수학 Ⅰ : 8 문제

20. 양수 t에 대하여 $\log t$의 가수를 $f(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 양수 t의 개수를 a_n이라 할 때, a_4+a_5의 값은? [4점]

(가) $1 \le t < 100$
(나) $f(t^n)+2f(t)=1$

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

27. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $\{f(x)\}^2+3g(x)$의 값이 3이 되도록 하는 모든 x의 값의 곱은 $10^{\frac{q}{p}}$이다. $10(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

21. 양수 t에 대하여 $\log t$의 지표와 가수를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

29. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 x의 값은 $10^{\frac{n}{m}}$이다.

(가) $f(x)=g(x^2)+g(x^3)$
(나) $g(x^2)>g(x^3)>g(x^4)$

이때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.) [4점]

20. 1보다 큰 실수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수가 되도록 하는 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때 2번째 수를 a, 6번째 수를 b라 하자. $\log ab$의 값은? [4점]

① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

30. $\log k = 1.08$이라 할 때, 집합 X는

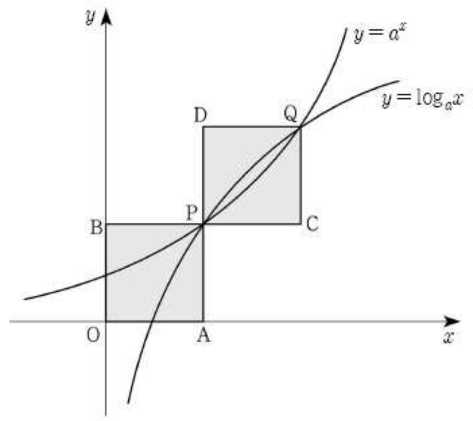
$$X=\left\{x \,\middle|\, x\text{는 } \log\frac{1}{k^n}\text{의 가수, } n\text{은 자연수}\right\}$$

라고 하자. 집합 X의 모든 원소의 합을 구하시오. [4점]

20. 1보다 큰 실수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수가 되도록 하는 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때 2번째 수를 a, 6번째 수를 b라 하자. $\log ab$의 값은? [4점]

① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

16. 그림과 같이 지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$가 두 점 P, Q에서 만날 때, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자.
점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 AP와 만나는 점을 D, 점 Q를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 BP와 만나는 점을 C라 할 때, 두 사각형 OAPB와 PCQD는 합동이다. a의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ 2

수학 Ⅱ : 23 문제

30. 양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
(나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\frac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오. [4점]

---

21. 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

---

21. 함수 $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2e^x+k & (x \ge 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$에 대하여

함수 $g(x)=|f(x)|-f(x)$가 다음 조건을 만족하도록 하는 정수 k의 개수는? [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 미분가능하지 않은 점이 2개다.

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

---

28. 삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-9x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x \ge k)\\ f(2k-x) & (x<k)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

---

30. 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

---

29. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 2$일 때, $g(x)=\begin{cases}f(x) & (0 \le x < 1)\\ f(2-x) & (1 \le x < 2)\end{cases}$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.
(다) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$g(6)-g(3)=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

---

30. 실수 t에 대하여 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선과 원 $x^2+y^2=e^{2t}$이 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 P라 하고, 점 P가 나타내는 곡선을 C라 하자. $t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a \times e^{b\pi}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

---

21. 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases}x=e^t\\ y=(2t^2+nt+n)e^t\end{cases}$$

이고, $x \ge e^{-\frac{n}{2}}$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a_n$에서 최솟값 b_n을 갖는다. $\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$ ④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

---

30. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, t $(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 (s, t)가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1, 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 함수 $f(x)=x+\cos x+\frac{\pi}{4}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=|f(x)-k| \quad (k\text{는 } 0<k<6\pi\text{인 상수})$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

---

21. 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\,(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{e}$　② $\frac{1}{\sqrt{e}}$　③ $\frac{e}{2}$　④ $\sqrt{e}$　⑤ e

---

30. 함수 $f(x)=x^2(x-2)^2$이 있다. $0\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$$

를 만족시키는 실수 t의 집합은 $\{t\,|\,p\le t\le q\}$이다. $36pq$의 값을 구하시오. [4점]

---

30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

---

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x)\le\frac{1}{3}$이다.
(나) $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은? [4점]

① -11　② -9　③ -7　④ -5　⑤ -3

---

21. 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$f(x)=\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)$$

에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

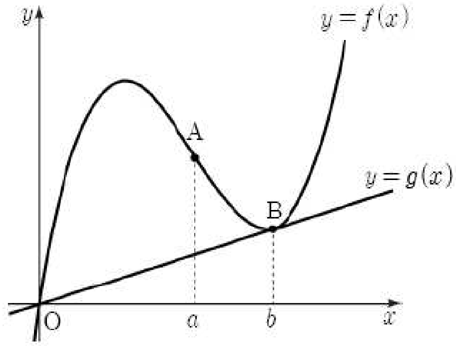
<보 기>

ㄱ. 점 $(2,\ 2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.
ㄷ. 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

---

19. 그림과 같이 좌표평면에서 최고차항의 계수가 양수이고 원점을 지나는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점을 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$라 하고 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0<a<b$) [4점]



<보 기>

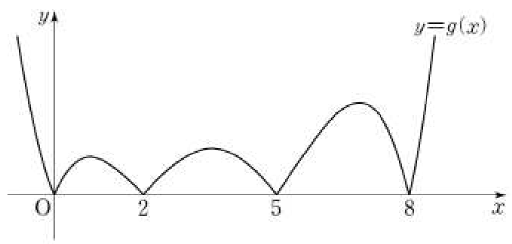
ㄱ. 곡선 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는 a이다.
ㄴ. 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\frac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $\frac{b-a}{a}=\frac{1}{2}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$$

라 할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

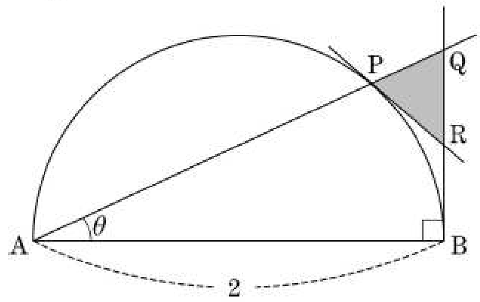
ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0)<0$

ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)\,dx>0$ 을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

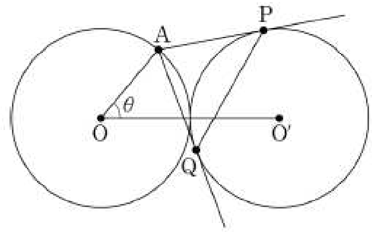
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 P가 있다. 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 Q라 하고, 점 P에서 이 반원에 접하는 직선과 선분 BQ가 만나는 점을 R라 하자. $\angle PAB=\theta$라 하고 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이다.) [4점]



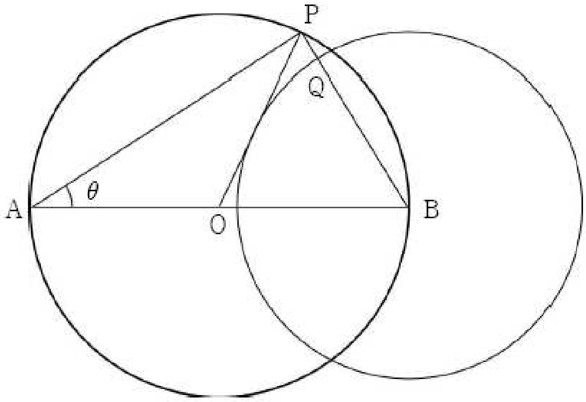
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ 2

21. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 O, O′이 외접하고 있다. 원 O 위의 점 A에서 원 O′에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. $\angle AOO'=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{PQ}}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



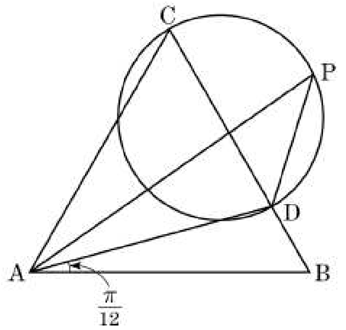
① 2 ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

21. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 점 O인 원 C_1이 있다. 원 C_1 위의 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 하고, 선분 OP에 접하고 중심이 점 B인 원 C_2를 그린다. 원 C_2와 선분 BP의 교점을 점 Q라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{\overline{PQ}}{\theta^3}$의 값은? $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

19. 그림과 같이 정삼각형 ABC의 한 변 CB 위에 점 D를 $\angle DAB=\frac{\pi}{12}$가 되도록 정하고, 선분 CD를 지름으로 하는 원을 평면 ABC 위에 그린다. 이 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle CDP=\theta$라 하자. 삼각형 ADP의 넓이가 최대가 되도록 하는 θ에 대하여 $\sin\theta\cos\theta$의 값은? [4점]

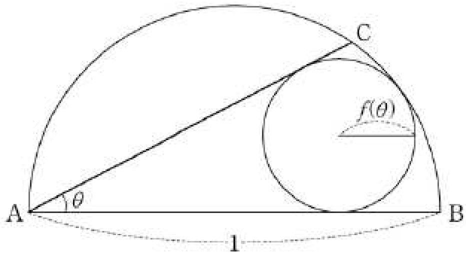


① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

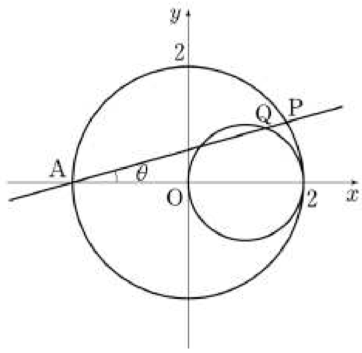
29. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle BAC=\theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\alpha$$

이다. 100α의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



20. 그림과 같이 점 A$(-2, 0)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q라 하자.
$\angle OAP=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{\overline{PQ}}{\theta^2}$의 값은? [4점]



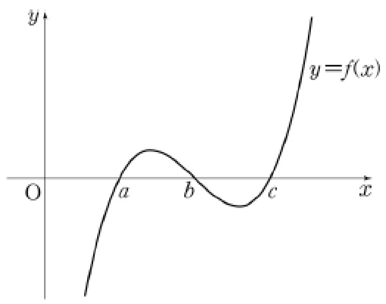
① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

적분과 통계 : 17 문제

13. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f(x)$는

$$\int_a^b f(x)\,dx=3,\ \int_a^c f(x)\,dx=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]



<보 기>

ㄱ. $F(b)=F(a)+3$
ㄴ. 점 $(c,\ F(c))$는 곡선 $y=F(x)$의 변곡점이다.
ㄷ. $-3<F(a)<0$이면 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

---

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고,

$$f(a)=0,\ \int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k\ (a>0,\ 0<k<1)$$

일 때, $\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은? [3점]

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2
④ k ⑤ $2k$

---

21. 함수 $f(x)=\sin\pi x$와 이차함수 $g(x)=x(x+1)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\int_{g(x)}^{g(x+1)}f(t)\,dt$$

라 할 때, 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

---

28. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+4x+5$의 역함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{g\left(1+\frac{1}{n}\right)-g\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$$

의 값을 p라 할 때, $4p$의 값을 구하시오. [4점]

---

28. 함수 $f(x)=3(x-1)^2+5$에 대하여 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)$$

를 만족시킨다. $g'(2)=p$일 때, $30p$의 값을 구하시오. [4점]

---

29. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $f(x+2)=f(x)$
(다) $\int_{-1}^{1}(x+2)^2f(x)\,dx=50,\ \int_{-1}^{1}x^2f(x)\,dx=2$

$\int_{-3}^{3}x^2f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

---

20. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=1$
(나) $\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{4}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

30. x에 대한 방정식 $\int_0^x |t-1|dt = x$의 양수인 실근이 $m+n\sqrt{2}$일 때, m^3+n^3의 값을 구하시오. (단, m, n은 유리수이다.) [4점]

---

15. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

(가) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt = \{g(x)+a\}\sin x - 2$

(나) $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt \cos x + 3$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

---

20. 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [4점]

(가) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 1$

(나) $\cos x \int_0^x f(t)dt = \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ (단, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

---

19. 정의역이 $\{x \mid x > -1\}$인 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = \frac{1}{(1+x^3)^2}$이고, 함수 $g(x) = x^2$일 때,

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx = \frac{1}{6}$$

이다. $f(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{7}{18}$

---

30. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)dx = 6e^2+4$이다. $\int_1^e f(\ln x)dx = ae+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) [4점]

---

29. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x) - g'(x)f(1-x)\}dx$$

의 값을 k라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x) - g(x)f'(1-x)\}dx = -k$

ㄴ. $f(0) = f(1)$이고 $g(0) = g(1)$이면, $k = 0$이다.

ㄷ. $f(x) = \ln(1+x^4)$이고 $g(x) = \sin \pi x$이면, $k = 0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

---

30. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은 $p + \frac{q}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

(가) $f(0) = 1$이고 $f(8) \le 100$이다.

(나) $0 \le k \le 7$인 각각의 정수 k에 대하여

$f(k+t) = f(k)$ $(0 < t \le 1)$

또는

$f(k+t) = 2^t \times f(k)$ $(0 < t \le 1)$

이다.

(다) 열린 구간 $(0, 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

30. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
> (나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점
> $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$
> 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.
> (다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx=2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

---

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $1\le f'(x)\le 3$이다.
> (나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n,\ 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$을 모두 지난다.
> (다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k,\ 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\displaystyle\int_3^6 f(x)\,dx=a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점]

---

21. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-1\le x<1$일 때 $f(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=4\int_0^1 f(x)\,dx$
ㄴ. $1<x<2$일 때 $f'(x)>0$이다.
ㄷ. $\displaystyle\int_1^3 x\,|f'(x)|\,dx=4$

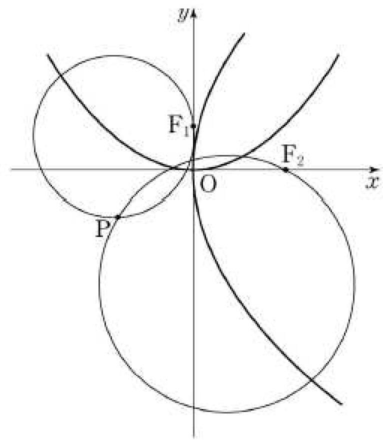
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기하와 벡터 : 29 문제

28. 좌표평면에서 포물선 $C_1 : x^2=4y$의 초점을 F_1, 포물선 $C_2 : y^2=8x$의 초점을 F_2라 하자. 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

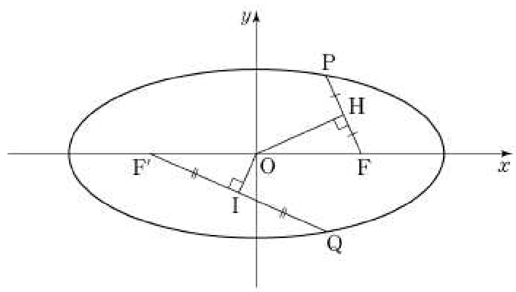
> (가) 중심이 C_1 위에 있고 점 F_1을 지나는 원과 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2를 지나는 원의 교점이다.
> (나) 제3사분면에 있는 점이다.

원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]

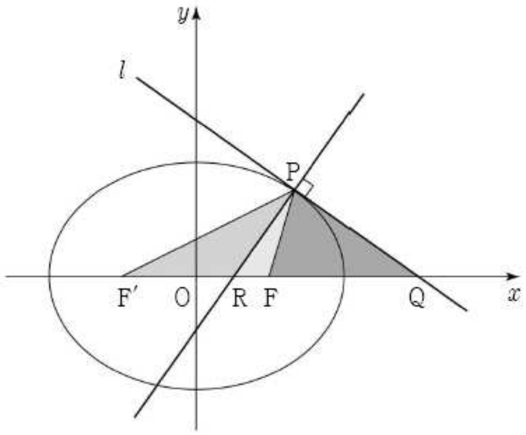


---

27. 두 점 $\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 원점 O에서 선분 PF와 선분 QF′에 내린 수선의 발을 각각 H와 I라 하자.
점 H와 점 I가 각각 선분 PF와 선분 QF′의 중점이고, $\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{OI}}=10$일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{OH}}\ne\overline{\mathrm{OI}}$) [4점]

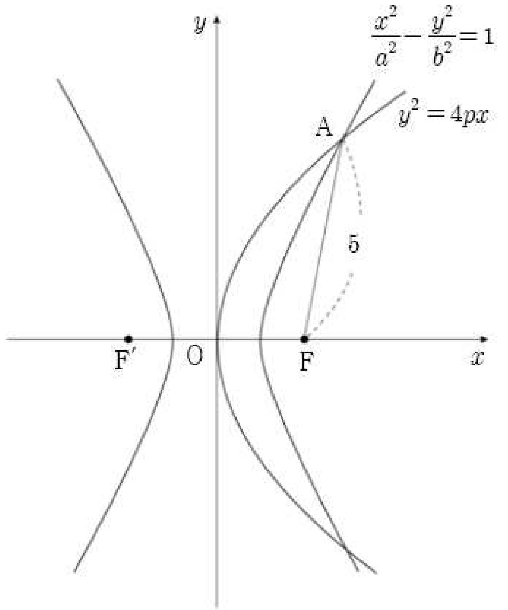


20. 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $3x^2+4y^2=12$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 P에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 접선 l과 수직인 직선을 그어 x축과 만나는 점을 R라 하자. 세 삼각형 PRF, PF′R, PFQ의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는? [4점]



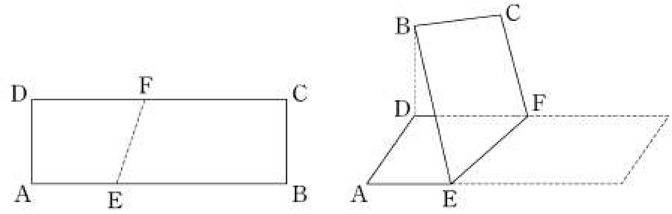
① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

20. 그림과 같이 F$(p,\ 0)$을 초점으로 하는 포물선 $y^2=4px$와 F$(p,\ 0)$과 F′$(-p,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. $\overline{\mathrm{AF}}=5$, $\cos(\angle \mathrm{AFF'})=-\frac{1}{5}$일 때, ab의 값은? [4점]

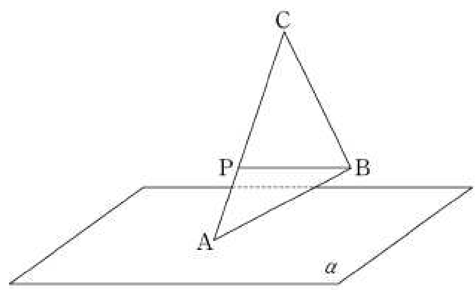


① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ 3

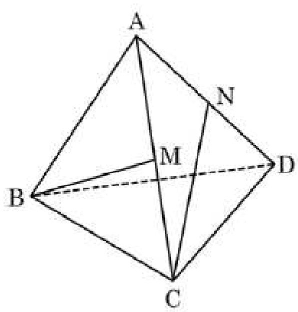
28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=9$, $\overline{\mathrm{AD}}=3$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다.
$\overline{\mathrm{AE}}=3$일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ이다. $60\cos\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



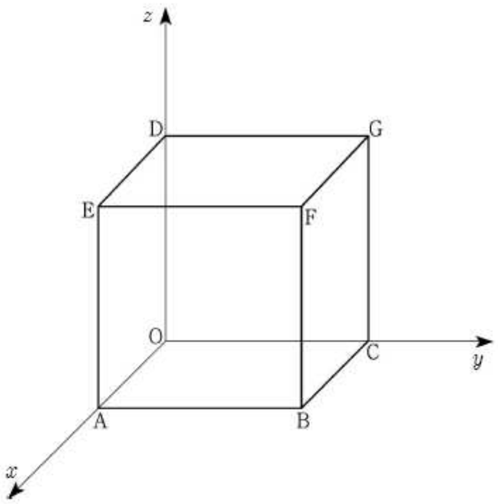
29. 그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고 α로부터의 거리가 각각 1, 3인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{BP}}=4$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오. [4점]



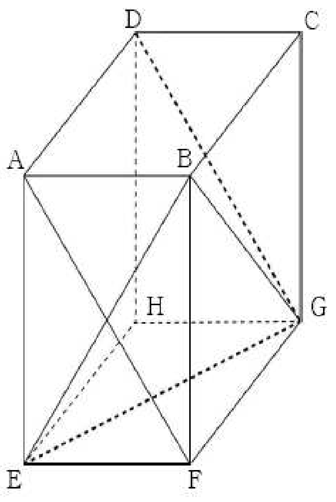
30. 정사면체 ABCD에서 두 모서리 AC, AD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 직선 BM과 직선 CN이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 그림과 같이 좌표공간에 있는 정육면체 OABC−DEFG에서 A(4, 0, 0), C(0, 4, 0), D(0, 0, 4)이다. 이 정육면체가 평면 $x+y+2z=6$에 의하여 잘린 단면의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

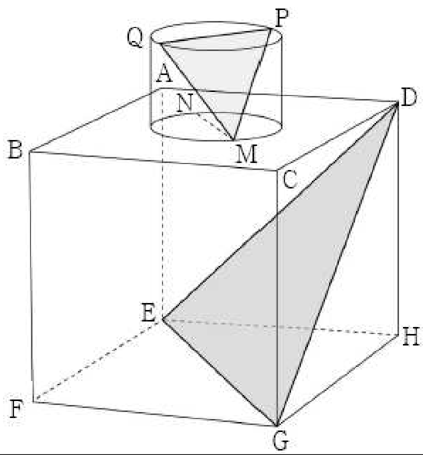


19. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=3$, $\overline{AE}=4$인 직육면체 ABCD−EFGH에서 평면 AFGD와 평면 BEG의 교선을 l이라 하자. 직선 l과 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은? [4점]

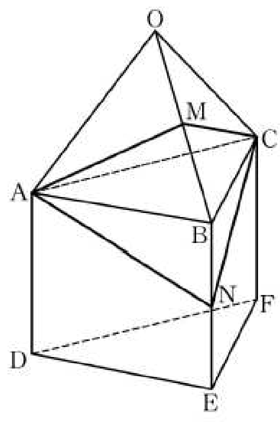


① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

30. 한 변의 길이가 4인 정육면체 ABCD−EFGH와 밑면의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이고 높이가 2인 원기둥이 있다. 그림과 같이 이 원기둥의 밑면이 평면 ABCD에 포함되고 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점과 원기둥의 밑면의 중심이 일치하도록 하였다. 평면 ABCD에 포함되어 있는 원기둥의 밑면을 α, 다른 밑면을 β라 하자.
평면 AEGC가 밑면 α와 만나서 생기는 선분을 $\overline{MN}$,
평면 BFHD가 밑면 β와 만나서 생기는 선분을 $\overline{PQ}$라 할 때,
삼각형 MPQ의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$이다.
a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점]

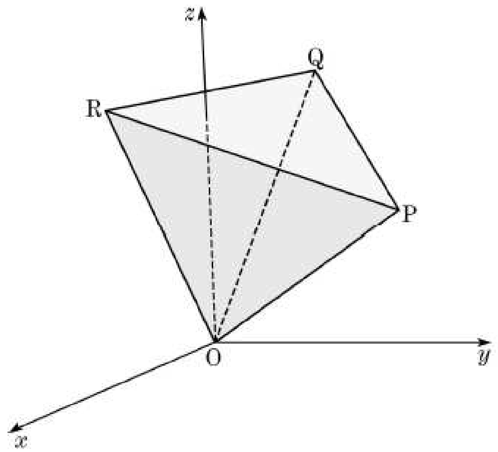


21. 그림은 모든 모서리의 길이가 2인 정삼각기둥 ABC−DEF의 밑면 ABC와 모든 모서리의 길이가 2인 정사면체 OABC의 밑면 ABC를 일치시켜 만든 도형을 나타낸 것이다. 두 모서리 OB, BE의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 평면 MCA, NCA가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [4점]

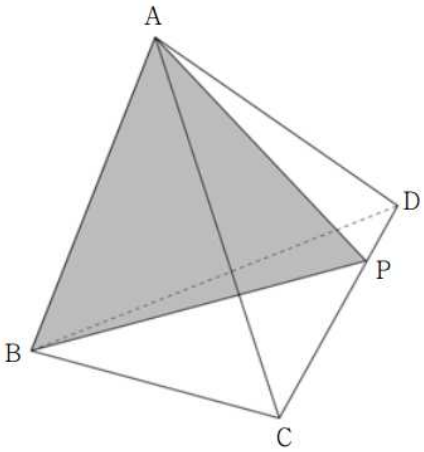


① $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$
④ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

30. 그림과 같이 좌표공간에서 한 모서리의 길이가 1인 정사면체 OPQR의 한 면 PQR가 z축과 만난다. 면 PQR의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, S의 최솟값은 k이다. $160k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

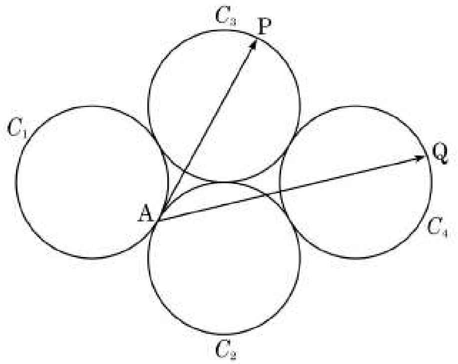


21. **그림과 같이 정사면체** ABCD **의 모서리** CD **를** $3:1$ **로 내분하는 점을** P **라 하자. 삼각형** ABP **와 삼각형** BCD **가 이루는 각의 크기를** θ **라 할 때,** $\cos\theta$ **의 값은?** $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ **[4점]**



① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{12}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{18}$

21. 그림과 같이 평면 위에 반지름의 길이가 1인 네 개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4가 서로 외접하고 있고, 두 원 C_1, C_2의 접점을 A라 하자. 원 C_3 위를 움직이는 점 P와 원 C_4 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값은? [4점]



① $4\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ② 6 ③ $3\sqrt{3}+1$
④ $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ⑤ 7

29. 좌표공간에서 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{A_0A_2}|=|\overrightarrow{A_1A_3}|=2$
(나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_k}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=\cos\frac{3-k}{3}\pi$ $(k=1,\ 2,\ 3)$

$|\overrightarrow{A_1A_2}|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]

20. 좌표공간에서 정사면체 ABCD의 한 면 ABC는 평면 $2x-y+z=4$ 위에 있고, 꼭짓점 D는 평면 $x+y+z=3$ 위에 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1,\ 1,\ 3)$일 때, 정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이는? [4점]

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

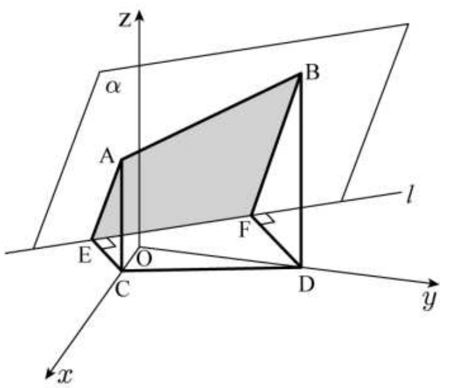
21. 좌표공간에서 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 ABC의 넓이는 6이다.
> (나) 삼각형 ABC의 yz평면 위로의 정사영의 넓이는 3이다.

삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $2\sqrt{6}+1$ ② $2\sqrt{2}+3$ ③ $3\sqrt{5}-1$
④ $2\sqrt{5}+1$ ⑤ $3\sqrt{6}-2$

24. 좌표공간에서 평면 $\alpha: 12x+9y-5\sqrt{3}z+3=0$ 위의 두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발은 각각 C(1,0,0), D(0,3,0)이다. 평면 α와 xy평면의 교선을 l이라 하고, 두 점 C, D에서 교선 l에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자. 이때, 사각형 AEFB의 넓이를 구하시오. [4점]



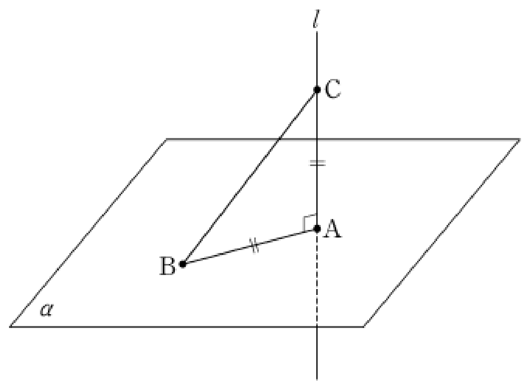
30. 좌표공간에서 구 $S: x^2+y^2+(z-3)^2=4$와 평면 $x-y+z-6=0$이 만나서 생기는 원을 C라 하자. 구 S 위의 점 A$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$과 원 C 위를 움직이는 점 B에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$의 내적 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

27. 좌표공간에서 구

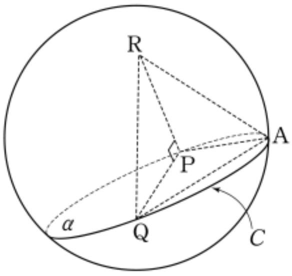
$$S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$$

위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 구 S에 접하는 평면이 구 $x^2+y^2+z^2=16$과 만나서 생기는 도형의 넓이의 최댓값은 $(a+b\sqrt{3})\pi$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 자연수이다.) [4점]

28. 좌표공간에서 직선 $l: x-1=\frac{y}{2}=1-z$와 평면 α가 점 A(1, 0, 1)에서 수직으로 만난다. 평면 α 위의 점 B$(-1, a, a)$와 직선 l 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 이등변삼각형일 때, 점 C에서 원점까지의 거리는 d이다. d^2의 값을 구하시오. [4점]



25. 좌표공간에서 구 S : $x^2+y^2+z^2=4$와 평면 α : $y-\sqrt{3}z=2$가 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 A(0, 2, 0)에 대하여 원 C의 지름의 양 끝점 P, Q를 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구 S와 만나는 또 다른 점을 R라 하자. 삼각형 ARQ의 넓이를 s라 할 때, s^2의 값을 구하시오. [4점]



23. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=50$이 두 평면

$$\alpha : x+y+2z=15$$
$$\beta : x-y-4\sqrt{3}z=25$$

와 만나서 생기는 원을 각각 C_1, C_2라 하자.

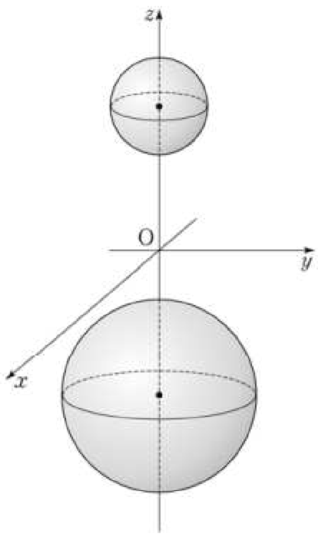
원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 최솟값을 구하시오. [4점]

29. 좌표공간에서 중심이 C(1, 2, 1)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 구가 두 평면 α, β와 접하는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 평면 α, β의 교선의 방정식이 $x=-y=z$일 때, 삼각형 CPQ의 넓이는 S이다. $100S$의 값을 구하시오. [4점]

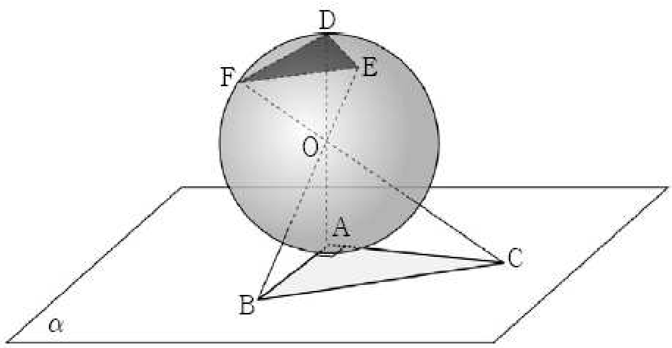
29. 좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-3)^2=1, \quad S_2 : x^2+y^2+(z+3)^2=4$$

가 있다. 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$을 포함하고 S_1과 S_2에 동시에 접하는 평면을 α라 하자. 점 $\mathrm{Q}(k, -\sqrt{3}, 2)$가 평면 α 위의 점일 때 $120k$의 값을 구하시오. [4점]



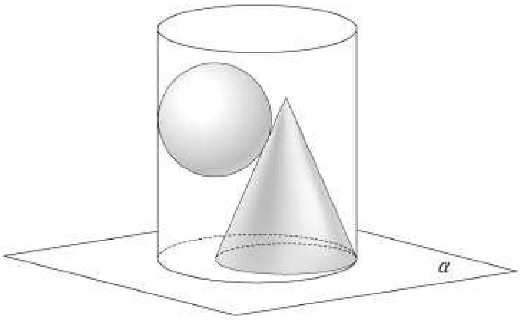
30. 그림과 같이 평면 α 위에 $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 중심이 점 O이고 반지름의 길이가 2인 구가 평면 α와 점 A에서 접한다. 세 직선 OA, OB, OC와 구의 교점 중 평면 α까지의 거리가 2보다 큰 점을 각각 D, E, F라 하자. 삼각형 DEF의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, $100S^2$의 값을 구하시오. [4점]



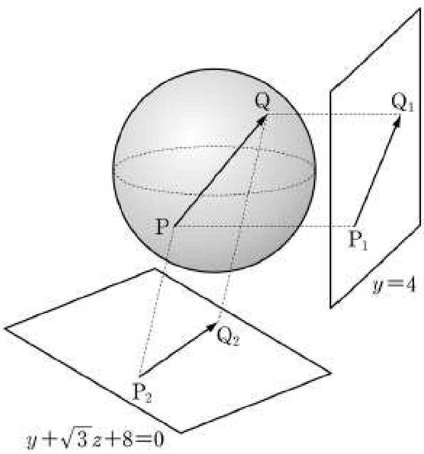
29. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다. (나) 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A′, B′일 때, $\angle \mathrm{A'OB'} = 180°$이다.

직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta = p$이다. $100p$의 값을 구하시오. (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A′은 일치한다.) [4점]



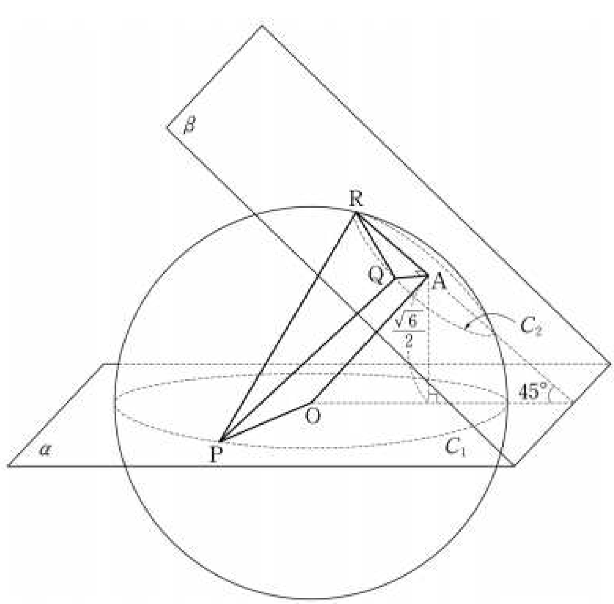
29. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하자. $2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



30. 반지름의 길이가 2인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 이루는 각이 $45°$인 평면을 β라 하자. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β와 구가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

(가) $\angle \mathrm{QAR} = 90°$ (나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다.

평면 PQR와 평면 AQPO가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



※ 얼마 남지 않은 기간, 다들 힘내세요. 다들 수능 대박나서 꼭 원하시는 대학에 붙으시길 바랍니다.