{25\times26\times51}{6}-2\times\frac{25\times26}{2}-25\\&=21426\end{aligned}$$

이다. 따라서 문제의 곱은 2^{21426} 이다.

문항카드 11

1. 일반 정보

유형		■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사
전형명		논술우수전형
계열(과목) / 문항번호		자연계 1교시 / 수학 2
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	역함수, 접선의 방정식, 영역의 넓이
예상 소요 시간		30분 / 100분

2. 문항 및 제시문

<제시문1>

(ⅰ) 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-x & (x \le 0) \\ x^2-x & (x>0) \end{cases}$$

(ⅱ) 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자. $g(0)=0$이며, 0이 아닌 실수 b에 대하여, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(b, f(b))$에서의 접선이 접점을 제외한 곡선 $y=f(x)$와 다시 만나는 점의 x좌표를 $g(b)$로 한다.

(ⅲ) 함수 $h(x)$를 함수 $g(x)$의 역함수로 정의하자.

<제시문2>

(ⅰ) $x_0=1$로 놓고, 양의 정수 n에 대하여, $x_{n+1}=h(x_n)$으로 정의하자.

(ⅱ) 음이 아닌 정수 n에 대하여, $y_n=f(x_n)$으로 정의하고, 점 P_n을 (x_n, y_n)으로 놓자.

(ⅲ) 음이 아닌 정수 n에 대하여, 점 P_n과 점 P_{n+1}을 잇는 직선의 방정식을 $y=L_n(x)$로 놓자.

(ⅳ) 음이 아닌 정수 n에 대하여, 직선 $y=L_n(x)$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 A_n이라고 하자.

[수학 2-ⅰ] <제시문1>에서 정의된 두 함수 $g(x)$와 $h(x)$를 모두 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 2-ⅱ] 음이 아닌 정수 m에 대하여, <제시문2>에 주어진 함수 $L_{2m}(x)$와 $L_{2m+1}(x)$의 모든 계수를 α와 m에 대한 식으로 표시하고, 그 이유를 논하시오. (단, α는 $1-\sqrt{2}$이다.)

[수학 2-ⅲ] 음이 아닌 정수 m에 대하여, <제시문2>에 주어진 A_{2m}과 A_{2m+1}을 모두 α와 m에 대한 식으로 표시하고, 그 이유를 논하시오. (단, α는 $1-\sqrt{2}$이다.)

[수학 2-ⅳ] 음이 아닌 정수 m에 대하여, $\dfrac{A_{2m+1}}{A_{2m}}$의 값을 구하고, m에 관계없이 항상 일정함을 논하시오.

3. 출제 의도

본 문제에서는 일대일함수의 역함수를 잘 이해하고, 적용할 수 있는지를 평가한다. 이러한 내용을 함수의 미분을 이용한 접점에서의 접선의 방정식 등의 개념과 잘 연결시킬 수 있는지 평가한다. 또한 이를 이용하여 접선과 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 개념과 잘 관련지을 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	2015 개정 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8]] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	관련 성취기준
제시문1	구간별로 정의된 이차함수의 그래프를 그리고, 곡선의 점에서의 접선을 구하고, 이와 관련된 함수의 역함수를 구할 수 있다.
제시문2	곡선 위의 한 점에서의 접선을 구하고, 접선과 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있다.
문제2-i	구간별로 정의된 함수를 제대로 이해하고, 이의 역함수를 제대로 구할 수 있다.
문제2-ii	곡선 위의 한 점에서의 접선을 구하고, 이를 역함수의 개념과 관련지을 수 있다.
문제2-iii	직선과 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 적분을 이용하여 제대로 구할 수 있다.
문제2-iv	영역의 넓이를 제대로 구하고, 두 영역의 넓이의 비를 제대로 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2017	217-220
	수학	황선욱 외	Mirae N	2017	227-230
	수학II	선우하식 외	천재교육	2017	67-70, 131-139
	수학II	황선욱 외	Mirae N	2017	73-75, 135-141

5. 문항 해설

[수학2-ⅰ] 구간별로 정의된 이차함수를 잘 이해하고, 이를 이용하여 역함수를 제대로 구할 수 있는지의 능력을 평가하는 문제이다.

[수학2-ⅱ] 역함수의 개념을 활용하여 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 미분의 개념을 이용하여 제대로 구할 수 있는지의 능력을 평가하는 문제이다.

[수학2-ⅲ] 곡선 위의 점에서의 접선과 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 적분의 개념을 이용하여 제대로 구할 수 있는지의 능력을 평가하는 문제이다.

[수학2-ⅳ] 두 영역의 넓이의 비율을 제대로 구할 수 있는지의 능력을 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-i	$g(x)=(-1-\sqrt{2})x$ **임을 구한다.**	3
	$h(x)=(1-\sqrt{2})x$ **임을 구한다.**	2
2-ii	$L_{2m}(x)$ **의 일차항 계수:** $-2\alpha^{2m+1}-1$ $L_{2m}(x)$ **의 상수항:** α^{4m+2}	5
	$L_{2m+1}(x)$ **의 일차항 계수:** $2\alpha^{2m+2}-1$ $L_{2m+1}(x)$ **의 상수항:**$-\alpha^{4m+4}$	5
2-iii	$A_{2m}=-\frac{2}{3}\alpha^{6m+1}$ **임을 보인다.**	5
	$A_{2m+1}=\frac{2}{3}\alpha^{6m+4}$ **임을 보인다.**	5
2-iv	$\frac{A_{2m+1}}{A_{2m}}=-\alpha^3=(\sqrt{2}-1)^3$ **임을 보인다.**	5

7. 예시 답안

[수학2-i]

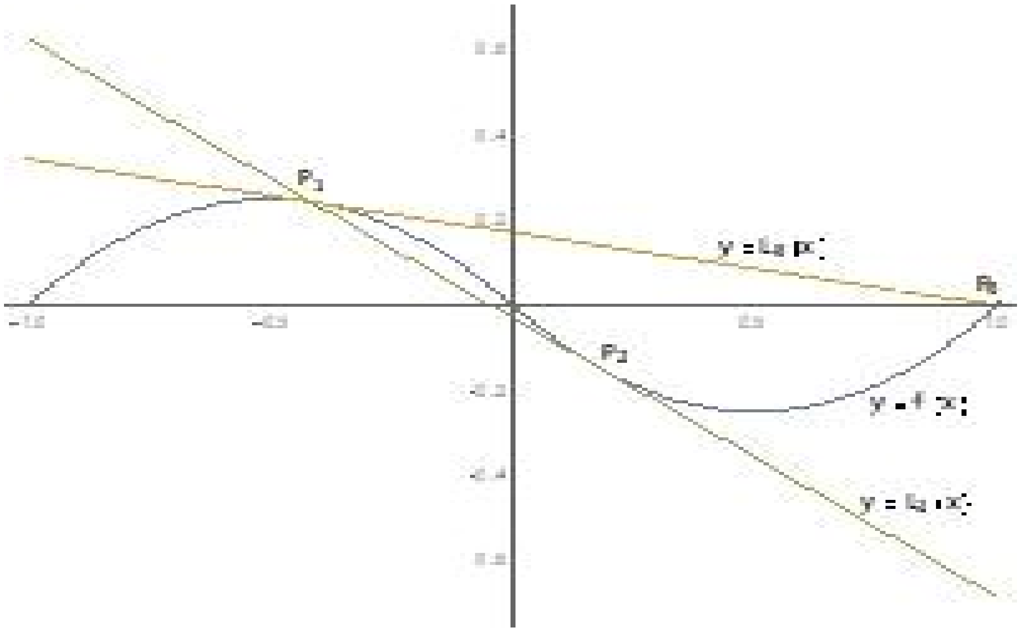
b가 양수인 경우, $(b,f(b))$에서의 접선의 방정식은 $y=(2b-1)(x-b)+(b^2-b)$가 되고, 이 식과 $y=-x^2-x$를 연립하여 풀면, $x=-b\pm\sqrt{2}b$를 얻는다. 함수 $g(x)$의 정의에 따르면, b가 양수일 때, $g(b)$는 음수이므로, $g(b)=(-1-\sqrt{2})b$를 얻는다.

비슷한 방법으로, b가 음수인 경우, $(b,f(b))$에서의 접선의 방정식은 $y=(-2b-1)(x-b)+(-b^2-b)$가 되고, 이 식과 $y=x^2-x$를 연립하여 풀면, $x=-b\pm\sqrt{2}b$를 얻는다. 함수 $g(x)$의 정의에 따르면, b가 음수일 때, $g(b)$는 양수이므로, $g(b)=(-1-\sqrt{2})b$를 얻는다.

따라서 모든 실수 x에 대하여, 함수 $g(x)$는 $g(x)=(-1-\sqrt{2})x$가 되고, 역함수 $h(x)$는 $h(x)=(1-\sqrt{2})x$와 같게 된다.

답: $g(x)=(-1-\sqrt{2})x$, $h(x)=(1-\sqrt{2})x$

[수학2-ii]
문제에 주어진 상황을 그림으로 나타내면 아래와 같다.



$x_0=1$이고, 양의 정수 n에 대하여, $x_{n+1}=h(x_n)=(1-\sqrt{2})x_n$이므로, $x_n=(1-\sqrt{2})^n$과 같게 된다. 직선 $y=L_{2m}(x)$는 점 P_{2m+1}을 접점으로 하는 접선의 식과 같다. 따라서 $\alpha=1-\sqrt{2}$, $b=x_{2m+1}=\alpha^{2m+1}$이라고 두면, $L_{2m}(x)=(-2b-1)x+b^2=(-2\alpha^{2m+1}-1)x+\alpha^{4m+2}$이 된다.
한편, 직선 $y=L_{2m+1}(x)$는 점 P_{2m+2}를 접점으로 하는 접선의 식과 같게 되므로, $c=x_{2m+2}=\alpha^{2m+2}$이라고 두면, $L_{2m+1}(x)=(2c-1)x-c^2=(2\alpha^{2m+2}-1)x-\alpha^{4m+4}$이 된다.

답: $L_{2m}(x)$ 의 일차항 계수: $-2\alpha^{2m+1}-1$, $L_{2m}(x)$ 의 상수항: α^{4m+2},
$L_{2m+1}(x)$ 의 일차항 계수: $2\alpha^{2m+2}-1$, $L_{2m+1}(x)$ 의 상수항:$-\alpha^{4m+4}$

[별해]
점 $\mathrm{P}_n=(x_n,y_n)$의 좌표는 n이 짝수일 때와 홀수일 때, 각각 다음과 같이 α와 n으로 표현가능.
즉, $x_n=\alpha^n$, $y_n=\begin{cases}\alpha^{2n}-\alpha^n, & n\text{은 짝수}\\ -\alpha^{2n}-\alpha^n, & n\text{은 홀수}\end{cases}$
점 P_{2m}과 P_{2m+1}의 좌표를 위와 같이 구하여, 이를 이용하여 $L_{2m}(x)$의 계수들을 구한 경우에 해답으로 인정한다. 또한,
점 P_{2m+1}과 P_{2m+2}의 좌표를 위와 같이 구하여, 이를 이용하여 $L_{2m+1}(x)$의 계수들을 구한 경우도 해답으로 인정한다. 예를 들어,

$$L_{2m}(x)=\left(\frac{y_{2m+1}-y_{2m}}{x_{2m+1}-x_{2m}}\right)(x-x_{2m})+y_{2m},$$

$L_{2m+1}(x)=\left(\dfrac{y_{2m+2}-y_{2m+1}}{x_{2m+2}-x_{2m+1}}\right)(x-x_{2m+1})+y_{2m+1}$ 을 구한 후, 이 식의 계수들을 α와 m으로 표현할 수 있음.(단, 좌표를 맞게 구해서 표기했는지 확인 필요)

[수학2-iii]

[수학2-ii]의 풀이에서처럼 편의상 $\alpha=1-\sqrt{2}$, $b=x_{2m+1}=\alpha^{2m+1}$, $c=x_{2m+2}=\alpha^{2m+2}$이라고 두자.

$$A_{2m}=\int_{x_{2m+1}}^{x_{2m}}(L_{2m}(x)-f(x))dx=\int_{b}^{0}((-2b-1)x+b^2-(-x^2-x))dx+\int_{0}^{b/\alpha}((-2b-1)x+b^2-(x^2-x))dx$$

$$=\int_{b}^{0}(x^2-2bx+b^2)dx+\int_{0}^{b/\alpha}(-x^2-2bx+b^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}-bx^2+b^2x\right]_b^0+\left[-\frac{x^3}{3}-bx^2+b^2x\right]_0^{b/\alpha}$$

$$=-\frac{b^3}{3}+\left(-\frac{b^3}{3\alpha^3}-\frac{b^3}{\alpha^2}+\frac{b^3}{\alpha}\right)=-\left(\frac{\alpha^3+1+3\alpha-3\alpha^2}{3\alpha^3}\right)b^3=-\left(\frac{2+5\alpha+1+3\alpha-3-6\alpha}{3\alpha^3}\right)\alpha^{6m+3}$$

$$=-\frac{2}{3}\alpha^{6m+1}$$ 이 되고,

$$A_{2m+1}=\int_{x_{2m+1}}^{x_{2m+2}}(f(x)-L_{2m+1}(x))dx=\int_{0}^{c}((x^2-x)-((2c-1)x-c^2))dx+\int_{c/\alpha}^{0}((-x^2-x)-((2c-1)x-c^2))dx$$

$$=\int_{0}^{c}(x^2-2cx+c^2)dx+\int_{c/\alpha}^{0}(-x^2-2cx+c^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}-cx^2+c^2x\right]_0^c+\left[-\frac{x^3}{3}-cx^2+c^2x\right]_{c/\alpha}^0$$

$$=\frac{c^3}{3}-\left(-\frac{c^3}{3\alpha^3}-\frac{c^3}{\alpha^2}+\frac{c^3}{\alpha}\right)=\left(\frac{\alpha^3+1+3\alpha-3\alpha^2}{3\alpha^3}\right)c^3=\left(\frac{2+5\alpha+1+3\alpha-3-6\alpha}{3\alpha^3}\right)\alpha^{6m+6}$$

$$=\frac{2}{3}\alpha^{6m+4}$$ 이 된다.

답: $A_{2m}=-\frac{2}{3}\alpha^{6m+1}$, $A_{2m+1}=\frac{2}{3}\alpha^{6m+4}$ **(단,** $\alpha=1-\sqrt{2}$**)**

[수학2-iv]

[수학2-iii]의 풀이에 있는 결과로부터,

$\frac{A_{2m+1}}{A_{2m}}=-\alpha^3=(\sqrt{2}-1)^3$이 되므로, m에 상관없이 일정함을 알 수 있다.

답: $\frac{A_{2m+1}}{A_{2m}}=-\alpha^3=(\sqrt{2}-1)^3$