심화서

문제편

REAL

고1

수학(상)

드리는 말

안녕하세요. 정지호입니다. 제가 사정이 생겨 수업을 그만두게 되었습니다. 이제까지 받은 것들이 너무 많아, 제 수업과 교재를 드리고 싶어 이렇게 글을 남깁니다.

이 교재는, 제 교재의 문제 중 강의가 있는 문제들만 추려서 만들었습니다. 그러니 이 문제들만 풀면 이 단원을 마스터했다라는 착각은 하지 마시고, 이 단원에 이런 문제들이 있다 정도로 봐주시면 좋을 것 같습니다. 하지만 많은 학생들이 풀고 도움이 되었으므로 이 문제들을 선보입니다.

강의 검색은 문제 옆의 대괄호안의 이름을 유튜브에 검색하면 나옵니다.

예) 수상 C135번

띄어쓰기도 지켜서 검색하시면 됩니다. 간혹가다 검색이 안 되는 문제들도 있는듯한데, 그건 왜 그런지 저도 잘 모르겠습니다.... 미리 양해 부탁드립니다. 제가 부족해서 교재나 영상의 오타나 오류 등이 있을 수 있습니다. 그것도 미리 미안합니다. 다만, 조금이나마 여러분들에게 도움이 되었으면 하는 마음으로 올리게 되었습니다.

마지막으로 언제나 공부보다, 성적보다 비할 수 없을 정도로 소중한 여러분들임을 잊지 마셨으면 좋겠습니다. 세상에서 가장 멋진 여러분들을 만나게 되어 설렙니다. 항상 응원하고 사랑합니다.

마음으로 가르치는 강사 정 지 호

공 부 법

첫째, 조금이라도 애매하면 모르는 것입니다. 답지를 보거나 영상을 보세요.

둘째, 답지를 보거나 영상을 보았으면, 답지를 덮고, 반드시 다시 풀어야 합니다.

셋째, 책에 틀리거나 애매한 문제도 반드시 문제 옆에 표시하고, 꼭 다시 풀어야 합니다.

다항식

(1) 다항식의 연산
(2) 항등식
(3) 인수분해

방정식과 함수

(4) 복소수
(5) 이차방정식
(6) 이차방정식과 이차함수
(7) 여러 가지 방정식

부등식과 함수

(8) 이차부등식

도형의 방정식

(9) 점
(10) 직선의 방정식
(11) 원의 방정식
(12) 이동

다항식

(1) 다항식의 연산

(2) 항등식

(3) 인수분해

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

4. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

5. $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

6. $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

7. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

8. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

9. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

10. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

11. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

12. $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

13. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

14. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$

15. $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})$ (n이 홀수일 때)

16. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

17. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

18. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]$

19. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

20. $(a-\frac{1}{a})^2=(a+\frac{1}{a})^2-4$

21. $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

1. $(a+b)^2=$

2. $(a-b)^2=$

3. $a^2+b^2=\qquad -2ab$

4. $a^2+b^2=\qquad +2ab$

5. $(a+b)^2=(a-b)^2+$

6. $(a-b)^2=(a+b)^2-$

7. $(a+b)(a-b)=$

8. $(a+b)^3=$

9. $(a-b)^3=$

10. $a^3+b^3=$

11. $a^3+b^3=(a+b)(\qquad\qquad)$

12. $a^3-b^3=$

13. $a^3-b^3=(a-b)(\qquad\qquad)$

14. $a^n-b^n=$

15. $a^n+b^n=(a+b)(\qquad\qquad\qquad\qquad)$ (n이 홀수일 때)

16. $(a+b+c)^2=$

17. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=$

18. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=$

19. $a^3+b^3+c^3-3abc=$

20. $(a-\frac{1}{a})^2=$

21. $a^4+a^2b^2+b^4=(\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$

1. $(a+b)^2=$

2. $(a-b)^2=$

3. $a^2+b^2=\qquad -2ab$

4. $a^2+b^2=\qquad +2ab$

5. $(a+b)^2=(a-b)^2+$

6. $(a-b)^2=(a+b)^2-$

7. $(a+b)(a-b)=$

8. $(a+b)^3=$

9. $(a-b)^3=$

10. $a^3+b^3=$

11. $a^3+b^3=(a+b)(\qquad\qquad)$

12. $a^3-b^3=$

13. $a^3-b^3=(a-b)(\qquad\qquad)$

14. $a^n-b^n=$

15. $a^n+b^n=(a+b)(\qquad\qquad\qquad\qquad)$ (n이 홀수일 때)

16. $(a+b+c)^2=$

17. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=$

18. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=$

19. $a^3+b^3+c^3-3abc=$

20. $(a-\frac{1}{a})^2=$

21. $a^4+a^2b^2+b^4=(\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$

다항식의 덧셈과 뺄셈

(1) 다항식의 정리 방법

① 내림차순 : 다항식을 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 나타내는 것

② 오름차순 : 다항식을 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 높은 항의 순서로 나타내는 것

(2) 다항식의 덧셈과 뺄셈

① 덧셈 : 동류항끼리 모아서 정리한다.

② 뺄셈 : 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어서 더한다.

(3) 다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 $A,\ B,\ C$에 대하여

① 교환법칙 $A+B=B+A$

② 결합법칙 $(A+B)+C=A+(B+C)$

다항식의 곱셈

(1) 다항식의 곱셈

식을 전개한 다음 동류항끼리 모아서 정리한다.

〈참고〉 다항식의 곱셈에서는 다음 지수법칙을 이용한다.

$x^m x^n = x^{m+n}$ (단, $m,\ n$은 자연수)

(2) 다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 $A,\ B,\ C$에 대하여

① 교환법칙 $AB=BA$

② 결합법칙 $(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙 $A(B+C)=AB+AC$

$(A+B)C=AC+BC$

〈참고〉 두 다항식의 합과 차의 곱으로 이루어진 식은

$(■+●)(■-●)=■^2-●^2$

임을 이용하면 쉽게 전개할 수 있다.

곱셈 공식

① $(x+a)(x+b)(x+c)\ =x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

② $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

③ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

④ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑤ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

⑥ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ =a^3+b^3+c^3-3abc$

곱셈 공식의 변형

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

② $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3+b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

④ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

⑤ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

⑥ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

1) [수상 R22번]

$x^2-3x+1=0$일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 구하여라.

2) [수상 R28번]

다항식 $(3a^2+2a+1)^3(a-1)$의 전개식에서 a^5의 계수는?

① 9 ② 18 ③ 27
④ 36 ⑤ 45

3) [수상 R29번]

다항식 $(x^3+2x^2+3y)^3+(x^3+2x^2-3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수를 구하시오.

4) [수상 R30번]

다항식 $\{(x+1)^3+(x-1)^2\}^4$ 의 전개식에서 x 의 계수와 x^{11} 의 계수의 합을 구하시오.

5) [수상 R31번]

0 이 아닌 세 실수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여

$$a+\frac{1}{b}=1,\ b+\frac{1}{c}=2,\ c+\frac{1}{a}=\frac{5}{6}$$

일 때, $abc+\frac{1}{abc}$ 의 값은?

① $-\frac{7}{3}$ ② $-\frac{13}{6}$ ③ -2

④ $-\frac{11}{6}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

6) [수상 R32번]
두 실수 $a,\ b$에 대하여

$$a^2 = 2\sqrt{2}+2,\ b^2 = 2\sqrt{2}-2$$

일 때, $(a^3+b^3)(a^3-b^3)$의 값을 구하시오.

7) [수상 R34번]
$a>1$인 실수 a가 $a^4-\sqrt{5}a^2-1=0$을 만족시킬 때,
$a^6+2a^2-3a+\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{1}{a^6}$의 값은?

① $2+4\sqrt{5}$ ② $3+4\sqrt{5}$ ③ $2+8\sqrt{5}$
④ $3+8\sqrt{5}$ ⑤ $4+8\sqrt{5}$

8) [수상 R35번]

두 실수 x, y에 대하여 $x+y=1$, $x^2+y^2=3$이 성립할 때, x^7+y^7의 값은?

① 26 ② 27 ③ 28
④ 29 ⑤ 30

9) [수상 R37번]

0이 아닌 세 수 x, y, z에 대하여

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0,\ x^2+y^2+z^2=4$$

일 때, $(x-y-z)^{10}$의 값은?

① 2^5 ② 2^{10} ③ 2^{15}
④ 2^{20} ⑤ 2^{25}

10) [수상 R38번]

세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여

$$x+y+z=4,\ x^2+y^2+z^2=10,\ xyz=-2$$

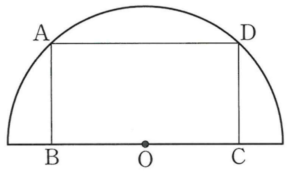
일 때, 다음 식의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오.

(1) $x^3+y^3+z^3$

(2) $x^4+y^4+z^4$

11) [수상 R42번]

그림과 같이 점 O를 중심으로 하는 반원에 내접하는 직사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.



(가) $\overline{\mathrm{OC}}+\overline{\mathrm{CD}}=x+y+3$
(나) $\overline{\mathrm{DA}}+\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BO}}=3x+y+5$

직사각형 ABCD의 넓이를 $x,\ y$의 식으로 나타낸 것은?

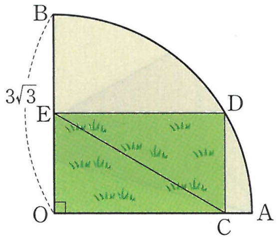
① $(x-1)(y+2)$　② $(x+1)(y+2)$

③ $2(x-1)(y+2)$　④ $2(x+1)(y-2)$

⑤ $2(x+1)(y+2)$

12) [수상 R43번]

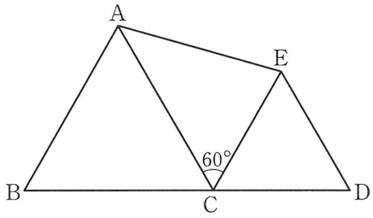
그림과 같이 중심각의 크기가 $90°$이고 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$인 부채꼴 OAB 모양의 땅이 있다. 이 부채꼴에 내접하고 넓이가 11인 직사각형 모양의 잔디밭 OCDE를 만들었다. $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{C}\rightarrow\mathrm{E}\rightarrow\mathrm{B}$를 잇는 최단거리의 길을 만들려고 할 때, 그 길이는?



① $6\sqrt{3}-4$ ② $6\sqrt{3}-5$ ③ $9\sqrt{3}-6$
④ $9\sqrt{3}-7$ ⑤ $9\sqrt{3}-8$

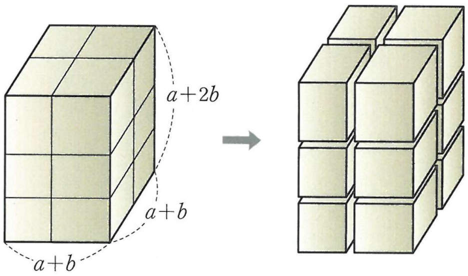
13) [수상 R44번]

그림과 같이 두 정삼각형 ABC, CDE는 $\angle \mathrm{ACE}=60°$를 만족시킨다. $\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=2$이고, 사각형 ABDE의 넓이가 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$일 때, $\overline{\mathrm{BD}}$의 길이는?



① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

14) [수상 R46번]
서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 세 모서리의 길이가 각각 $a+b$, $a+b$, $a+2b$인 직육면체가 있다. 이 직육면체를 그림과 같이 각 모서리의 길이가 a 또는 b가 되도록 12개의 작은 직육면체로 나누었을 때, 부피가 150인 직육면체는 5개이다. $a+2b$의 값을 구하시오.



15) [수상 R47번]
합이 3인 세 실수 a, b, c가

$$2a+b=3ab,\ 2b+c=3bc,\ 2c+a=3ca$$

를 만족시킬 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

16) [수상 R48번]

세 실수 x, y, z가 $x+y+z=0$, $x^3+y^3+z^3=6$, $x^5+y^5+z^5=15$를 만족할 때, $x^2+y^2+z^2$의 값을 구하여라.

17) [수상 R49번]

$a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=14$, $abc=6$일 때, $a^2b^2c+a^2bc^2+ab^2c^2$의 값을 구하여라.

18) [수상 R50번]

다항식 $P(x)=\{(x-2)^4+6(x-2)^3+12(x-2)^2\}^3$을 정리하면 $(x-2)^m(x^3-n)^3$과 같다. 다항식 $P(x)$의 x^{3m}의 계수와 x^n의 계수의 합을 구하시오. (단, m, n은 자연수이다.)

19) [수상 R52번]

세 실수 x, y, z가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x+2y-z=12$
(나) $x^2+4y^2+z^2=2xy-2yz-zx$

$x^2+y^2+z^2$의 값을 구하시오.

20) [수상 R54번]
네 실수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여

$$a-b=4,\ ab=-1,$$
$$c+d=1,\ cd=-3$$

일 때, $(ac-bd)^3-(bc-ad)^3$의 값을 구하시오.

21) [수상 R55번]
0이 아닌 두 실수 $a,\ b$에 대하여

$$a+\frac{1}{b}=3+\sqrt{5},\ b+\frac{1}{a}=3-\sqrt{5}$$

일 때, a^3+b^3의 값을 구하시오.

22) [수상 R56번]
실수 x, y, z에 대하여 $f(x,\ y,\ z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$라 하자. $f(a,\ b,\ c)=1$인 세 실수 a, b, c에 대하여 $f(b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

다항식

(1) 다항식의 연산

(2) 항등식

(3) 인수분해

· 등식의 성질

(1) 등식

식 $20-4=16$, $2x+4=3x$와 같이 등호를 사용하여 나타낸 식을 등식이라고 한다.

(2) 방정식

$x=3$이면 등식 $2x+(x-4)=5$는 참이 된다. 그러나 $x=1$, $x=2$, $x=4$이면 등식 $2x+(x-4)=5$는 거짓이 된다. 이와 같이 x의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식을 x에 관한 방정식이라고 한다. 이때 문자 x를 미지수라 하고, 방정식을 참이 되게 하는 미지수 x의 값을 그 방정식의 해 또는 근이라고 한다. 또, 방정식의 해를 구하는 것을 방정식을 푼다고 한다.

(3) 항등식

등식 $3x=x+2x$는 미지수 x에 어떤 수를 대입하여도 항상 참이 된다. 이와 같이 x가 어떤 값을 가지더라도 항상 참이 되는 등식을 x에 관한 항등식이라고 한다.

항등식과 미정계수법

(1) 항등식 : 등식에 포함된 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식

(2) 항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$ 이 x 에 대한 항등식이면
$a=b=c=0$ 이다.

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ 이 x 에 대한 항등식이면
$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$ 이다.

(3) 미정계수법

① 계수 비교법 : 양변의 동류항의 계수를 비교하여 계수를 정하는 방법

② 수치 대입법 : 문자에 적당한 수를 대입하여 계수를 정하는 방법

〈참고〉 항등식에서 미정계수를 구할 때

① 다항식의 전개가 간단하면 ⇨ 계수 비교법

② 어떤 수를 대입하여 0 이 되는 항이 여러 개 있으면 ⇨ 수치 대입법

다항식의 나눗셈

(1) 다항식의 나눗셈

두 다항식을 내림차순으로 정리한 후, 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

예를 들어 $(-x+6x^2+3)\div(-1+2x)$를 할 때 먼저

$$(6x^2-x+3)\div(2x-1)$$

과 같이 정리하고 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{array}{r|l} & \quad\;\; 3x+1 \\ \hline 2x-1 & 6x^2-\;\; x+3 \\ & 6x^2-3x \\ \hline & \quad\;\; 2x+3 \\ & \quad\;\; 2x-1 \\ \hline & \qquad\quad 4 \end{array} \qquad \xleftarrow{\text{몫}}\;\xrightarrow{\text{몫}} \qquad \begin{array}{r|l} & \;\; 26 \\ \hline 5 & 132 \\ & 10 \\ \hline & \;\; 32 \\ & \;\; 30 \\ \hline & \quad 2 \end{array}$$

몫 / 나머지

<다항식의 나눗셈> <자연수의 나눗셈>

여기서 마지막 4는 $2x-1$보다 차수가 낮기 때문에 더 이상 나눌 수 없다. 따라서 $6x^2-x+3$을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $3x+1$, 나머지는 4이다.

몫

$$6x^2-x+3=(2x-1)(3x+1)+4 \qquad 132=5\times26+2$$

나머지

(2) 다항식 A를 다항식 $B\,(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (단,(R의 차수)$<$(B의 차수))

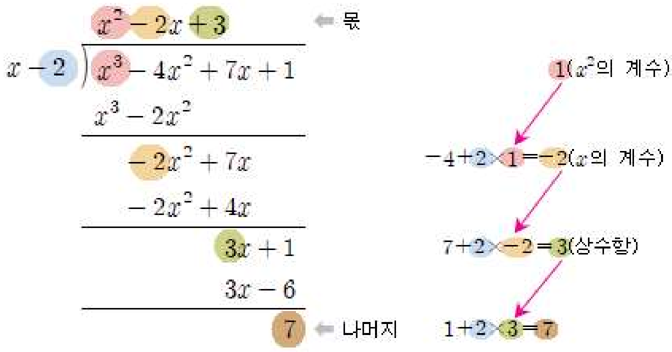
특히 $R=0$일 때, A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

조립제법

다항식 $f(x)$를 $x-a$꼴의 일차식으로 나눌 때, 계수만을 사용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 조립제법이라고 한다.

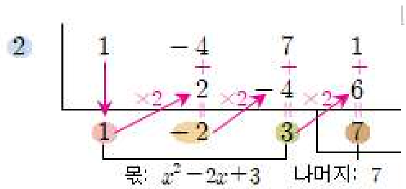
<예>

예를 들어 다항식 $P(x)=x^3-4x^2+7x+1$을 $x-2$로 나누면 다음과 같다.



따라서 몫은 x^2-2x+3이고, 나머지는 7이다.

이때 $P(x)$의 각 항의 계수만을 이용하여 오른쪽과 같이 몫의 각 항의 계수와 나머지를 차례로 구할 수 있다.



이와 같이 다항식 $P(x)$를 일차식으로 나눌 때 $P(x)$의 각 항의 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 **조립제법**이라고 한다.

<참고> 다항식 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$ $(a\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$

$$=\frac{1}{a}(ax+b)Q(x)+R$$

$$=(ax+b)\cdot\frac{1}{a}Q(x)+R$$

따라서 다항식 $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 R'이라 하면

$$Q'(x)=\frac{1}{a}Q(x),\ R'=R$$

나머지정리와 인수정리

(1) 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=f(\alpha)$

(2) 인수정리

다항식 $f(x)$에 대하여

① $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

② $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

<참고> 다항식 $f(x)$를 n차식으로 나누었을 때의 나머지는 $(n-1)$차 이하의 다항식이므로 나머지를 $a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$으로 놓는다.(단, $a_1, a_2, \cdots, a_n$은 상수이다.)

1. 방정식 vs 항등식

$x(x-2)=0$ $x^2-2x=x(x-2)$

해가 존재 모든 x에 대해 성립

x에 관계없이 성립

※ 모든 곱셈공식은 항등식

2. 항등식 푸는 방법

① 계수비교법 : 양변을 전개하여 비교한다.

ex1) $ax(x-1)+bx+c(x-1)=x^2+x+1$

$ax^2+(b+c-a)x-c=x^2+x+1$

$a=1, c=-1, b=3$

② 수치대입법 : 항등식이므로 아무 수치나 대입하여 구한다.

ex2) $ax(x-1)+bx+c(x-1)=x^2+x+1$

$x=1$대입 $b=3$

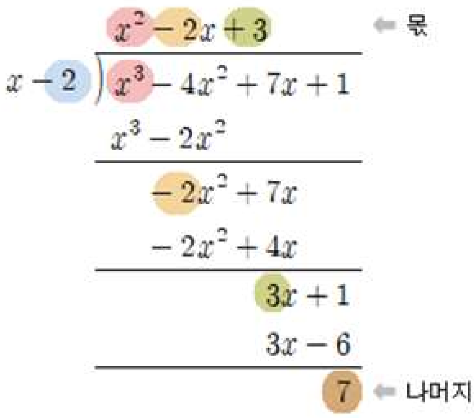
$x=0$대입 $-c=1, c=-1$

a는 좌변의 이차항의 계수, 우변의 이차항의 계수도 1이므로 $a=1$

3. 몫과 나머지를 구하는 방법

① 나눗셈

ex3) x^3-4x^2+7x+1을 $x-2$로 나눈 몫, 나머지

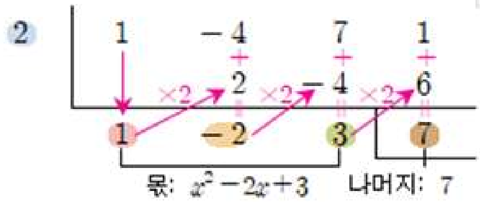


하지만, 나누고 난 후 가장 중요한 것은 표현하는 것이다.

$x^3-4x^2+7x+1=(x-2)(x^2-2x+3)+7$

② 조립제법(단, 일차식으로 나눌 때만 가능)

ex4) x^3-4x^2+7x+1을 $x-2$로 나눈 몫, 나머지



하지만, 조립제법을 쓰고 난 후 가장 중요한 것은 표현하는 것이다.

$x^3-4x^2+7x+1=(x-2)(x^2-2x+3)+7$

4. 나머지만 구하는 방법

① 나머지정리

ex5) x^3-4x^2+7x+1을 $x-2$로 나눈 나머지

$x^3-4x^2+7x+1=(x-2)Q(x)+R$

$x=2$대입 $7=R$

※ 이차로 나누었을 때는 나머지 $R(x)=ax+b$

삼차로 나누었을 때는 나머지 $R(x)=ax^2+bx+c$

② 인수정리(나머지 정리와 같다. 나머지 없을 때)

ex6) $3x^3+kx^2-6x-4$가 $x-2$로 나누어떨어질 때, 상수 k의 값을 구하여라.

$3x^3+kx^2-6x-4=(x-2)Q(x)$

$x=2$대입 $24+4k-16=0, k=-2$

23) [수상 R66번]
99^{100}을 98로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

24) [수상 R67번]
다음에 답하여라.
(1) $(x-1)^9$을 x로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

(2) (1)의 결과를 이용하여 74^9을 75로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

25) [수상 R68번]
2^{1111}을 17로 나누었을 때의 나머지는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

26) [수상 R70번]
모든 실수 x에 대하여 등식

$$x^3+x^2+x+4=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$$

가 성립할 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $abcd$의 값을 구하여라.

27) [수상 R74번]

모든 실수 x에 대하여 등식

$$(3x^2-x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$$

이 성립할 때, $\frac{a_1}{3}+\frac{a_3}{3^3}+\frac{a_5}{3^5}+\cdots+\frac{a_9}{3^9}$의 값은?

(단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}은 상수이다.)

① $\frac{1-3^5}{3^6}$ ② $\frac{1-3^5}{2\times3^5}$ ③ $\frac{1-3^5}{3^5}$

④ $\frac{1+3^5}{2\times3^5}$ ⑤ $\frac{1+3^5}{3^5}$

28) [수상 R75번]

x에 대한 등식

$$(x^3+x^2-2x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{18}x^{18}$$

이 모든 실수 x에 대하여 성립할 때,

$a_5+a_8+a_{10}+a_{12}+a_{14}+a_{16}+a_{18}$의 값은?

(단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_{18}은 상수이다.)

① -32 ② -16 ③ 0

④ 16 ⑤ 32

29) [수상 R76번]
모든 실수 x에 대하여 등식

$$\left(\frac{x}{2}+1\right)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8$$

이 성립할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_8은 상수이다.)

ㄱ. $a_0 - 2a_1 + 4a_2 - \cdots + 256a_8 = 0$
ㄴ. $2a_2 + 8a_4 + 32a_6 = 63$
ㄷ. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = \frac{205}{16}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30) [수상 R77번]
다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+3$이고, $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(3)$의 값을 구하시오.

31) [수상 R78번]

다항식 $f(x)$를 x^3+5로 나누었을 때의 나머지가 x^2-2x이고, 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 11이다. 다항식 $f(x)$를 $(x^3+5)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 24 ② 25 ③ 26

④ 27 ⑤ 28

32) [수상 R79번]

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지는 $-3x+1$이고, $x-2$로 나눈 나머지는 4이다. $f(x)$를 $(x+1)^2(x-2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하시오.

33) [수상 R80번]
다항식 $f(x)$를 $(x+2)^3$으로 나누었을 때의 나머지가 $2x^2+4x-1$이고, $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $4x-8$이다. 다항식 $f(x)$를 $(x+2)^2(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하시오.

34) [수상 R81번]
삼차식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 다항식 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 2이다.
(나) 다항식 $f(x)$를 $(x+3)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지는 서로 같다.

다항식 $f(x)$를 $(x+3)^3$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(0)=R(-2)$이다. $f(-4)$의 값을 구하시오.

35) [수상 R82번]
나머지정리를 이용하여 다음 물음에 답하시오.
(1) 253^{11}을 254로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(2) $8^{100}+8^{99}+8^{98}+\cdots+8+1$을 7로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

36) [수상 R83번]
10^{39}을 99×101로 나누었을 때의 나머지는?

① 1 ② 10 ③ 100
④ 1000 ⑤ 10000

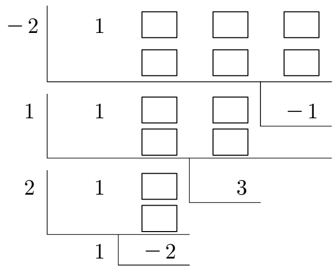
37) [수상 R84번]

2×3^{79}을 80으로 나누었을 때의 나머지는?

① 2　　② 6　　③ 24
④ 54　　⑤ 72

38) [수상 R85번]

다음은 최고차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 세 일차식 $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$에 대하여
$f(x)=-1+3P(x)-2P(x)Q(x)+P(x)Q(x)R(x)$
를 만족시키도록 조립제법을 이용하는 과정이다.



$f(1)+P(2)+Q(3)+R(4)$의 값을 구하시오.

39) [수상 R86번]
삼차식 $P(x)$에 대하여 조립제법을 세 번 한 결과가 다음과 같다. 다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는?

-1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	
		$\square$	$\square$	$\square$	
-1	$\square$	$\square$	$\square$	3	
		$\square$	$\square$		
-1	$\square$	$\square$	4		
		$\square$			
	2	-1			

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

40) [수상 R87번]
다음은 삼차식 $f(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$와 나머지 $R(x)$를 구하기 위해 조립제법을 두 번 이용한 결과이다. $Q(1)+R(-1)$의 값은?

$\frac{1}{2}$	$\square$	$\square$	$\square$	
		$\square$	$\square$	$\square$
$\frac{1}{2}$	$\square$	$\square$	$\square$	6
		$\square$	$\square$	
	4	-12	-2	

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

41) [수상 R88번]
모든 실수 x에 대하여
$3x^3+2x^2-x+1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$
가 성립할 때, 네 상수 a, b, c, d에 대하여
$2a+b+2c+d$의 값을 구하시오.

42) [수상 R89번]
최고차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

(가) $f(-2)=f(0)=f(2)$
(나) 다항식 $f(x)$는 $x-1$로 나누어떨어진다.

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

43) [수상 R90번]
삼차식 $f(x)$는

$$f(1)-1=f(2)-2=f(3)-3$$

을 만족시킨다. 다항식 $f(x)$를 $x(x+1)$로 나누었을 때의 나머지가 $-17x-10$일 때, $f(-2)$의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오.

44) [수상 R91번]
최고차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$를 $x-n\ (n=1,\ 2,\ 3)$으로 나누었을 때의 나머지가 $2n^2-n$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

45) [수상 R92번]
삼차식 $P(x)$에 대하여

$$\frac{P(1)}{P(2)}=2,\ \frac{P(2)}{P(3)}=\frac{3}{2},\ \frac{P(3)}{P(4)}=\frac{4}{3},\ P(4)=\frac{7}{4}$$

일 때, 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

46) [수상 R93번]
최고차항의 계수가 1인 사차식 $f(x)$에 대하여

$$f(1)=0,\ f(2)=1,\ f(3)=4,\ f(4)=9$$

이다. 다항식 $f(x)$를 x^2-5x+2로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

47) [수상 R94번]
삼차식 $P(x)$가

$$P(k)=2^{k}-1\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

을 만족시킬 때, $P(5)$의 값을 구하시오.

48) [수상 R98번]
x에 대한 다항식 $f(x)=x^{3}-7x^{2}+ax-a+3$이 $x+2$를 인수로 가질 때, 상수 a의 값은?

① -11 ② -7 ③ 5
④ 17 ⑤ 39

49) [수상 R99번]
m차 다항식 $f(x)$를 n차 다항식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $m,\ n$은 자연수이고, $m>n$이다.)

ㄱ. 다항식 $Q(x)$의 차수는 $m-n$이다.
ㄴ. $m-n=1$이면 $R(x)$는 상수이다.
ㄷ. $m+n=10$이고 다항식 $R(x)$의 차수가 $\frac{m-n}{2}$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은 7이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

50) [수상 R100번]
임의의 실수 x에 대하여 다항식 $f(x)$가
등식 $f(x^2+2x)=x^2f(x)+8x+8$
을 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

51) [수상 R101번]
다항식 $(x^2+x+2)^3$을 x^2+1로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(5)$의 값을 구하여라.

52) [수상 R103번]
다항식 $2x^3+3x^2-x+a$가 x^2-x+b로 나누어떨어질 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

53) [수상 R108번]
삼차 다항식 $P(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$이고 나머지는 5이다. 다항식 $P(x)$를 $2Q(x)-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지의 합을 바르게 나타낸 것은?

① $2x-6$ ② $x-6$ ③ x
④ $x+6$ ⑤ $2x+6$

54) [수상 R110번]
두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다항식 $f(x)+g(x)$를 x^2-3x+7로 나누었을 때의 나머지가 2이고, 다항식 $f(x)-2g(x)$를 $(x-1)(x^2-3x+7)$로 나누었을 때의 나머지가 x^2+6x-9이다. 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+7로 나누었을 때의 나머지는?

① $x-4$ ② $3x-4$ ③ $3x+7$
④ $3x-12$ ⑤ $9x-12$

55) [수상 R111번]

다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫은 2이고 나머지가 $x+3$이다. 다항식 $\{f(x)\}^3$을 $(x^2+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(-1)$의 값을 구하시오.

56) [수상 R115번]

$\frac{2x-6y+a}{bx+3y+5}$가 x, y의 값에 관계없이 항상 일정한 값을 갖도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

(단, $bx+3y+5 \neq 0$)

① -10　② -11　③ -12

④ -13　⑤ -14

57) [수상 R116번]
다항식 $f(x)=x^3-2x^2+5$에 대하여

$$f(a-2x)=-8x^3+4x^2+bx+c$$

가 x의 값에 관계없이 항상 성립한다. 세 상수 a, b, c에 대하여 $a-b+c$의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3
④ 5 ⑤ 7

58) [수상 R118번]
다항식 $f(x)$를 $2x^3-6x^2+5x$로 나누었을 때의 나머지는 $-2x^2+ax+7$이고, $x^2-3x+\frac{5}{2}$로 나누었을 때의 나머지는 $4x+b$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

59) [수상 R119번]
삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)$는 x^2+x+1로 나누어떨어지고, $f(x)+6$은 x^2+2로 나누어떨어진다. $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

60) [수상 R120번]
모든 실수 x에 대하여 다항식 $f(x)$가

$$f(x^2+x)=x^2f(x)+x(1+2x+3x^2)+1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

61) [수상 R123번]
두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다항식 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 5이고, 다항식 $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 80일 때, 다항식 $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

62) [수상 R124번]
다항식 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+1)=f(x)+3x^2-x$$

를 만족시킨다. 다항식 $f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지가 3일 때, 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지는?

① $2x+1$ ② $3x+2$ ③ $4x+3$
④ $5x+4$ ⑤ $6x+5$

63) [수상 R126번]
다항식 x^9을 $x+2$로 나누었을 때의 몫을

$$Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$$

이라 할 때, $a_1+a_3+a_5+a_7$의 값을 구하시오.

(단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_8은 상수이다.)

64) [수상 R127번]
다항식 $x^{20}+2x+5$를 x^2+x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, 다항식 $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합을 구하시오.

65) [수상 R130번]

삼차식 $P(x)$에 대하여 다항식 $P(x)-2x$가 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지고, 다항식 $1-P(x)$가 x^2+4x+3으로 나누어떨어질 때, $P(2)$의 값은?

① -48 ② -46 ③ -44
④ -42 ⑤ -40

66) [수상 R131번]

일차 이상의 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 두 다항식 $3xf(x)+g(x)$와 $f(x)+g(x)-4x$가 모두 $x-1$로 나누어떨어진다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. 다항식 $3f(x)+xg(x)$는 $x-1$로 나누어떨어진다.
ㄴ. 다항식 $f(x-1)+g(x-1)$은 $x-2$로 나누어떨어진다.
ㄷ. 다항식 $\{f(x)+2\}\{g(x)-6\}$은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

67) [수상 R132번]
최고차항의 계수가 1인 두 삼차식 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)f(x)=(x+2)g(x)$$

를 만족시킨다. 다항식 $f(x)$는 $x-2$로 나누어떨어지고, 다항식 $g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 12일 때, $f(3)+g(4)$의 값을 구하시오.

68) [수상 R134번]
x에 대한 다항식 $x^{2009}+ax^{2008}+bx^{2007}+2^{2008}$을 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $2^{2008}(x-1)$이다. 이때 $a+b$의 값은?

69) [수상 R135번]

상수 a, b에 대하여 다항식 ax^3+bx^2+1이 x^2-x-1로 나누어 떨어질 때, $a+b$의 값을 구하여라.

70) [수상 R136번]

다항식 $f(x)$에 대하여

$$f(x+1)+x^4 f\left(\frac{1}{x^2}\right)=5x^4-x^2+x+6$$

이 x에 대한 항등식일 때, $f(1)$의 값은?

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

71) [수상 R137번]
3 이하의 자연수 n에 대하여 A_n을 다음과 같이 정한다.

(가) $\mathrm{A}_1 = 9+99+999$
(나) $\mathrm{A}_n =$(세 수 $9, 99, 999$에서 서로 다른 $n(n \geq 2)$개를 택하여 곱한 수의 총합)

$A_1 + A_2 + A_3$의 값을 1000으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

72) [수상 R139번]
이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(a+b)$의 값을 f를 이용하여 나타내시오. (단, a, b는 서로 다른 실수이다.)

73) [수상 R140번]
모든 계수가 실수인 이차 이하의 다항식 $P(x)$에 대하여 등식

$$\{P(x)\}^2 = P(x^2) + 2x^2$$

이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 다항식 $P(x)$의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

74) [수상 R141번]
다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$가 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f\left(x + 3 - \frac{1}{x}\right) = x^3 + x^2 + 3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$을 만족시킨다. 세 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a + b - c$의 값은?

① 26 ② 29 ③ 32
④ 35 ⑤ 38

75) [수상 R142번]
다항식 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 나머지가 $-x^2+ax+b$이고, 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$, $x-1$로 각각 나누었을 때의 나머지의 합이 $2x-6$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -24 ② -20 ③ -16
④ -12 ⑤ -8

76) [수상 R143번]
두 다항식 x^3-4x+5, x^3-3x^2+5x-1을 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 나머지가 서로 같을 때, 그 나머지를 $R(x)$라 하자. 두 상수 a, b에 대하여 $R(a+b)$의 값을 구하시오.

77) [수상 R144번]

x에 대한 이차식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 다항식 x^3+3x^2+4x+2를 $f(x)$로 나누었을 때의 나머지는 $g(x)$이다.
> (나) 다항식 x^3+3x^2+4x+2를 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지는 $f(x)-x^2-2x$이다.

$g(1)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

78) [수상 R145번]

다항식 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 다항식 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 14이다.
> (나) 다항식 $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지는 $-3x+1$이다.

다항식 $(x-1)f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(4)$의 값을 구하시오.

79) [수상 R146번]

다항식 $x^{27}+x^{26}+x^{24}+x^{23}+x+3$을 $x^4+x^3+x^2+x+1$로 나누었을 때의 나머지는?

① $x+2$
② x^2+2
③ x^2+x+2
④ x^3+1
⑤ x^3+x^2+x+1

80) [수상 R147번]

다항식 $x^{50}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(10)$의 값을 구하시오.

81) [수상 R148번]

다항식 x^8을 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R_1이라 하고 다항식 $Q(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 나머지를 R_2라 할 때, $\frac{R_2}{R_1}$의 값은?

① -64 ② -32 ③ -16
④ -8 ⑤ -4

82) [수상 R149번]

다항식 $x^{31}-1$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(1)$의 값은?

① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

다항식

(1) 다항식의 연산

(2) 항등식

(3) 인수분해

인수분해

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 식의 인수라고 한다. 또, 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 인수분해한다고 한다.

$$x^2+4x+3 \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x+3)$$

인수분해 공식

① $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

② $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

③ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

④ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

⑤ $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

〈참고〉 ⑤에서 $a+b+c=0$ 이면 $a^2+b^2+c^2=3abc$ 이다.

치환을 이용한 인수분해

(1) 공통부분이 있는 다항식

① 공통부분을 치환하여 인수분해한다.

② 공통부분이 생기도록 주어진 식을 변형한 후 치환한다. $R=f(\alpha)$

(2) $\boldsymbol{x^4+ax^2+b}$ 꼴의 다항식

① $x^2=X$ 로 치환하여 X^2+aX+b 를 인수분해한다.

② 주어진 식을 $(x^4+cx^2+b)-dx^2$ 으로 나타내어 A^2-B^2 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

〈참고〉 (2) 복이차식에서 완전제곱식 꼴을 만들 때, x^4 항과 상수항을 고정시키고 x^2 항을 더하거나 뺀다.

여러 개의 문자를 포함한 식의 인수분해

두 개 이상의 문자를 포함한 식 중에서 인수분해 공식을 직접 적용할 수 없는 것은 다음과 같이 인수분해한다.

① **차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순**으로 정리하여 인수분해한다.

② 차수가 같을 때에는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

〈참고〉 한 문자에 대하여 정리할 때, 그 문자가 아닌 나머지 문자들은 상수로 생각한다.

인수정리를 이용한 인수분해

삼차 이상의 다항식 $f(x)$ 에 인수분해 공식을 적용할 수 없을 때에는 다음과 같이 인수분해한다.

(ⅰ) $f(\alpha)=0$ 을 만족하는 상수 α 의 값을 구한다.

(ⅱ) 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 $x-\alpha$ 로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$ 를 구한다.

(ⅲ) $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 와 같이 정리한다.

(ⅳ) $Q(x)$ 에 대하여 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 방법을 적용한다.

〈참고〉 계수가 정수인 다항식 $f(x)$ 에서 $f(\alpha)=0$ 을 만족시키는 α 의 값은

$$\pm\frac{f(x)\text{의 상수항의 약수}}{f(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수}}$$

중에서 찾는다.

예) $24x^3-8x^2-6x+2$

1. 기본전제 : 유리수 범위까지 인수분해하면 된다.

ex1) $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ (x)

2. 복이차식

ex2)

$x^4+9x^2+25=(x^4-10x^2+25)+19x^2$

=x

$x^4+9x^2+25=(x^4+10x^2+25)-x^2$

$=(x^2+5)^2-x^2=(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

3. 복잡한 식: 차수가 가장 낮은 문자로 내림차순

ex3) $a^2b-a^3c+bc-ac^2=(a^2+c)b-a^3c-ac^2$

$=(a^2+c)b-ac(a^2+c)$

$=(a^2+c)(b-ac)$

ex4) $a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+2abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

4. 고차제곱식 : x^2으로 묶는다.

ex5) $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=x^2\left(x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)$

$=(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$

5. 조립제법 : 계수가 정수인 다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은

$\pm\frac{f(x)\text{의 상수항의 약수}}{f(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수}}$

중에서 찾는다.

ex6) $24x^3-8x^2-6x+2=4(x-\frac{1}{2})(3x-1)(2x+1)$

83) [수상 R162번]
다음 식을 인수분해하여라.
$x^4 - 10x^2 + 9$

84) [수상 R163번]
$a=9996$이라 할 때, a^2의 각 자리 숫자의 합을 구하시오.

85) [수상 R166번]
6^6-1이 두 자리 자연수 n으로 나누어떨어진다고 할 때, n의 값을 모두 구하여라.

86) [수상 R168번]
세 양의 실수 x, y, z가 $x^3+8y^3+8z^3=12xyz$를 만족시킬 때, $\frac{4z^2}{xy}+\frac{2xz}{y^2}+\frac{3x^2}{yz}$의 값을 구하시오.

87) [수상 R169번]
서로 다른 세 실수 a, b, c가 $\frac{a^3-b^3}{b^3-c^3}=\frac{a-b}{b-c}$를 만족시킬 때, $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$의 값은? (단, $abc \neq 0$)

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

88) [수상 R170번]
이차식 $f(x)$에 대하여 x에 대한 다항식

$$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+k$$

가 $\{f(x)\}^2$꼴로 인수분해될 때, 상수 k의 값과 $f(x)$로 옳은 것은?

① $k=-8$, $f(x)=x^2+8x+16$
② $k=-8$, $f(x)=x^2+10x+20$
③ $k=16$, $f(x)=x^2+8x+16$
④ $k=16$, $f(x)=x^2+10x+20$
⑤ $k=16$, $f(x)=x^2+12x+24$

89) [수상 R171번]
다항식 $x^4+(n-1)x^3+nx^2+(n-1)x+1$이 x^2+kx+1 $(k\neq 1)$로 나누어떨어지도록 하는 자연수 n의 값을 $f(k)$라 하자. $f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

90) [수상 R173번]

<보기>의 다항식 중 $a-b+c$를 인수로 갖는 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$
ㄴ. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$
ㄷ. $a^2(b+c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)-abc$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄷ

91) [수상 R176번]

모든 실수 x에 대하여 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(x-2)f(x)=(x+1)g(x)$
(나) $f(x)g(x)=4x^4-11x^2-9x-2$

$f(2)-g(3)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

92) [수상 R178번]

다항식 x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$을 인수로 가질 때, 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

93) [수상 R179번]

$\dfrac{19^6-11^6}{19^4+19^2\times 11^2+11^4}$의 값을 구하시오.

94) [수상 R181번]

$x=2+\sqrt{6}$ 일 때, $\dfrac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x}$의 값은?

① 1　② $\dfrac{3}{2}$　③ 2

④ $\dfrac{5}{2}$　⑤ 3

95) [수상 R183번]

어떤 자연수로 $2^{12}-1$을 나눌 때, 나누어떨어지도록 하는 30보다 크고 40보다 작은 모든 자연수의 합은?

① 65　② 68　③ 71

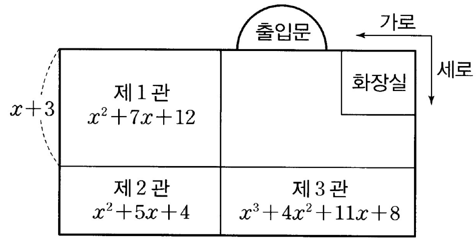
④ 74　⑤ 77

96) [수상 R184번]
삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에

$$a^3-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2-b^3=0$$

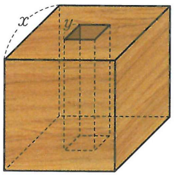
인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 서술하시오.

97) [수상 R186번]
다음 그림은 어떤 박물관 1층의 평면도이다. 제1관, 제2관, 제3관은 모두 직사각형 모양이고 각각의 넓이는 $x^2+7x+12$, x^2+5x+4, $x^3+4x^2+11x+8$이다. 제1관의 세로의 길이가 $x+3$일 때, 제3관의 가로의 길이는 x^2+ax+b이다. 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?(단, x는 양수이다.)

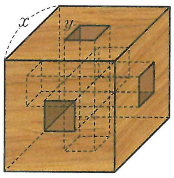


① 8 ② 16 ③ 24
④ 32 ⑤ 40

98) [수상 R188번]
한 모서리의 길이가 x인 정육면체 모양의 나무토막이 있다. [그림 1]과 같이 이 나무토막의 윗면의 중앙에서 한 변의 길이가 y인 정사각형 모양으로 아랫면의 중앙까지 구멍을 뚫었다.
구멍은 정사각기둥 모양이고, 각 모서리는 처음 정육면체의 모서리와 평행하다. 이와 같은 방법으로 각 면에 구멍을 뚫어 [그림 2]와 같은 입체도형을 얻었다.



[그림1]



[그림2]

[그림 2]의 입체의 부피를 x, y로 나타낸 것은?

① $(x-y)^2(x+2y)$
② $(x-y)(x+2y)^2$
③ $(x+y)^2(x-2y)$
④ $(x+y)(x-2y)^2$
⑤ $(x+y)^2(x+2y)$

99) [수상 R189번]
$\frac{900 \cdot 901+1}{931}$을 계산하여라.

100) [수상 R190번]

최고차항의 계수가 1인 다항식 $f(x)$가 등식 $(x+7)f(2x)=8xf(x+1)$을 만족시킬 때, $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 구하시오.

101) [수상 R191번]

0이 아닌 세 실수 x, y, z에 대하여

$$x^3+y^3+z^3=3xyz$$ 일 때,

$\dfrac{2x^2}{y^2+z^2-x^2}+\dfrac{2y^2}{z^2+x^2-y^2}+\dfrac{2z^2}{x^2+y^2-z^2}$의 모든 값의 합은?

① -6　② -3　③ 0
④ 3　⑤ 6

102) [수상 R192번]
인수분해를 이용하여 n^4+4꼴로 표현되는 소수를 모두 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

103) [수상 R193번]
다항식
$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$
을 인수분해 하시오.

104) [수상 R196번]
다항식 x^3+3x^2-7x+2를 이차항의 계수가 1인 서로 다른 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$로 나누었을 때의 나머지가 모두 $2x-3$이다. 다항식 $A(x)+B(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -4 ② -1 ③ 2
④ 5 ⑤ 8

105) [수상 R199번]
소수 N이 자연수 a에 대하여 $N=a^4-3a^2+9$와 같이 표현된다. 가능한 모든 소수 N의 값의 합을 구하시오

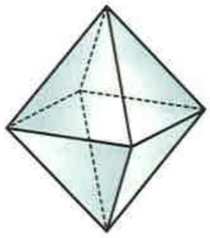
106) [수상 R203번]

다항식 $x^{27}+x^{26}+x^{24}+x^{23}+x+3$ 을 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는?

① $x+2$
② x^2+2
③ x^2+x+2
④ x^3+1
⑤ x^3+x^2+x+1

107) [수상 R205번]

그림과 같이 여덟 개의 정삼각형으로 이루어진 정팔면체가 있다. 여섯 개의 꼭짓점에는 자연수를 적고 여덟 개의 정삼각형의 면에는 각각의 삼각형의 꼭짓점에 적힌 세 수의 곱을 적는다. 여덟 개의 면에 적힌 수들의 합이 105일 때, 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 수들의 합을 구하시오.



108) [수상 R206번]
x, y, z에 대한 다항식
$x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)$를 인수분해 하는 과정을
서술하시오.

방정식과 함수

(4) 복소수

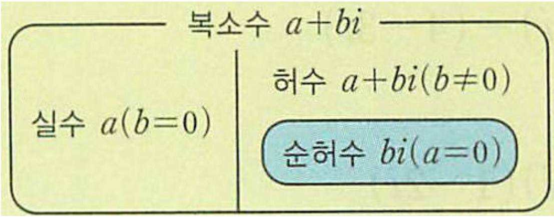
(5) 이차방정식

(6) 이차방정식과 이차함수

(7) 여러 가지 방정식

a, b 가 실수일 때,

- 복소수 $a+bi$
  - 실수 $a(b=0)$
    - 유리수
      - 정수
        - 양의 정수(자연수)
        - 0
        - 음의 정수
      - 정수가 아닌 유리수
    - 무리수
  - 허수 $a+bi(b\neq 0)$
    - 순허수 $bi(a=0,\ b\neq 0)$
    - 순허수가 아닌 허수 $a+bi(a\neq 0,\ b\neq 0)$



복소수의 뜻과 복소수가 서로 같을 조건

(1) 제곱하여 -1이 되는 수를 i로 나타내고, 이것을 허수단위라 한다. 즉 $i^2=-1$이며, $i=\sqrt{-1}$로 나타낸다.

(2) 실수 a, b에 대하여 $a+bi$ 꼴의 수를 복소수라 하고, a를 $a+bi$의 실수부분, b를 $a+bi$의 허수부분이라 한다.

이때 $b=0$이면 $a+bi$는 실수이고, $b\neq 0$이면 $a+bi$는 허수이다.

〈참고〉 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에서 $a=0$, $b\neq 0$일 때, bi를 순허수라 한다.

(3) 복소수가 서로 같을 조건

두 복소수 $a+bi$, $c+di$ (a, b, c, d는 실수)에 대하여

① $a=c$, $b=d$이면 $a+bi=c+di$

$a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.

② $a=0$, $b=0$이면 $a+bi=0$이다.

$a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$

③ 임의의 두 복소수 z_1, z_2에 대하여 $z_1z_2=z_2z_1$

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$(a, b, c, d는 실수)라고 하면

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a+bi)(c+di) \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\ &= (ca-db)+(cb+da)i \\ &= (c+di)(a+bi) \\ &= z_2z_1 \end{aligned}$$

켤레복소수와 그 성질

(1)복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $a-bi$를 $a+bi$의 켤레복소수라 하며, 이것을 기호로 $\overline{a+bi}$와 같이 나타낸다.

(2) 켤레복소수의 성질

두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라 할 때

① $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$ ② $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$(복호동순)

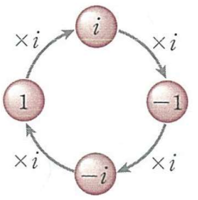
③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ ④ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq 0$)

<참고>
①복소수 $z=a+bi$ (a , b 는 실수)에 대하여 $\overline{z}=a-bi$ 이므로 $z+\overline{z}=2a$(실수), $z\overline{z}=a^2+b^2$(실수)
②$\overline{z}=z$ 이면 z 는 실수이다.
③$\overline{z}=-z$ 이면 z 는 순허수 또는 0 이다.

복소수의 덧셈과 뺄셈
$a,\ b,\ c,\ d$ 가 실수일 때
①$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
②$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
<참고> 복소수의 덧셈과 뺄셈은 허수단위 i 를 문자처럼 생각하고, 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

복소수의 곱셈과 나눗셈
$a,\ b,\ c,\ d$ 가 실수일 때
①$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
②$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq 0$)
<참고>
①복소수의 곱셈은 허수단위 i 를 문자처럼 생각하고 전개한 다음 $i^2=-1$ 임을 이용하여 계산한다.
②복소수의 나눗셈은 분모의 컬레복소수를 분모, 분자에 각각 곱하여 계산한다.
즉, $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

복소수의 거듭제곱
자연수 n 에 대하여 i^n 은
$i,\ -1,\ -i,\ 1,\ \cdots$
이 반복되어 나타나므로 다음과 같은 규칙을 찾을 수 있다.
$i^{4k}=1, i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=-1, i^{4k+3}=-i$(단, k 는 자연수)
<참고> 두 자연수 $m,\ n$ 을 4 로 나누었을 때의 나머지가 같으면 $i^m,\ i^n$ 의 값이 같다.



음수의 제곱근

(1) $a>0$ 일 때

① $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

② $-a$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$ 이다.

(2) $a<0,\ b<0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

[증명]

$a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

$a<0$, $b<0$일 때, $a=-x$, $b=-y$라고 하면 $x>0$, $y>0$이므로

$\sqrt{a}=\sqrt{-x}=\sqrt{x}\,i$, $\sqrt{b}=\sqrt{-y}=\sqrt{y}\,i$이다.

$$\begin{aligned}\sqrt{a}\sqrt{b}&=\sqrt{x}\,i\times\sqrt{y}\,i\\&=\sqrt{x}\sqrt{y}\,i^2\times\sqrt{xy}\,i^2\\&=-\sqrt{xy}=-\sqrt{(-x)\times(-y)}=\sqrt{ab}\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

(3) $a>0,\ b<0$ 일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$

[증명]

$a>0$, $b<0$일 때, $b=-y$라고 하면$y>0$이므로 $\sqrt{b}=\sqrt{-y}=\sqrt{y}\,i$이다.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}&=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{y}\,i}=\sqrt{\frac{a}{y}}\times\frac{1}{i}=\sqrt{\frac{a}{y}}\times\frac{i}{i^2}=-\sqrt{\frac{a}{y}}\,i\\&=-\sqrt{\frac{a}{-y}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

〈참고〉

실수 $a,\ b$ 에 대하여

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이면 $a<0,\ b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $a>0,\ b<0$ 또는 $a=0,\ b\neq 0$

1. 체계표

$$
\begin{array}{l}
\text{복소수} \\ a+bi
\end{array}
\begin{cases}
\text{실수 } a(b=0)-- \begin{cases} \text{유리수}- \begin{cases} \text{정수}------ \begin{cases} \text{양의 정수} \\ \text{(자연수)} \\ 0 \\ \text{음의 정수} \end{cases} \\ \text{정수가 아닌 유리수} \end{cases} \\ \text{무리수} \end{cases} \\
\text{허수 } a+bi(b\neq 0)- \begin{cases} \text{순허수} \quad bi(a=0,\ b\neq 0) \\ \text{순허수가 아닌 허수 } a+bi(a\neq 0,\ b\neq 0) \end{cases}
\end{cases}
$$

2. i의 성질

① $i^1=i$

② $i^2=-1$

③ $i^3=-i$

④ $i^4=1$

⑤ $i^5=i$

⑥ $i^6=-1$

⑦ $i^7=-i$

⑧ $i^8=1$

※ $(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$

3. 복소수

$z=a+bi$ (a: 실수부분, b: 허수부분, $i=$허수단위)

$\overline{z}=a-bi$

① $z+\overline{z}=2a$

② $z\overline{z}=a^2+b^2$

③ $z_1z_2=0 \Leftrightarrow z_1=0$ 또는 $z_2=0$

4. 켤레 복소수

① $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$

② $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$ (복호동순)

③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

④ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq 0$)

5. 제곱근

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

특이하게, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이면

$a<0,\ b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

특이하게, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면

$a>0,\ b<0$ 또는 $a=0$

6. 활용

① $x>0$일 때, $(\sqrt{x})^2=x$

② $x<0$일 때, $(\sqrt{x})^2=x$

ex) $(\sqrt{-5})^2=-5$, $(\sqrt{3-x})^2=3-x$

다음을 계산하여라.

109) [수상 R229번]

$(3+4i)(1-2i)$

다음을 $a+bi$ (a, b는 실수) 꼴로 나타내어라.

110) [수상 R236번]

$\sqrt{-2}\,\sqrt{-8}$

111) [수상 R238번]

<보기>

1) z^2이 실수이면 z는 실수이다.
2) z^2이 음의 실수이면 z는 순허수이다.
3) zi가 순허수이면 $z^2>0$이다.
4) $z=-\overline{z}$이면 z^2은 음의 실수이다.
5) $z^2+(\overline{z})^2=0$이면 $z=0$이다.
6) $z_1^2+z_2^2=0$이면 $z_1=0$또는 $z_2=0$이다.
7) $x^2=-4$이면 $x=2i$이다.
8) $z_1+z_2i=0$이면 $z_1=z_2=0$이다.
9) $\overline{z_1}=z_2$이면 z_1+z_2, z_1z_2는 모두 실수이다.

임의의 복소수 z에 대하여 보기에서 옳은 것을 고르시오.

112) [수상 R241번]

세 실수 a, b, c에 대하여 복소수 $z=a+bi$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b-c$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

(가) $(1-i+z)^2<0$
(나) $z^2=c-8i$

113) [수상 R242번]
두 실수 $a,\ b$에 대하여 등식
$\{a(1+i)+b(1-i)\}^2=-4$가 성립할 때, ab의 값은?
(단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

114) [수상 R244번]
자연수 n에 대하여 복소수 z_n을
$z_1=1+i,\ z_2=iz_1,\ \cdots, z_{n+1}=iz_n$
과 같이 정의할 때, z_{1000}의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

① $-1-i$ ② $-1+i$ ③ $1-i$
④ $1+i$ ⑤ $-i$

115) [수상 R247번]
복소수 α, β에 대하여 다음 중 옳은 것은? (2개)
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

① $\alpha+\overline{\alpha}=0$ 이면 $\alpha^2 \geq 0$ 이다.
② $\alpha+\beta$가 실수이면 $\beta=\overline{\alpha}$ 이다.
③ $\alpha\overline{\alpha}=1$ 이면 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ 는 실수이다.
④ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.
⑤ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.

116) [수상 R250번]
복소수 z에 대하여 $z^2=4\sqrt{3}+4i$를 만족시킬 때, $z\overline{z}$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$ 이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

117) [수상 R251번]

두 복소수 α, β에 대하여 $\overline{\alpha}\beta=4$, $\alpha+\frac{4}{\overline{\alpha}}=5i$일 때, $\left(\beta+\frac{4}{\overline{\beta}}\right)^2$의 값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 α, β의 켤레복소수이다.)

① $-25i$ ② -25 ③ $-16i$
④ -16 ⑤ $-9i$

118) [수상 R252번]

실수가 아닌 복소수 z에 대하여 $z+\frac{1}{z}$이 실수일 때, $z\overline{z}$의 값은? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

119) [수상 R253번]
실수가 아닌 복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $z\overline{z}+\frac{z}{\overline{z}}=5$일 때, $(z-\overline{z})^2$의 값은?

① -24 ② -18 ③ -12
④ -6 ⑤ 0

120) [수상 R254번]
복소수 z에 대하여 $z^4<0$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? ($\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

ㄱ. $\overline{z}^2$은 순허수이다.
ㄴ. z의 실수부분과 허수부분은 같다.
ㄷ. $z+\overline{z}=4$이면 $z\overline{z}=8$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

121) [수상 R255번]

복소수 $z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ 에 대하여 $z^n=1$을 만족시키는 200 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

122) [수상 R257번]

자연수 n에 대하여 $f(n)=ni^n-(n+1)i^{n+1}$일 때,
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(16)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $-16i$ ② $-8i$ ③ 0
④ $8i$ ⑤ $16i$

123) [수상 R260번]

실수가 아닌 복소수 z의 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $z^2=\overline{z}$일 때, $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

124) [수상 R262번]

등식 $\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}=1-i$가 성립하도록 하는 300 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

(단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

125) [수상 R263번]

두 복소수 $z=\frac{\sqrt{2}}{1-i}$, $w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여

$z^n=w^n$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

(단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

126) [수상 R265번]

0이 아닌 세 실수 x, y, z에 대하여

$\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$, $\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}=-\sqrt{\frac{z}{y}}$일 때,

$|x+y|+\sqrt{(z-y)^2}-|x-z|$를 간단히 한 것은?

① $-2x$ ② $-2y$ ③ $2x-2y$

④ $-2y+2z$ ⑤ $2x-2y+2z$

127) [수상 R266번]
두 등식
$\sqrt{x}\sqrt{x+4}=-\sqrt{x^2+4x}$, $\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-5}}=-\sqrt{\frac{x+6}{x-5}}$ 을 모두 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

128) [수상 R269번]
자연수 n에 대하여 $f(n)=i^n$으로 정의할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

1) $f(2008)=1$
2) 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)$의 값은 $i, -i, 1, -1$뿐이다.
3) $f(n+3)=if(n)$

① 1) ② 1), 2) ③ 1), 3)
④ 2), 3) ⑤ 1), 2), 3)

129) [수상 R271번]
이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근을 z라 할 때, $z^n(1-z)^{2n+1}$의 값이 양의 실수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

130) [수상 R273번]
제곱해서 $8+6i$가 되는 복소수를 z라고 할 때
(1) z를 구하여라.

(2) $z^3-16z-\dfrac{100}{z}$의 값을 구하여라.

131) [수상 R274번]

실수가 아닌 복소수 z에 대하여 $\frac{z^2}{1-z}$이 실수일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

ㄱ. $\frac{\overline{z^2}}{1-\overline{z}}$은 실수이다.

ㄴ. $z+\overline{z}=z\overline{z}$

ㄷ. 복소수 z의 실수부분은 양수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

132) [수상 R275번]

복소수 $z=(2+i)x^2+(3i-2)x-12+2i$에 대하여 $z^4<0$을 만족시킬 때, 모든 실수 x의 값의 합은?

(단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

① 8 ② $\frac{26}{3}$ ③ $\frac{28}{3}$
④ 10 ⑤ $\frac{32}{3}$

133) [수상 R276번]

자연수 n에 대하여 $z_n=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}-\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n}$이라 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

ㄱ. 서로 다른 z_n의 값은 모두 4개이다.
ㄴ. $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n$으로 가능한 서로 다른 값의 총합은 $2i$이다.
ㄷ. $z_l \times z_m < 0$을 만족시키는 10 이하의 자연수 l, m의 순서쌍 $(l,\ m)$의 개수는 13이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

방정식과 함수

해 = x
값 = y

가우스기호

$[x]$: x보다 크지 않은 최대의 정수

$n \le x < n+1$ 일 때, $[x]=n$ (n은 정수)임을 이용할 수 있도록 x의 값의 범위를 나눈다.

이차방정식의 풀이

(1) 인수분해를 이용한 풀이

$\underline{(ax-b)(cx-d)=0}$ $(ac \neq 0) \Leftrightarrow x=\dfrac{b}{a}$ 또는 $x=\dfrac{d}{c}$

ㄴ $AB=0$ 이면 $A=0$ 또는 $B=0$

(2) 근의 공식을 이용한 풀이

① $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0) \Leftrightarrow x=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

② $ax^2+2b'x+c=0$ $(a \neq 0) \Leftrightarrow x=\dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a}$

<참고> x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 x^2의 계수를 유리화한 후 풀면 계산이 간단해진다.

이차방정식의 판별식

$a,\ b,\ c$가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에서

$D=b^2-4ac$라 하면

(ⅰ) $D>0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ⅱ) $D=0$ 이면 중근(실근)을 갖는다.

(ⅲ) $D<0$ 이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

<참고> 일차항의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$ 에서는 판별식 $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ 를 이용하면 편리하다.

<참고>

x에 대한 이차식 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 다음은 모두 $b^2-4ac=0$ 과 같은 의미이다.

① 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 갖는다.

② 이차식 $f(x)$가 완전제곱식이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

① $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ② $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

③ $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$ (단, $\alpha,\ \beta$는 실수이다.)

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

<참고>

① 이차방정식의 두 근의 차가 k이면 두 근을 $\alpha,\ \alpha+k$ 로 놓는다.

② 이차방정식의 두 근의 비가 $m:n$ 이면 두 근을 $m\alpha, n\alpha(\alpha \neq 0))$ 로 놓는다.

이차방정식의 실근의 부호

$a,\ b,\ c$가 실수일 때 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의

두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하고, $D=b^2-4ac$라 하면

① 두 근이 모두 양이면 $D\ge 0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음이면 $D\ge 0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호가 서로 다르면 $\underline{\alpha\beta<0}$ $(ac<0$이므로 항상 $b^2-4ac>0)$

〈참고〉

① 두 근의 부호가 서로 다르고, 양의 근이 음의 근의 절댓값보다 크면 $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta<0$

② 두 근의 부호가 서로 다르고, 양의 근이 음의 근의 절댓값보다 작으면 $\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta<0$

두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 $\alpha,\ \beta$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차 방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{두 근의 합}}x+\underbrace{\alpha\beta}_{\text{두 근의 곱}}=0$

〈참고〉 일반적으로 $\alpha,\ \beta$를 두 근으로 하는 이차 방정식은 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 즉 $a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

으로 놓을 수 있다.(단, $a\neq 0$)

이차식의 인수분해

이차식은 이차방정식의 근을 이용하여 복소수의 범위에서 인수분해할 수 있다. 즉 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

와 같이 인수분해 된다.

예) $x^2+2x+2=0$의 두 근이 $x=-1\pm i$이므로 이차식

$x^2+2x+2=0$를 인수분해하면

$x^2+2x+2=(x+1+i)(x+1-i)$

이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

① $a,\ b,\ c$가 유리수일 때, 한 근이 $p+\sqrt{q}$이면 다른 한 근은 $p-\sqrt{q}$이다. (단, p는 유리수, $\sqrt{q}$는 무리수이다.)

② $a,\ b,\ c$가 실수일 때, 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다. (단, $p,\ q$는 실수, $q\neq 0,\ i=\sqrt{-1}$이다.)

이차방정식의 활용

이차방정식의 활용 문제는 다음의 순서로 해결한다.

(ⅰ) 문제의 의미를 파악하여 구하고자 하는 것을 미지수 x로 놓는다.

(ⅱ) 주어진 조건들을 이용하여 이차방정식을 세운다.

(ⅲ) (ⅱ)에서 세운 이차방정식을 풀고 <u>구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인</u>한다.

└ 선분의 길이, 제품의 가격은
항상 0보다 크다.

1. 방정식
① n차 방정식의 해의 개수 => 언제나 n개

② 해, 근 => x, 값 => y

③ 인수분해 또는 근의 공식으로 구한다.

2. $ax^2+bx+c=0$의 해
① 해가 α, β
$\Leftrightarrow$
② $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$
$\Leftrightarrow$
③ ax^2+bx+c에 α, β를 대입하면 0이 된다.(식이 성립한다)

3. 식의 변형 : 식을 변형해도 해는 바뀌지 않는다.
ex1) $2x^2+5x=0$의 해 = $2x^2+3x=-2x$의 해

4.근의 공식과 판별식
① $ax^2+bx+c=0$, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$D=b^2-4ac$

② $ax^2+2b'x+c=0$, $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$
$D/4=b'^2-ac$

③ $D>0$ => 서로 다른 두 실근
$D=0$ => 서로 같은 두 실근(=중근)
$D<0$ => 서로 다른 두 허근

5. 근과 계수의 관계
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}, \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

6. 켤레근(조건을 주의해야한다.)
ex2) $ax^2+bx+c=0(a,b,c$가 실수)
$1+2i$가 근 => $1-2i$도 근
※ 만약 a,b,c가 복소수라면 성립하지 않는다.

ex3) $ax^2+bx+c=0(a,b,c$가 실수)
$1+\sqrt{2}$가 근 => $1-\sqrt{2}$도 근이라고 볼 수 없다.
※ 만약 a,b,c가 유리수라면 $1-\sqrt{2}$도 근이 되겠지만, 조건이 실수이므로 성립하지 않는다.

7. 근의 종류
① $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 모두 양수
=> $D\geq 0, \alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$

② $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 모두 음수
=> $D\geq 0, \alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$

③ $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 부호가 서로 다름
=> $\alpha\beta<0$

x^2의 계수가 1이고, 다음 두 수를 근으로 하는 x에 대한 이차방정식을 구하여라.

134) [수상 R289번]

$2+i,\ 2-i$

135) [수상 R292번]
이차방정식 $x^2-2x+k+5=0$ 의 두 근이 모두 양수이기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

136) [수상 R293번]
이차방정식 $x^2+2x+k+2=0$ 의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

137) [수상 R294번]

이차방정식 $x^2+2x-k+4=0$ 의 두 근의 부호가 서로 다르기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

138) [수상 R296번]

x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k-3=0$의 두 근의 부호가 서로 다르고, 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작을 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

139) [수상 R299번]
x 에 대한 이차방정식 $3x^2+(m^2+m-6)x-m+1=0$ 의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 서로 다르도록 하는 실수 m 의 값을 구하여라.

140) [수상 R305번]
정수 n 에 대하여 x 에 대한 방정식 $(1-n)x^2+2\sqrt{2}x-1=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

141) [수상 R307번]
x에 대한 방정식 $|x^2-(2a+1)x+3a+1|=2$의 한 근이 a가 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 합을 구하시오.

142) [수상 R308번]
방정식 $[x]^2-3[x]-10=0$을 만족시키는 x의 값의 범위가 $a \le x < b$ 또는 $c \le x < d$일 때, 서로 다른 네 상수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $abcd$의 값을 구하시오.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

143) [수상 R309번]

$0 < x < 3$일 때, 방정식 $x^2-2[x]+x-2=0$의 근을 모두 곱한 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ ② $-1+\sqrt{15}$ ③ $\sqrt{15}$
④ $\sqrt{17}$ ⑤ $-1+\sqrt{17}$

144) [수상 R310번]

이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근 $\alpha,\ \beta$에 대하여 이차식 $f(x)=x^2+ax+b$가 $f(\alpha)=2\beta,\ f(\beta)=2\alpha$를 만족시킬 때, 두 상수 $a,\ b$에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오.

145) [수상 R312번]
이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta^2$의 값은? (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

① -8 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 8

146) [수상 R313번]
0이 아닌 세 실수 p, q, r에 대하여 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근은 α, β이고, 이차방정식 $x^2+qx+r=0$의 두 근은 3α, 3β일 때, $\frac{p}{r}$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{1}{81}$

147) [수상 R314번]

x에 대한 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근 z가

$$(2i+z)^2>0$$

을 만족시킬 때, 실수 a의 값을 구하시오.

(단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

148) [수상 R315번]

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 한 근을 α라 하고,

$z=\dfrac{\alpha}{2\alpha-1}$라 할 때, $z+\overline{z}$의 값은?

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① $\dfrac{7}{9}$ ② $\dfrac{8}{9}$ ③ 1

④ $\dfrac{10}{9}$ ⑤ $\dfrac{11}{9}$

149) [수상 R316번]
이차방정식 $x^2+2x-k=0$의 두 실근 α, β에 대하여 $|\alpha|+|\beta|=10$일 때, 실수 k의 값을 구하시오.

150) [수상 R317번]
자연수 n에 대하여 이차방정식 $(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4})x^2-x-n=0$의 두 실근을 α_n, β_n이라 할 때, $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{21})+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{21})$의 값을 구하시오.

151) [수상 R319번]
x에 대한 방정식 $|x^2-2x-k|=3$의 네 실근의 곱이 16일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 5

152) [수상 R322번]
x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$이 두 허근 α, β를 가질 때, $2\alpha+\beta^2=1$이 성립한다. 두 실수 p, q에 대하여 $q-p$의 값을 구하시오.

153) [수상 R323번]
이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{\beta^2}{1+\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{1+\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식을 다음 순서에 따라 구하시오.
(1) $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 차례로 구하시오.

(2) $\frac{\beta^2}{1+\alpha}+\frac{\alpha^2}{1+\beta}$, $\frac{\beta^2}{1+\alpha}\times\frac{\alpha^2}{1+\beta}$의 값을 차례로 구하시오.

(3) $\frac{\beta^2}{1+\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{1+\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식을 구하시오.

154) [수상 R324번]
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β에 대하여

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=5$$

이다. 이차방정식 $f(2x-1)+4=0$의 두 근의 곱이 1일 때, $f(2)$의 값은?

① -25　② -20　③ -15
④ -10　⑤ -5

155) [수상 R325번]
이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱은 8이다.
(나) 방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $f(\alpha)+f(\beta)=2$이다.

156) [수상 R326번]
x에 대한 이차방정식 $x^2+4x+k=0$이 한 허근 α를 가질 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, k는 실수이고, $\overline{\alpha}$는 α의 켤레복소수이다.)

ㄱ. $k>4$
ㄴ. α의 실수부분은 2이다.
ㄷ. $(1+\alpha)(1+\overline{\alpha})>1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

157) [수상 R327번]

x에 대한 이차방정식 $x^2+px+1=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, p는 실수이다.)

ㄱ. $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$
ㄴ. $0<\alpha<1$이면 $\beta>1$이다.
ㄷ. $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 2이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

158) [수상 R328번]

두 복소수 α, β에 대하여

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=7$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

ㄱ. $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}$
ㄴ. $\alpha+\overline{\beta}=\overline{\alpha}+\beta$
ㄷ. $\alpha^2=2\overline{\beta}-7$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

159) [수상 R329번]

방정식 $x+\frac{1}{x}=-1$의 한 허근을 ω라 할 때, 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 $f(n)=\frac{\overline{\omega}^{4n}+1}{\overline{\omega}^{4n}}$이라 정의하자.

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(101)$의 값은?

(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

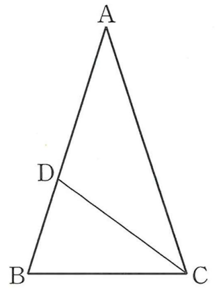
① 33 ② 34 ③ 66
④ 99 ⑤ 100

160) [수상 R330번]

그림과 같이 삼각형 ABC의 변 AB 위의 점 D에 대하여 네 점 A, B, C, D는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$
(나) $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DA}}=2$

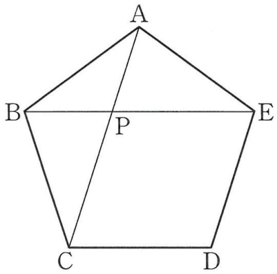
x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 두 근이 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$일 때, 두 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?



① $1-\sqrt{5}$ ② $-1+\sqrt{5}$ ③ $1+\sqrt{5}$
④ $2-\sqrt{5}$ ⑤ $-2+\sqrt{5}$

161) [수상 R331번]

그림과 같은 정오각형 ABCDE에서 두 대각선 AC와 BE의 교점을 P라 하면 $\overline{AC}$: $\overline{PC}$ = $\overline{PC}$: $\overline{PA}$가 성립한다. 정오각형 ABCDE의 한 변의 길이가 1일 때, 선분 AC의 길이는?



① $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　② $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$　③ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{4+\sqrt{5}}{2}$　⑤ $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

162) [수상 R332번]

이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값은?

(가) $f\left(\frac{\alpha}{3}\right)=f\left(\frac{\beta}{3}\right)=3$

(나) $f(0)=1$

① 28　② 29　③ 30

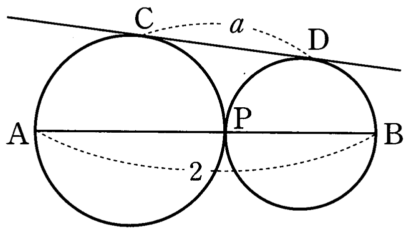
④ 31　⑤ 32

163) [수상 R333번]
이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근 α, β에 대하여
이차식 $f(x)$는 $f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)=-3\alpha$, $f\left(\frac{\beta^2}{2}\right)=-3\beta$를 만족시킨다.
$f(1)=2$일 때, 이차식 $f(x)$를 구하시오.

164) [수상 R334번]
방정식 $x^2+\sqrt{3}x+1=0$의 두 근을 각각 z, w라 할 때,
$(1+z+z^2+\cdots+z^8)(1+w+w^2+\cdots+w^8)$의 값은?

① $3-\sqrt{3}$
② $3+\sqrt{3}$
③ $4-2\sqrt{3}$
④ $4+2\sqrt{3}$
⑤ $5-3\sqrt{3}$

165) [수상 R335번]
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{BP}}$를 지름으로 하는 두 원을 그린 후, 두 원에 동시에 접하는 접선 중에서 두 원이 같은 쪽에 있는 접선의 접점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}=a$일 때, 두 원의 반지름의 길이를 두 근으로 하고, x^2 계수가 1인 이차방정식을 구하시오.



166) [수상 R337번]
소수 $p,\ q$는 계수가 정수인 이차방정식 $x^2-33x+m=0$의 두 근이다, 이 때 $p+q,\ pq$ 를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

167) [수상 R338번]
x, y에 대한 이차식 $x^2-xy+2y^2+kx-3y+2$가 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 하는 양수 k의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

168) [수상 R339번]
방정식 $\left[\frac{x}{3}\right]^2+[x]+1=0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위를 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

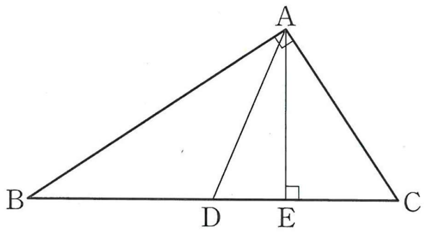
169) [수상 R340번]
x에 대한 이차방정식 $x^2-ax+a=0$이 허근 z를 가질 때, z^3이 실수가 되도록 하는 실수 a의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오,

170) [수상 R341번]
이차방정식 $2(k-1)^2x^2+3(k-3)x-2k+1=0$의 두 실근의 부호가 서로 다르고, 양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 크도록 하는 정수 k의 개수는?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

171) [수상 R344번]

그림과 같이 $\angle A = 90^\circ$인 직각삼각형 ABC에 대하여 선분 BC의 중점을 D, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 E라 하자. $\overline{AD} = a$, $\overline{AE} = b$일 때, $\frac{1}{\overline{BE}}$, $\frac{1}{\overline{CE}}$을 두 근으로 하는 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은?



① $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$

② $x^2 - 2ax + a^2b^2 = 0$

③ $x^2 - \frac{2a}{b^2}x + \frac{1}{b^2} = 0$

④ $x^2 - \frac{2a}{a^2+b^2}x + \frac{1}{a^2+b^2} = 0$

⑤ $x^2 - \frac{2a}{a^2b^2}x + \frac{1}{a^2b^2} = 0$

172) [수상 R345번]

직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a, b, c라 할 때, x에 대한 이차방정식

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

의 근에 대한 설명으로 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

ㄱ. 허근을 갖도록 하는 세 양수 a, b, c가 존재한다.
ㄴ. 중근을 가질 때, 세 모서리의 길이는 모두 같다.
ㄷ. 정육면체가 아닐 때, 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

173) [수상 R347번]

다항식 $x^2+axy-6y^2+bx+15y+9$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해가 되도록 하는 정수 a, b에 대하여 $a+b$의 값 중 가장 큰 값은? (단, 두 일차식의 계수는 모두 정수이다.)

174) [수상 R348번]

x, y에 관한 방정식 $f(x, y)=2x^2+xy-y^2-x+2y+k$가 x, y에 관한 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 두 일차식과 그 때의 k의 값을 구하시오.

175) [수상 R349번]
$x^2-x+1=0$의 두 개의 해를 α, β라 할 때, $f(\alpha)=\beta, f(\beta)=\alpha, f(1)=1$을 만족하는 x의 2차식을 $f(x)$라 할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

176) [수상 R350번]
계수가 실수인 x의 이차방정식
$x^2-2kx+k^2-2k-3=0$이 있다.
(1) 한 근만이 0일 때, k의 값을 구하여라

(2) $5 \le k \le 20$의 범위에서 두 근이 모두 정수가 되는 정수 k의 값을 구하여라.

177) [수상 R352번]

방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω, 그 켤레복소수 $\overline{\omega}$라 하자. 자연수 n에 대하여 $f(n)=(\omega^n+1)((\overline{\omega})^n+1)$이라 할 때, $f(1)\times f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(100)$의 값은 2^m이다. 이때, 자연수 m의 값을 구하시오.

178) [수상 R353번]

x, y에 대한 다항식 $x^2-y^2-ax-by-2$가 계수가 모두 정수인 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, $a+b$의 값이 될 수 없는 것은? (단, a, b는 상수이다.)

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

179) [수상 R354번]

실수가 아닌 복소수 z와 z의 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $\frac{1+z^2}{z}$와 $\frac{\overline{z}}{1-z}$가 실수이다. 자연수 n에 대하여 $f(n)=z^n+(\overline{z})^n$이라 할 때, $f(m)=1$을 만족시키는 두 자리 자연수 m의 개수는?

① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

180) [수상 R355번]

x에 대한 이차방정식 $x^2+(2a-4)x+8=0$의 두 근을 α와 β, $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α와 γ라 하자. 상수 a, b에 대하여 $3\alpha=\beta-2\gamma$가 성립할 때, $a-2b$의 값을 구하시오.

방정식과 함수

(4) 복소수

(5) 이차방정식

(6) 이차방정식과 이차함수

(7) 여러 가지 방정식

해 = x
값 = y

절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

(1) $y=|f(x)|$의 그래프
$y=f(x)$의 그래프에서 $y \geq 0$인 부분은 그대로 두고,
$y<0$인 부분은 x축에 대칭이동한다.
(2) $y=f(|x|)$의 그래프
$x \geq 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, $x<0$인 부분은 $x \geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.
(3) $|y|=f(x)$의 그래프
$y \geq 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그리고
$y<0$부분은 $y \geq 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.
(4) $|y|=f(|x|)$의 그래프
$x \geq 0$,$y \geq 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, 이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한다.

〈참고〉
① $y=|x-a|+|x-b|$와 같이 두 개 이상의 절댓값 기호를 포함한 식은 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 경계로 구간을 나눈 다음, 각 구간에서 그래프를 그린다.
② $y=a|x-m|+n$에서 $x=m$이면 $y=n$이므로 그래프에서 꺽인 점의 좌표는 $(m,\ n)$이다.

가우스 함수

실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타 낼 때, $f(x)=[x]$를 가우스 함수라 한다.
이 때 정수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$n \leq x < n+1 \rightarrow f(x)=[x]=n$$

〈참고〉
① 함수 $f(x)=[x]$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 정수 전체의 집합이다.
② x가 정수이면 $[x]=x$이다.

절댓값 기호가 있을 때 최댓값, 최솟값

(1) $y=|x-\alpha|+k$ 꼴
⇨ $x=\alpha$에서 최솟값 k를 갖는다.
(2) $y=|x-\alpha|+|x-\beta|+|x-\gamma|$ 꼴 (단, $\alpha<\beta<\gamma$)
⇨ $x=\beta$에서 최솟값 $\gamma-\alpha$를 갖는다.

이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 D의 부호에 따라 다음과 같다.
① $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$이면 만나지 않는다.
〈참고〉 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식 D의 부호에 따라 다음과 같다.

① $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$이면 만나지 않는다.

〈참고〉 x^2의 계수가 서로 다른 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식 D를 이용하여 판단할 수 있다.

함수의 그래프와 방정식

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=0$, 즉 x축의 교점의 개수와 같다.
(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.
〈참고〉 (1) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.
(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$에서 $f(x)=ax^2+bx+c$, $D=b^2-4ac$라 할 때

① 두 근이 모두 p보다 크다.
 ➡ $D\ge 0,\ f(p)>0,\ -\dfrac{b}{2a}>p$
② 두 근이 모두 p보다 작다.
 ➡ $D\ge 0,\ f(p)>0,\ -\dfrac{b}{2a}<p$
③ 두 근 사이에 p가 있다.
 ➡ $f(p)<0$
④ 두 근이 $p,\ q\ (p<q)$사이에 있다.
 ➡ $D\ge 0,\ f(p)>0,\ f(q)>0,\ p<-\dfrac{b}{2a}<q$

〈참고〉
이차방정식의 근의 분리에 대한 문제는 (ⅰ) 판별식, (ⅱ) 함숫값, (ⅲ) 대칭축 조건을 순서대로 따져 준다.

제한된 범위에서의 이차함수의 최대·최소

x의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$인 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최대·최소는 다음과 같다.
(1) $\alpha\le p\le\beta$일 때,
 $f(\alpha),\ f(\beta),\ f(p)$중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.
(2) $p<\alpha$또는 $p>\beta$일 때,
 $f(\alpha),\ f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.
〈참고〉
제한된 범위에서 이차함수의 최대·최소를 구할 때에는 이차함수의 그래프를 그려서 생각하는 것이 편리하다.

이차함수의 최대·최소의 활용

이차함수의 최대 · 최소의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.
(ⅰ) 구하는 값을 x에 대한 이차식 $f(x)$로 나타낸다.
(ⅱ) 주어진 상황을 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.
(ⅲ) $f(x)$를 완전제곱식으로 변형하여 (ⅱ)에서 구한 범위에서의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

1. 해, 근 => x, 값 => y

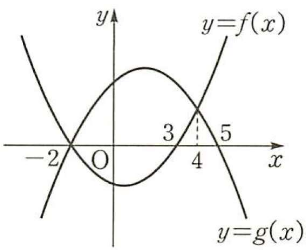
2. 식의 변형 : 식을 변형해도 해는 바뀌지 않는다.
ex1) $2x^2+5x=0$의 해 ⇔ $2x^2+3x=-2x$의 해

3. 함수와 방정식의 관계
① 방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 관계
⇔ $y=ax^2+bx+c$과 $y=mx+n$와의 관계

② 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 관계
⇔ $y=ax^2+bx+c$와 $y=0$(x축)의 관계

4. 함수와 방정식의 실근
① 방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$의 실근
⇔ $y=ax^2+bx+c$과 $y=mx+n$의 교점의 x좌표

예)
두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 모든 해의 합을 구하여라.



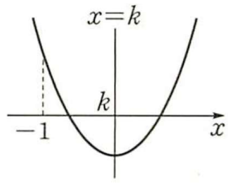
풀이]
$f(x)-g(x)=0$에서 $f(x)=g(x)$ …… ㉠
㉠을 만족시키는 해는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이므로
$x=-2$ 또는 $x=4$
따라서 구하는 모든 해의 합은 2이다.

② 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근
⇔ $y=ax^2+bx+c$와 $y=0$(x축)의 교점의 x좌표

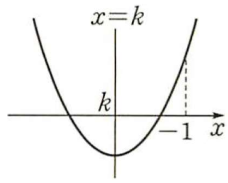
예)
이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 실근이 모두 -1보다 클 때, 모든 정수 k의 범위를 구하시오.

풀이]
$x^2-2x+k-1=0$는 $y=x^2-2x+k-1$과 $y=0$(x축)과의 관계로 볼 수 있다. 따라서 근의 분리에 의해서 $-2<k\le 2$

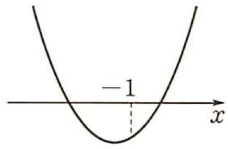
5. 근의 분리
① 두 근이 모두 -1보다 크다.
⇨ $D\ge 0,\ f(-1)>0,\ k>-1$



② 두 근이 모두 -1보다 작다.
⇨ $D\ge 0,\ f(-1)>0,\ k<-1$



③ 두 근 사이에 -1이 있다.
⇨ $f(-1)<0$



6. 응용
A원이 1년동안 $p\%$올랐다 => $A(1+\frac{p}{100})$

A원이 2년동안 $p\%$씩 올랐다 => $A(1+\frac{p}{100})^2$

B원이 1년동안 $p\%$내렸다 => $B(1-\frac{p}{100})$

B원이 2년동안 $p\%$씩 내렸다 => $B(1-\frac{p}{100})^2$

181) [수상 R362번]
x절편이 -2, y절편이 4인 일차함수를 구하고, 그래프를 그려라.

182) [수상 R363번]
다음 각 경우에 대하여 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 지나는 사분면을 말하여라.
(1) $a>0$, $b>0$

(2) $a<0$, $b>0$

(3) $a>0$, $b=0$

183) [수상 R368번]
그래프가 세 점 $(0,\ -6)$, $(2,\ 0)$, $(5,\ \frac{3}{2})$을 지나는 이차함수

다음 이차함수의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표를 구하여라.
184) [수상 R378번]
$y=3x^2-6x$

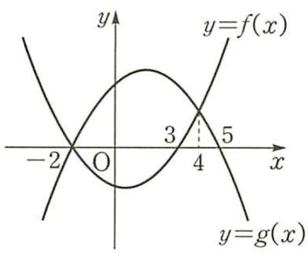
185) [수상 R380번]
이차함수$y=x^2-x+1$의 그래프와 다음 직선의 교점의 개수를 구하여라.
(1) $y=x$

(2) $y=3x-2$

(3) $y=-x-4$

186) [수상 R386번]
$y=2x^2-3x+4$, $y=x+2$

187) [수상 R392번]
두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 모든 해의 합을 구하여라.



188) [수상 R393번]

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=-1$이고, y절편은 1이다. 방정식 $f(x)=3$이 중근을 가질 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표의 곱은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$

④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

189) [수상 R394번]

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 x축에 접할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.)

ㄱ. $b \geq 0$	ㄴ. $a-b<1$
ㄷ. $2a-b<5$	

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

190) [수상 R395번]

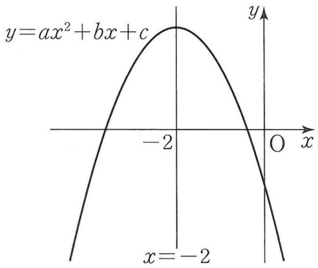
이차함수 $y=x^2+2x-2+k$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 실수이다.)

ㄱ. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점은 x축보다 아래에 있다.
ㄴ. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 y절편은 음수다.
ㄷ. 함수 $y=-x^2+3-k$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

191) [수상 R396번]

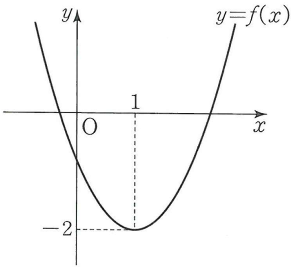
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이고 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)



ㄱ. $a+2b+4c<0$
ㄴ. 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 합은 -2이다.
ㄷ. $4a-c<0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

192) [수상 R398번]
꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 방정식 $|f(x)|-2=0$의 서로 다른 실근의 개수는?



① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

193) [수상 R399번]
직선 $y=4x-a^2$이 이차함수 $y=x^2-2ax+2$의 그래프와 점 $(p,\ q)$에서 접할 때, $a+p+4q$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)

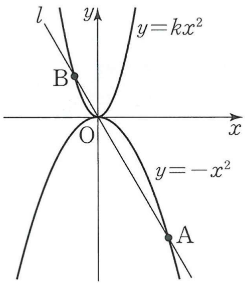
194) [수상 R400번]
최고차항의 계수가 모두 1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=-g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 각각 -3, 1이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=-2g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 각각 $-\frac{11}{3}$, 1이다. 방정식 $g(x)=0$의 두 근의 합은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

195) [수상 R401번]
두 함수 $f(x)=2x^2+kx+6$, $g(x)=mx-8$의 그래프가 점 P에서 만나고, 점 P의 x좌표는 -1이다.
방정식 $f(2x-1)=g(2x-1)$의 모든 실근의 합은?
(단, k, m은 실수이다.)

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

196) [수상 R403번]
그림과 같이 원점을 지나는 직선 l이 두 곡선 $y=-x^2$, $y=kx^2$과 만나는 원점이 아닌 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=3:1$이다. 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1
④ 3 ⑤ 9

197) [수상 R406번]
이차함수 $y=-x^2+k\,(k>0)$의 그래프와 직선 $y=x$가 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$이라 할 때, 두 삼각형 $\mathrm{AOA_1}$, $\mathrm{BOB_1}$의 넓이의 합을 $f(k)$라 하자. $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

198) [수상 R407번]
꼭짓점의 좌표가 $(0,\ -2)$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 제 1사분면 위의 점 $(a,\ 2)$에서 만난다. 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근의 차가 6일 때, 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱을 구하시오.

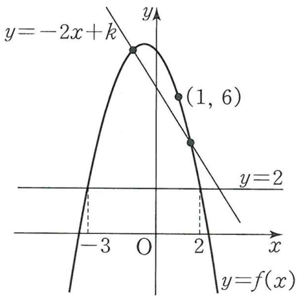
199) [수상 R408번]
함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-3)(x+2) & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 3)\\ -(x-3)(x+2) & (-2<x<3)\end{cases}$$

의 그래프와 직선 $y=2x+k$의 교점의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

200) [수상 R409번]

그림과 같이 점 $(1,\ 6)$을 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 두 점 $(2,\ 2)$, $(-3,\ 2)$에서 만난다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점의 좌표가 각각$(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 실수이다.)



ㄱ. $k=1$일 때, $y_1y_2=-28$이다.
ㄴ. x_1+x_2의 값은 k의 값에 관계없이 항상 1이다.
ㄷ. $k>1$일 때, $y_1+y_2>0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

201) [수상 R410번]

$a \le x \le 5$에서 함수 $f(x)=-x^2+4x-6$의 최댓값이 -3일 때, 상수 a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

202) [수상 R411번]
두 이차함수
$f(x)=2(x+1)^2+1-2a,\ g(x)=-(x-3)^2+3b+7$
이 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 5,\ g(x) \leq 2$를 만족시킨다. 두 정수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

① -6 ② -4 ③ -2
④ 0 ⑤ 2

203) [수상 R412번]
최고차항의 계수가 2인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha)),\ (\beta,\ f(\beta))$에서 만난다. 함수 $y=g(x)-f(x)$가 $x=3$에서 최댓값 4를 가질 때, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$의 값을 구하시오.

204) [수상 R414번]
최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여
$f(-3)=f(9)$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)$이다.
ㄴ. $1 \leq x \leq 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 4이다.
ㄷ. $f(0)>9$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

205) [수상 R415번]
$-1 \leq x \leq 4$에서 함수 $y=|x-2|^2-2|x|+4$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

206) [수상 R416번]
$-1 \le x \le 3$에서 함수

$$y=(x^2-4x+3)^2-12(x^2-4x+3)+30$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. M, m의 값을 각각 구하고 그 과정을 서술하시오.

207) [수상 R418번]
$1 \le x \le 3$에서 이차함수 $y=x^2-2ax+2a^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m=2$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은?

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3
④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

208) [수상 R419번]
이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f(3)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $f(5)=0$
ㄴ. $f(2)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(6)$
ㄷ. $f(0)=k$라 할 때, x에 대한 방정식 $f(x)=kx$의 두 실근의 합은 11이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

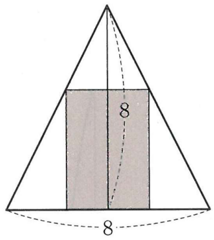
209) [수상 R420번]
이차함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.)

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$이다.
ㄷ. $0<a<b$일 때, $0 \leq x \leq b$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 ab이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

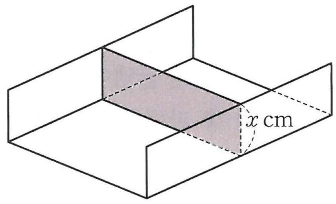
210) [수상 R422번]

그림과 같이 밑변의 길이와 높이가 모두 8인 이등변삼각형이 있다. 이 이등변삼각형의 밑변 위에 한 변이 있고, 이 이등변삼각형에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.



211) [수상 R424번]

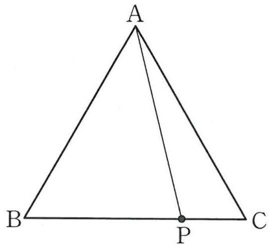
폭이 $a\,\mathrm{cm}$인 금속판의 양 옆을 똑같이 $x\,\mathrm{cm}$씩 접어서 그림과 같이 단면이 합동인 직사각형인 받침대를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때의 x의 값이 15일 때, 단면의 넓이의 최댓값은? (단, 금속판의 두께는 무시한다.)



① $150\,\mathrm{cm}^2$ ② $300\,\mathrm{cm}^2$ ③ $450\,\mathrm{cm}^2$
④ $600\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $750\,\mathrm{cm}^2$

212) [수상 R425번]

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 변 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값은?



① $\frac{27}{2}$　② 14　③ $\frac{29}{2}$

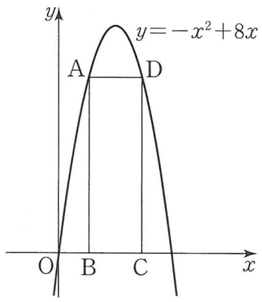
④ 15　⑤ $\frac{31}{2}$

213) [수상 R426번]

A기업에서 지난달에 판매 금액이 100만 원인 노트북을 300대 판매하였고, 이번 달부터는 가격을 높여서 판매하기로 하였다. 노트북의 판매 금액이 1%씩 증가할 때마다 판매 대수는 2대씩 감소한다. 이번 달 노트북의 판매 금액이 지난달의 판매 금액보다 $a\%$ 증가할 때, 한 달 동안 총 판매 금액이 b만 원으로 최대가 된다고 한다. $\frac{b}{a^2}$의 값을 구하시오.

214) [수상 R428번]

그림과 같이 한 변이 x축 위에 있고, 두 꼭짓점이 이차함수 $y=-x^2+8x$의 그래프 위에 있는 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은?



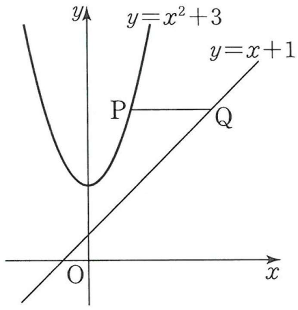
① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

215) [수상 R429번]

최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-1$이 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표는 각각 α, β $(\alpha<\beta)$이다. 직선 $x=m$ $(\alpha \le m \le \beta)$이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x-1$에 의하여 잘리는 선분의 길이가 $m=2$일 때 최댓값 3을 갖는다. $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

216) [수상 R430번]

이차함수 $y=x^2+3$의 그래프 위의 한 점 P에서 x축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x+1$과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, 선분 PQ의 길이가 최소이고 그때의 최솟값은 m이다. $a+b+m$의 값은?



① $\frac{9}{2}$　② $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{15}{2}$　⑤ $\frac{17}{2}$

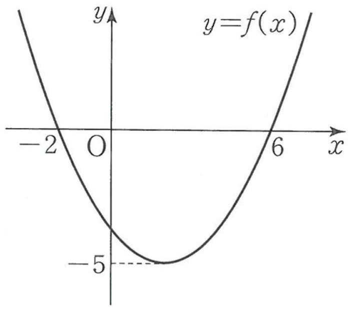
217) [수상 R431번]

이차함수$y=x^2+2ax+a^2-12$의 그래프와 직선 $y=2x-n$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 자연수 n의 개수를 $f(a)$라 정의 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

ㄱ. $f(2)=8$
ㄴ. 실수 $x_{1,}\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
ㄷ. $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(100)=42$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

218) [수상 R432번]
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 방정식 $3\{f(x)\}^2+10f(x)-25=0$의 서로 다른 실근의 개수를 m, 서로 다른 모든 실근의 합을 n이라 할 때, $m+n$의 값을 구하시오.



219) [수상 R433번]
$0 \le x \le 2$에서 이차함수 $f(x)=-x^2+2ax-a$의 최댓값이 2일 때, 실수 a의 값을 구하여라.

220) [수상 R434번]

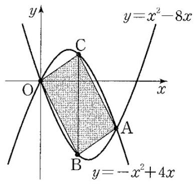
두 함수 $f(x)=[\,x^2\,]$과 $g(x)=[\,x\,]^2$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보 기
ㄱ. $g(\sqrt{2})<f(\sqrt{2})$
ㄴ. x가 정수이면 $f(x)=g(x)$이다.
ㄷ. $f(x)=g(x)$이면 x는 정수이다.

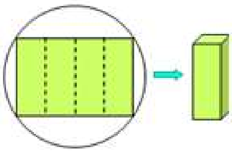
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

221) [수상 R436번]



오른쪽 그림과 같이 두 이차함수 $y=x^2-8x$, $y=-x^2+4x$의 그래프가 원점 O와 또 다른 점 A에서 만난다. y축에 평행한 직선을 그어 두 함수의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 이때 사각형 OBAC의 넓이의 최댓값을 구하시오. (단, $0<$(점 B의 x좌표)$<$(점 A의 x좌표))

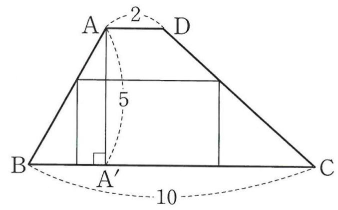
222) [수상 R437번]
종이 위에 반지름의 길이가 $\sqrt{5}\,cm$인 원을 그리고 이 원에 내접하는 직사각형을 잘라내어 그림과 같이 점선을 따라 접어 윗면과 밑면이 없는 정사각기둥 모양의 상자를 만들려고 한다. 정사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합을 $I\,cm$라 할 때, I 의 최댓값을 구하여라.



223) [수상 R438번]
$a,\ b,\ c,\ d$는 $d<a<b<c$인 실수이고
$f(x)=(x-a)(x-c)+(x-b)(x-d)$라 하자. 이차방정식
$f(x)=0$ 의 두 실근 $\alpha,\beta\,(\alpha<\beta)$ 와 a,b,c,d 의 대소를 비교하시오.

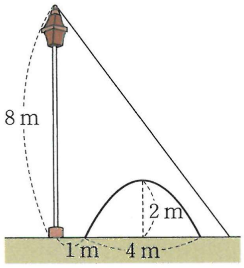
224) [수상 R439번]
이차항의 계수가 1인 두 이차방정식
$f(x)=0$, $g(x)=0$이 있다. $f(x)+g(x)=0$의 해가 2, k이고, $f(x)\times g(x)=0$ 의 해가 2, 3, 4일 때, k의 값을 구하시오.

225) [수상 R440번]
그림과 같이 두 변 AD, BC가 서로 평행한 사다리꼴 ABCD가 있다. $\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=10$이고 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 A'이라 할 때, $\overline{\mathrm{AA}'}=5$이다. 선분 BC 위에 한 변이 있고, 두 꼭짓점이 각각 두 변 AB, DC 위에 존재하는 직사각형의 넓이의 최댓값이 S일 때, $8S$의 값을 구하시오.



226) [수상 R441번]

그림과 같이 지면에 수직인 면으로 자른 단면의 폭이 $4\mathrm{m}$, 높이가 $2\mathrm{m}$인 포물선 모양인 비닐하우스가 있고, 이 단면이 지면과 만나는 한쪽 끝 점에서 $1\mathrm{m}$ 떨어진 지점에 높이가 $8\mathrm{m}$인 가로등이 설치되어 있다. 가로등 불빛을 비닐하우스 반대편 지면에 닿도록 비춘 빛이 비닐하우스와 가장 가까운 거리에 비추도록 할 때, 지면에 닿은 빛이 가로등으로부터 떨어진 거리는? (단, 가로등 불빛의 굵기는 무시하고, 거리의 단위는 m이다.)



① $\dfrac{2(\sqrt{19}+3)}{3}$ ② $\dfrac{2(\sqrt{21}+3)}{3}$ ③ $\dfrac{2(\sqrt{23}+3)}{3}$

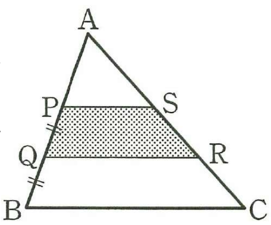
④ $\dfrac{3(\sqrt{19}+3)}{4}$ ⑤ $\dfrac{3(\sqrt{21}+3)}{4}$

227) [수상 R444번]

포물선 $y=-x^2+2x$ 위의 점 중에서 직선 $y=-2x+5$에 이르는 거리가 최소인 점의 좌표를 구하여라.

228) [수상 R445번]

$\triangle ABC$의 변 AB 위의 동점 P에 대하여 선분 BP의 중점을 Q라고 하자. 점 P, Q에서 각각 변 BC에 평행한 선을 긋고 변 AC와 만나는 점을 S, R라고 한다. $\triangle ABC$의 넓이가 24일 때, 사각형 PQRS의 넓이의 최댓값을 구하여라.



229) [수상 R446번]

어떤 물품을 파는데, 한 개에 300원 받으면 매일 5000개가 팔리고, 한 개의 값을 1원씩 올리면 10개씩 덜 팔린다고 한다. 이 물품의 원가가 200원일 때, 최대 이익을 얻기 위한 한 개당 가격은?

① 200원 ② 300원 ③400원
④ 500원 ⑤ 600원

230) [수상 R448번]

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리가 a이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$의 서로 다른 두 교점 사이의 거리가 $a+4$이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=6$의 서로 다른 두 교점 사이의 거리가 $a+8$이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=m$이 한 점에서 만날 때, 상수 m의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $-\frac{1}{8}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{3}{8}$
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{8}$

231) [수상 R449번]

함수 $y=-2[x]^2+5[x]+1$은 $[x]=a$에서 최댓값 b를 갖는다. $a+b$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

232) [수상 R450번]
이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

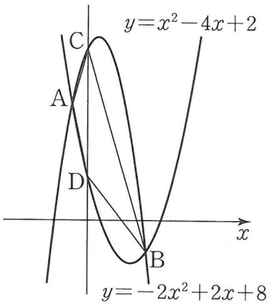
(가) $f(x)=f(-x-4)$
(나) 임의의 서로 다른 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$이다.

다음 중 옳지 않은 것은?
① 함수$y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.
② 함수$f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값을 갖는다.
③ $f(-3)>f(0)>f(-5)$
④ 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합은 -2이다.
⑤ $-4\le x<2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 존재하지 않는다.

233) [수상 R451번]
두 양의 실수 x, y가 $2x+3y=10$을 만족시킬 때, $(\sqrt{3+2x}+\sqrt{1+3y})^2$의 최댓값을 구하시오.

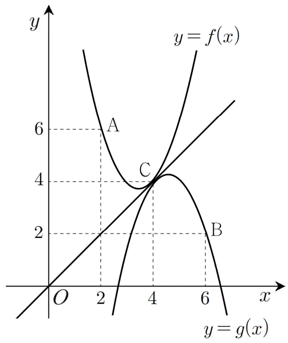
234) [수상 R453번]

그림과 같이 두 이차함수 $y=-2x^2+2x+8$과 $y=x^2-4x+2$의 그래프가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, y축에 평행한 직선이 $\alpha<x<\beta$에서 두 이차함수의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ADBC의 넓이의 최댓값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오.



235) [수상 R454번]

아래 그림과 같이 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(2,6), \mathrm{B}(6,2), \mathrm{C}(4,4)$가 있다. 점 A를 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 C에서 직선 OC와 접하고, 점 B를 지나는 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 C에서 직선 OC에 접할 때, $f(12)+g(12)$의 값을 구하면? (단, O는 원점이다.)



① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

236) [수상 R455번]
두 이차함수
$f(x)=2x^2-8x+p$, $g(x)=-3x^2+18x+q$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 접할 때, 접점의 x좌표를 α라 하자. $20(p-q+\alpha)$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수)

237) [수상 R456번]
이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 실근이 모두 -1보다 클 때, 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

238) [수상 R457번]
이차방정식 $x^2+3x+a=0$의 한 근은 -3보다 작고 다른 한 근은 1보다 크도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a<-4$ ② $-4<a<0$ ③ $a<0$
④ $a>0$ ⑤ $a>-4$

239) [수상 R458번]
이차방정식 $x^2+2kx-k=0$의 한 근은 -1과 1 사이에, 다른 한 근은 1과 3 사이에 존재하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-\frac{9}{5}<k<-1$ ② $-1<k<\frac{1}{3}$
③ $-\frac{9}{5}<k<\frac{1}{3}$ ④ $k<-\frac{9}{5}$
⑤ $k>\frac{1}{3}$

240) [수상 R459번]
이차함수 $y=x^2+2ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 서로 다른 두 교점을 A, B라 할 때, 점 $(1,\ 1)$이 선분 AB 위에 있도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

방정식과 함수

해 = x
값 = y

삼차방정식과 사차방정식의 풀이
(1) $f(x)=0$ 꼴의 삼차방정식과 사차방정식
인수분해 공식, 인수정리, 조립제법 등을 이용하여 $f(x)$를 인수분해한 후 다음 성질을 이용하여 해를 구한다.
$ABC=0 \ \Rightarrow\ A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$
(2) $ax^4+bx^2+c=0\ (a\neq 0)$ 꼴의 방정식
① $x^2=X$로 치환하여 인수분해한다.
② $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형하여 인수분해한다.
(3) $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\ (a\neq 0)$ 꼴의 방정식
각 항을 x^2으로 나눈 다음 $x+\dfrac{1}{x}=t$로 치환하여 t에 대한 이차방정식을 푼다.

〈참고〉 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$의 한 근이 α이면 $\dfrac{1}{\alpha}$도 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계
(1) 삼차방정식의 근과 계수의 관계
삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$
(2) 세 수를 근으로 하는 삼차방정식
세 수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은
$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$
〈참고〉 n차방정식 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$에서
(모든 근의 합)$=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$, (두 근끼리의 곱의 합)$=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}$
(세 근끼리의 곱의 합)$=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$, (모든 근의 곱)$=(-1)^n\cdot\dfrac{a_0}{a_n}$

삼차방정식과 사차방정식의 켤레근
삼차방정식 또는 사차방정식에서
① 모든 계수가 유리수일 때, 한 근이 $p+\sqrt{q}$이면 $p-\sqrt{q}$도 근이다. (단, p는 유리수, $\sqrt{q}$는 무리수이다.)
② 모든 계수가 실수일 때, 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, $p,\ q$는 실수, $q\neq 0,\ i=\sqrt{-1}$이다.)

방정식 $\boldsymbol{x^3}=1$의 허근 ω의 성질
방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면 다음이 성립한다.(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레 복소수이다.)
① $\omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1$
② $\omega^2+\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$
③ $\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$
④ $\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1,\ \overline{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}=-1$
⑤ 다른 한 허근은 ω^2이고, $\omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$이다.

〈참고〉 삼차방정식 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 하면 다음이 성립한다.
① $\omega^3=-1$ ② $\omega^2-\omega+1=0$
③ $\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$ ④ $\omega^2=-\overline{\omega},\ \overline{\omega^2}=-\omega$

미지수가 3개인 연립방정식

(1) 미지수가 3개인 연립방정식의 풀이

세 개의 미지수 중 한 개를 소거하여 미지수가 2개인 연립방정식을 만들어 푼다.

(2) 미지수가 3개인 순환형의 연립방정식의 풀이

(ⅰ) 주어진 방정식을 변끼리 더한다.

(ⅱ)(ⅰ)에서 구한 식과 주어진 식을 이용하여 연립방정식을 푼다.

연립이차방정식

(1) 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식 일차방정식을 어느 한 문자에 대하여 정리한 후, 이차방정식에 대입하여 푼다.

(2) 두 이차방정식으로 이루어진 연립방정식

① 인수분해되는 식이 있을 때, 인수분해가 되는 이차방정식을 인수분해하여 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 두 개의 연립방정식을 푼다.

② 인수분해되는 식이 없을 때 두 식을 연립하여 상수항을 소거하거나 이차항을 소거하여 푼다.

(3) $x,\ y$에 대한 대칭식인 연립방정식 $x+y=u,\ xy=v$일 때, $x,\ y$는 t에 대한 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용한다.

1. 삼차방정식의 세 근α, β, γ

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

$\Leftrightarrow$ $a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

ex1) $x^3+3x^2+4x-7=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$의 값을 구하여라.

풀이] -1

$x^3+3x^2+4x-7=0$

$\Leftrightarrow$ $1(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

$x=1$대입

$1^3+3\cdot 1^2+4\cdot 1-7=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$1=-(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$-1=(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

2. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 근과 계수의 관계

① $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

② $\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\dfrac{c}{a}$

③ $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

3. 켤레근

ex2) $ax^3+bx^2+cx+d=0(a,b,c,d$가 실수)

$1+2i$가 근 => $1-2i$도 근

$\Rightarrow$ 인수로 x^2-2x+5를 가진다.

※ 만약 a,b,c가 복소수라면 성립하지 않는다.

ex3) $ax^3+bx^2+cx+d=0(a,b,c,d$가 유리수)

$1+\sqrt{2}$가 근 => $1-\sqrt{2}$도 근

$\Rightarrow$ 인수로 x^2-2x-1를 가진다.

※ 만약 a,b,c가 실수라면 성립하지 않는다.

4. $x^3=1$의 한 허근을 ω

① $\omega^3=1$

② $\overline{\omega}^3=1$

③ $\omega^2+\omega+1=0$

④ $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

⑤ $\omega+\overline{\omega}=-1$

⑥ $\omega\overline{\omega}=1$

5. $x^3=-1$의 한 허근을 ω

① $\omega^3=-1$

② $\overline{\omega}^3=-1$

③ $\omega^2-\omega+1=0$

④ $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$

⑤ $\omega+\overline{\omega}=1$

⑥ $\omega\overline{\omega}=1$

6. 연립방정식

① 두 방정식의 공통의 해를 찾는다.

② 문자의 개수와 식의 개수가 일치할 때, 숫자인 해를 구할 수 있다.

ex4) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x+2y-z=2 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$ 를 풀어라.

풀이] $x=2,\ \ y=-3,\ \ z=-2$

ex5) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$ 를 풀어라.

풀이] $x=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}z$

한 문자를 다른 한 문자로 표현은 가능하다. 하지만 해를 숫자로 구할 수 없다.

241) [수상 R479번]
x에 대한 삼차방정식

$$x^3-4x^2+(m-14)x+2m-4=0$$

이 서로 다른 세 실근을 갖고 1보다 작거나 같은 근은 오직 1개이다. 정수 m의 값의 합은?

① 21 ② 24 ③ 27
④ 30 ⑤ 33

242) [수상 R480번]
삼차방정식 $x^3-kx^2+k-1=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 k의 값의 합을 구하고 그 과정을 서술하시오.

243) [수상 R483번]

사차방정식 $x^4+(2-2a)x^2+10-5a=0$이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지도록 하는 실수 a의 값의 범위가 $a>p$이다. 실수 p의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

244) [수상 R484번]

x에 대한 사차방정식

$$x^4+ax^2+a^4-8a^2+2b^2-4b+18=0$$

이 두 허근과 하나의 중근을 갖도록 하는 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

245) [수상 R485번]

x에 대한 삼차방정식

$$2x^3-(2k+1)x^2+(5k+2)x-2k-1=0$$

이 k의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 근을 구하시오.

246) [수상 R488번]

최고차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$가

$f(-2)=f(1)=f(3)$을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $x=2$일 때, 나머지 두 근을 각각 α, β라 하자. $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

247) [수상 R493번]
삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근을 각각 α, β, γ라 하자. $\dfrac{1}{\alpha\beta}$, $\dfrac{1}{\beta\gamma}$, $\dfrac{1}{\gamma\alpha}$을 세 근으로 하는 삼차방정식을 $x^3-x^2+3x-1=0$이라 할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

248) [수상 R494번]
삼차식 $f(x)=x^3+3x^2-9x-5$에 대하여 방정식 $f(3x+1)=0$의 세 근의 곱은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값은?

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

① 37 ② 34 ③ 31
④ 28 ⑤ 25

249) [수상 R495번]
사차방정식 $x^4-2x^3-x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\ \cdots\ +\omega^{100}$을 간단히 나타낸 것은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ ω ⑤ $1+\omega$

250) [수상 R496번]
삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\left(\dfrac{\omega^3+2\omega^2+\omega+1}{\omega^4+\omega^3-\omega}\right)^n$이 음의 실수가 되는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

251) [수상 R497번]
삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(n)=\frac{\omega^n}{1+\omega^n}$$

이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(300)$의 값은?

① 120 ② 130 ③ 140
④ 150 ⑤ 160

252) [수상 R499번]
연립방정식

$$\begin{cases} x+y+xy=-2 \\ x^2y+y^2x=-24 \end{cases}$$

를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 모든 xy의 값의 합은?

① -8 ② -5 ③ -2
④ 1 ⑤ 4

253) [수상 R500번]

x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{cases}(x+2)(y+2)=a \\ (x-4)(y-4)=a\end{cases}$$

의 해가 오직 한 쌍만 존재하도록 하는 실수 a의 값을 구하시오.

254) [수상 R503번]

어느 화장품 회사에서 식물에 포함되어 있는 성분 A를 추출하기 위해서 세 종류의 식물 X ,Y ,Z를 각각 $x\mathrm{g}$, $y\mathrm{g}$, $z\mathrm{g}$으로 총 $1\mathrm{kg}$을 준비했고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 성분 A는 세 종류의 식물 X, Y, Z에서 각각 식물 무게의 1%, 2%, 3%만큼 추출할 수 있다.

(나) 세 종류의 식물에서 성분 A를 모두 추출하면 $17\mathrm{g}$을 얻을 수 있다.

(다) 식물 X, Y의 무게의 합은 식물 Z의 무게의 4배이다.

x, y, z의 값을 구하시오.

255) [수상 R504번]

갑은 A지점에서 B지점까지, 을은 B지점에서 A지점까지 동시에 출발하여 일정한 속력으로 걸어간다. 둘이 만났을 때 갑은 을보다 $8\mathrm{km}$를 더 걸었다. 또 갑과 을이 만나고 난 후 갑은 1시간 후에 B지점에, 을은 4시간 후에 A지점에 도착하였다. 갑의 속력을 $x\mathrm{km}/$시, A에서 B까지의 거리를 $S\mathrm{km}$라 할 때, $x+S$의 값은?

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

256) [수상 R505번]

어느 공장에서 A, B, C세 사람이 부품을 조립하는 작업을 한다. A와 B두 사람이 하나의 부품을 조립하면 15분, B와 C두 사람이 하나의 부품을 조립하면 12분, C와 A두 사람이 하나의 부품을 조립하면 10분이 걸린다고 한다. A, B, C세 사람이 함께 하나의 부품을 조립할 때 걸리는 시간 (분)을 구하시오. (단, 세 사람 모두 시간당 작업 속도는 일정하며, 각 부품의 작업량은 동일하다.)

257) [수상 R506번]
x에 대한 이차방정식 $x^2+(m-1)x+2m+3=0$의 두 근이 정수가 되도록 하는 모든 실수 m의 값의 합은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

258) [수상 R507번]
x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 두 근이 모두 정수이고, $m:n=1:2$일 때, $m+n$의 최댓값을 구하시오.
(단, m, n은 실수이다.)

259) [수상 R508번]
두 정수 $x,\ y$에 대하여 $x^2+y^2-2x+4y-8=0$이 성립할 때, xy의 최댓값을 구하시오.

260) [수상 R509번]
x에 대한 삼차방정식

$$ax^3-2bx^2+4(a+b)x-16a=0$$

이 서로 다른 세 정수를 근으로 가질 때,
$|a|\le 30,\ |b|\le 30$을 만족시키는 정수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

261) [수상 R510번]

x에 대한 삼차방정식 $x^3-2x^2+x=k^3-2k^2+k$가 중근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{5}{3}$

④ $\frac{13}{6}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

262) [수상 R511번]

방정식 $|x^2-4x|-x+k=3$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 합은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{11}{4}$

④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{19}{4}$

263) [수상 R512번]
x에 대한 이차방정식 $x^2-2(2k+1)x+3k^2+4k+9=0$의 두 근이 모두 정수일 때 모든 정수 k의 값의 곱을 구하시오.

264) [수상 R514번]
방정식 $x^{10}=1$에서 1이 아닌 근을 ω_1, ω_2, ω_3, $\cdots$, ω_9 라고 할 때, $(1-\omega_1)(1-\omega_2)(1-\omega_3)\cdots(1-\omega_9)$ 의 값을 구하여라.

265) [수상 R516번]
x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-2=0$이 한 실근과 두 허근 α, $\frac{\alpha^2}{2}$을 갖는다. 두 실수 a, b에 대하여 $2a+b$의 값을 구하시오.

266) [수상 R517번]
삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(n)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\ \cdots\ +\frac{1}{\omega^n}$$

이라 정의할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $f(3)=0$
ㄴ. 자연수 k에 대하여 $f(3k-2)=1$이다.
ㄷ. $\{f(n)\}^2+f(n)=0$을 만족시키는 모든 두 자리 자연수 n의 개수는 50이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

267) [수상 R518번]
연립방정식

$$\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2-3x-y-2=0 \\ 2x^2-5xy+2y^2+x+y-1=0 \end{cases}$$

의 해를 모두 구하시오.

268) [수상 R519번]
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2x+1$과 접할 때, 방정식

$\{f(x)-2x\}^3-2\{f(x)-2x\}^2-5\{f(x)-2x\}+6=0$

의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

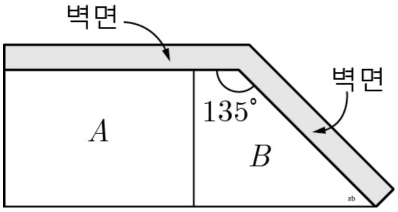
269) [수상 R520번]

어떤 일을 끝마치는 데 A, B, C 세 사람이 함께 일하면 45분이 걸리고, A, B 두 사람이 함께 일하면 72분이 걸리고, A, C 두 사람이 함께 일하면 80분이 걸린다. B가 혼자 1시간 동안 일하고 남은 일을 C가 이어서 한다면 남은 일을 끝마치는 데 걸리는 시간은?

① 40분 ② 45분 ③ 50분
④ 55분 ⑤ 60분

270) [수상 R522번]

그림과 같이 135°로 꺾인 벽면이 있는 땅에 길이가 120m인 철망으로 울타리를 설치하여 직사각형 모양의 농장 A와 사다리꼴 모양의 농장 B를 만들려고 한다. 농장 A의 넓이가 농장 B의 넓이의 2배일 때, 농장 B의 넓이의 최댓값을 $S(\text{m}^2)$라 하자. S의 값을 구하시오. (단, 벽면에는 울타리를 설치하지 않고, 철망의 폭은 무시한다.)



271) [수상 R523번]

x^3의 계수가 1인 삼차식 $P(x)$에 대하여

$$P(1)=P(3)=P(4)=-1$$

이 성립할 때, 방정식 $P(x)=0$의 모든 근의 곱을 구하여라.

부등식과 함수

(8) 이차부등식

해 = x
값 = y

부등식의 기본성질

① $a>b,\ b>c$ 이면 $a>c$
② $a>b$ 이면 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$
③ $a>b$, $c>0$ 이면 $ac>bc,\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$
④ $a>b$, $c<0$ 이면 $ac<bc,\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

└── 음수를 곱하거나 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다

〈참고〉
① $a,\ b$가 같은 부호이면 $ab>0,\ \frac{a}{b}>0$
② $a,\ b$가 다른 부호이면 $ab<0,\ \frac{a}{b}<0$

두 수 또는 두 식의 대소 관계

(1) 차의 부호를 조사
① $A-B>0$ 이면 $A>B$
② $A-B=0$ 이면 $A=B$
③ $A-B<0$ 이면 $A<B$

(2) 제곱의 차의 부호를 조사 : $A>0,\ B>0$일 때
$A^2-B^2>0$ 이면 $A>B$

(3) 두 수의 비를 조사 : $A>0,\ B>0$일 때
① $\frac{A}{B}>1$ 이면 $A>B$
② $\frac{A}{B}=1$ 이면 $A=B$
③ $\frac{A}{B}<1$ 이면 $A<B$

절댓값 기호를 1개 포함한 일차부등식

$a>0,\ b>0$일 때,
① $|x|<a$ 이면 $-a<x<a$
② $|x|\ge a$ 이면 $x\le -a$ 또는 $x\ge a$
③ $a<|x|<b$ 이면
$-b<x<-a$ 또는 $a<x<b$ (단,, $b>a$)

〈참고〉 절댓값 기호를 포함한 부등식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 푼다.

절댓값 기호를 2개 이상 포함한 일차부등식

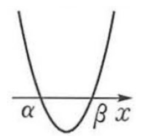
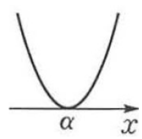
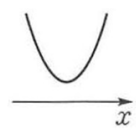
절댓값 기호를 2개 이상 포함한 $|x-a|+|x-b|<c$ 꼴의 부등식은 x의 값의 범위를 다음과 같이 세 경우로 나누어 푼다. (단, $a<b,\ c>0$)

(ⅰ) $x<a$ (ⅱ) $a\le x<b$ (ⅲ) $x\ge b$

이때 위의 세 가지 경우에서 구한 각 범위를 모두 합한 범위가 구하는 부등식의 해이다.

이차부등식의 해

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a>0)$에서 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면 이차부등식의 해는 다음과 같다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=f(x)$의 그래프			
$f(x)>0$의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$f(x)<0$의 해	$\alpha<x<\beta$	없다.	없다.

〈참고〉 $a<0$일 때에는 이차부등식의 양변에 -1을 곱하여 x^2의 계수를 양수로 바꾸어 생각한다. 이때 부등호의 방향이 바뀜에 주의한다.

해가 주어진 이차부등식

(1) 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-\alpha)(x-\beta)<0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$

(2) 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-\alpha)(x-\beta)>0$, 즉 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta>0$

〈참고〉 주어진 해를 이용하여 이차부등식을 작성할 때에는 이차부등식의 부등호의 방향을 먼저 정한다.

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.

① $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow a>0, D<0$

② $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow a<0, D<0$

③ $ax^2+bx+c\geq 0 \Rightarrow a>0, D\leq 0$

④ $ax^2+bx+c\leq 0 \Rightarrow a<0, D\leq 0$

〈참고〉 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하고, $f(x)<0$이려면 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.

연립이차부등식

(1) 연립부등식 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ 의 해는 두 부등식 $f(x)>0$, $g(x)>0$의 공통부분이다.

(2) 부등식 $f(x)<g(x)<h(x)$의 해는 두 부등식

$f(x)<g(x)$, $g(x)<h(x)$의 공통부분이다.

〈참고〉 연립부등식은 각 부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타낸 다음 공통부분을 찾는다.

1. 부등식의 해, 근 => x범위

2. 대소비교 : '차'를 통해서 주로 비교한다.

ex1) $0<a<b$이면 $3b^2>a^2+2ab$를 밝히세요.
풀이]
$3b^2-(a^2+2ab)=3b^2-2ab-a^2=(3b+a)(b-a)>0$
$3b^2>a^2+2ab$

3. 절댓값 부등식

ex2) 부등식 $|x|<a\ (a>0)$을 풀어라.
풀이]
$-a<x<a$

ex3) 부등식 $|x|\ge a\ (a>0)$을 풀어라.
풀이]
$-a\ge x$ or $a\le x$

ex4) $2|x-1|<x$

풀이]
(ⅰ) $x<1$일 때, $-2(x-1)<x$, $-3x<-2$
$\therefore\ x>\frac{2}{3}$
그런데 $x<1$이므로 $\frac{2}{3}<x<1$
(ⅱ) $x\ge 1$일 때, $2(x-1)<x\ \therefore\ x<2$
그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x<2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{2}{3}<x<2$

※ 기본적으로 (ⅰ), (ⅱ)는 공통된 범위가 없다. 왜냐하면 $x\ge 1$, $x<1$이기 때문이다. 하지만 둘 다 답이 되기 때문에 (ⅰ)의 답도 답이 되고, (ⅱ)의 답도 답이 된다. 따라서 둘 다 답으로 적어야 한다. $\frac{2}{3}<x<1$ 또는 $1\le x<2$이 정답이다. 하지만 수학적으로 '$\frac{2}{3}<x<1$ 또는 $1\le x<2$'이나 $\frac{2}{3}<x<2$이나 같은 정답이다. 그러므로 굳이 따로 전자처럼 쓸 필요가 없는 것이다. 그래서 학교 서술형에도 후자처럼 써야한다.

ex5) 부등식 $2|x-1|+3|x+1|<9$을 풀어라.
풀이]
부등식 $2|x-1|+3|x+1|<9$에서
(ⅰ) $x<-1$일 때
$-2(x-1)-3(x+1)<9$, $-2x+2-3x-3<9$
$-5x<10\quad \therefore x>-2$
그런데 $x<-1$이므로 $-2<x<-1$
(ⅱ) $-1\le x<1$일 때
$-2(x-1)+3(x+1)<9$, $-2x+2+3x+3<9$
$\therefore x<4$
그런데 $-1\le x<1$이므로 $-1\le x<1$
(ⅲ) $x\ge 1$일 때
$2(x-1)+3(x+1)<9$, $2x-2+3x+3<9$
$5x<8\quad \therefore x<\frac{8}{5}$
그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x<\frac{8}{5}$
이상에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<\frac{8}{5}$

ex6) 부등식 $1<|2x+1|<6$을 풀어라.
풀이]
$1<|2x+1|<6$에서
$1<2x+1<6$또는 $-6<2x+1<-1$
(i) $1<2x+1<6$에서 $0<2x<5$ $\therefore\ 0<x<\frac{5}{2}$
(ii) $-6<2x+1<-1$에서 $-7<2x<-2$
$\therefore -\frac{7}{2}<x<-1$
(i), (ii)에서 $-\frac{7}{2}<x<-1$또는$0<x<\frac{5}{2}$

4. 식의 변형 : 식을 변형해도 해는 바뀌지 않는다.
$2x^2+5x\le 0$의 해 = $2x^2+3x\le -2x$의 해

5. 함수와 부등식과의 관계
부등식$x^2-2x+1<x+5$의 실근
$\Rightarrow$ $y=x^2-2x+1$가 $y=x+5$보다 아래에 놓여있는 x범위

6. 보통의 해($a>0$, $\alpha<\beta$)
① $a(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Rightarrow \alpha<x<\beta$
② $a(x-\alpha)(x-\beta)>0 \Rightarrow x<\alpha$ 또는 $\beta<x$

ex7) $x^2-3x+2<0$
풀이]
$x^2-3x+2<0$에서 $(x-1)(x-2)<0$
$\therefore\ 1<x<2$

ex8) $x^2+2x-8\ge 0$
풀이]
$x^2+2x-8\ge 0$에서 $(x+4)(x-2)\ge 0$
$\therefore\ x\le -4$ 또는 $x\ge 2$

7. 특수한 해

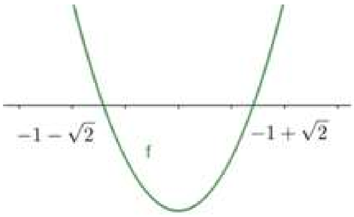
① 실근을 가지면 인수분해

② 허근을 가지면 완전제곱식

ex9) $x^2+2x-1\le 0$

풀이]

$x^2+2x-1\le 0$에서 $(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})\le 0$

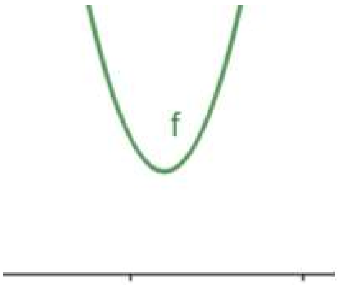


$-1-\sqrt{2}\le x\le -1+\sqrt{2}$

ex10) $x^2-2x+4<0$

풀이]

$x^2-2x+4=(x-1)^2+3$



따라서 $x^2-2x+4<0$의 해는 없다.

※ 빨리 풀기

ⅰ) 우선 판별식으로 <u>실근인지 허근인지 판단</u>.

ⅱ) 작다는 안쪽으로 암기한다.$(a>0)$

$a(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Rightarrow \alpha<x<\beta$

8. 연립부등식: 공통의 범위

ex11) $5x-3\le x^2+3<2x+11$

풀이]

$5x-3\le x^2+3$에서

$x^2-5x+6\ge 0$, $(x-2)(x-3)\ge 0$

$\therefore x\le 2$ 또는 $x\ge 3$ …… ㉠

$x^2+3<2x+11$에서

$x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$ …… ㉡

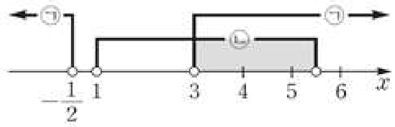
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-2<x\le 2$ 또는 $3\le x<4$

9. 공통 범위구하기

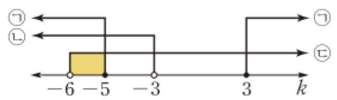
ex12) ㉠ $x < -\frac{1}{2}$ 또는 $x > 3$ ㉡ $1 < x < \frac{11}{2}$

풀이] $3 < x < 5.5$



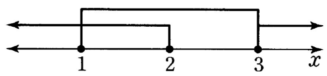
ex13) ㉠ $k \le -5$ 또는 $k \ge 3$ ㉡ $k < -3$ ㉢ $k > -6$

풀이] $-6 < k \le -5$



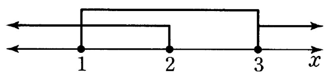
ex14) ㉠ $x \le 2$ 또는 $3 \le x$ ㉡ $1 \le x \le 3$

풀이] $1 \le x \le 2$ 또는 $x = 3$



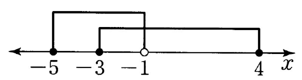
ex15) ㉠ $x \le 2$ 또는 $3 \le x$ ㉡ $1 \le x < 3$

풀이] $1 \le x \le 2$



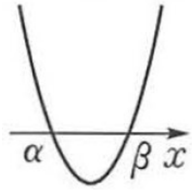
ex16) $\{x \mid -5 \le x < -1\} - \{x \mid -3 \le x \le 4\}$

풀이] $-5 \le x < -3$



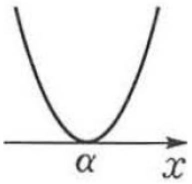
10. $y = ax^2 + bx + c$와 x축$(y=0)$과의 관계

①



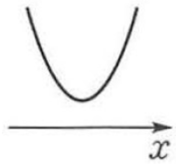
$a > 0$, $D > 0$

②



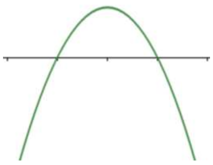
$a > 0$, $D = 0$

③



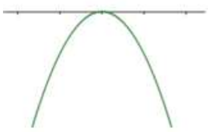
$a > 0$, $D < 0$

④



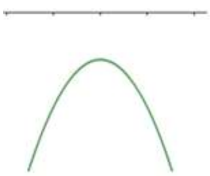
$a < 0$, $D > 0$

⑤



$a < 0$, $D = 0$

⑥



$a < 0$, $D < 0$

※ 절대 암기하는 것이 아니라, 이해해서 적용해야한다.

11. 케이스에 따른 해 구하기

ex17) 이차부등식 $ax^2+2x+a>0$이 해를 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?(단, $a \neq 0$)

풀이]

(ⅰ) $a>0$일 때

이차함수 $y=ax^2+2x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ⅱ) $a<0$일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+2x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-a \cdot a>0,\ a^2-1<0$

$(a+1)(a-1)<0 \qquad \therefore\ -1<a<1$

그런데 $a<0$이므로 $-1<a<0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 a의 값의 범위는

$a>0$ 또는 $-1<a<0$

※ 기본적으로 (ⅰ), (ⅱ)는 공통된 범위가 없다. 왜냐하면 $a>0,\ a<0$이기 때문이다. 하지만 둘 다 답이 되기 때문에 (ⅰ)의 답도 답이 되고, (ⅱ)의 답도 답이 된다. 따라서 둘 다 답으로 적어야 한다.

다음 두 수의 대소를 비교하여라.

272) [수상 R536번]

5^{10}, 3^{15}

273) [수상 R538번]

세 수 $a=4$, $b=\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $c=\sqrt{2}+\sqrt{10}$ 의 대소 관계는?

① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$

④ $b<c<a$ ⑤ $c<b<a$

274) [수상 R582번]
사차방정식 $x^4-kx^2+k^2-2k-8=0$ 이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 무수히 많다.

275) [수상 R583번]
이차방정식 $x^2+2(m-1)x+m+5=0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

276) [수상 R591번]
수직선 위의 실수 x에 대하여 x와 -2 사이의 거리와 x와 5사이의 거리의 합이 9보다 크거나 같다. 실수 x의 값의 범위는?

① $x \le -3$ 또는 $x \ge 6$
② $-3 \le x \le 6$
③ $x \le -2$ 또는 $x \ge 8$
④ $-4 \le x \le 8$
⑤ $x \le -1$ 또는 $x \ge 10$

277) [수상 R599번]
x에 대한 부등식

$$(k+1)x^2 + k - 2 \le x^2 - kx$$

를 만족시키는 실수 x의 값이 존재하도록 하는 음이 아닌 정수 k의 개수는?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

278) [수상 R602번]
부등식 $[x+2]^2-2[x+4]-11 \le 0$ 을 만족시키는 실수 x 의 값의 범위를 구하시오.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

279) [수상 R605번]
두 이차함수 $f(x),\ g(x)$에 대하여 이차부등식 $f(x) \le g(x)$의 해가 $-2 \le x \le 3$이고, $f(1)-g(1)=-24$일 때, $f(5)-g(5)$의 값을 구하시오.

280) [수상 R606번]

이차함수 $f(x)=x^2-(2k+1)x+k^2-14$가 다음 조건을 만족시킬 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

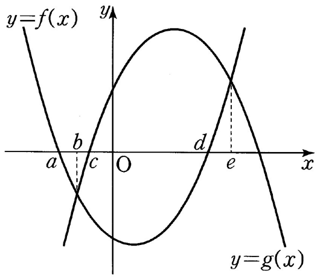
(가) 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 2보다 작고, 다른 한 근은 2보다 크다.
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $1 \le x \le 4$에서 최댓값 $f(1)$을 갖는다.

281) [수상 R607번]

이차방정식 $x^2+2kx+2k^2-4k-12=0$의 두 실근 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오. (단, k는 실수이다.)

282) [수상 R608번]

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $0 \le f(x) < g(x)$의 해는?



① $a \le x < c$　　② $x \ge d$

③ $b < x < e$　　④ $d \le x < e$

⑤ $x \le c$ 또는 $x > d$

283) [수상 R609번]

연립부등식

$$\begin{cases} |x+2| \le 5 \\ [x]^2 - 2[x] - 8 < 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-3 \le x \le 1$　　② $x < -3$또는 $x > 1$

③ $-1 \le x \le 3$　　④ $x < -1$또는 $x > 3$

⑤ $1 \le x \le 3$

284) [수상 R610번]
연립부등식

$$\begin{cases} x^2-x-6 \geq 0 \\ 3x^2-(a+6)x+2a<0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x가 오직 3뿐일 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $4<a\leq 8$　② $6<a\leq 9$
③ $8<a\leq 10$　④ $9<a\leq 12$
⑤ $10<a\leq 14$

285) [수상 R613번]
연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-12 \geqq 0 \\ x^2-6x+5<0 \end{cases}$ 의 해가 방정식 $[x]^2+a[x]+b=0$의 해와 일치할 때, 두 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

286) [수상 R614번]
연립부등식

$$\begin{cases} x^2-3x-4 \geq 0 \\ x^2-2(k+1)x+(k+3)(k-1) \leq 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 값의 합은?

① 3 ② 2 ③ 1
④ 0 ⑤ -1

287) [수상 R615번]
x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2+ax+b \geq 0 \\ x^2+cx+d \leq 0 \end{cases}$$

의 해가 $x=3$ 또는 $1 \leq x \leq 2$일 때, 네 상수 a, b, c, d에 대하여 $(a+b)-(c+d)$의 값을 구하시오.

288) [수상 R618번]
x에 대한 이차방정식

$$x^2+2(2k-a)x+k^2+4k-a=0$$

이 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위를 구하고 그 과정을 서술하시오.

289) [수상 R619번]
이차방정식 $x^2+2kx-k=0$의 서로 다른 두 근이 모두 -1과 3 사이에 있을 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $-3<k<1$
② $-3<k<-1$ 또는 $0<k<1$
③ $-3<k<\frac{1}{3}$
④ $-\frac{9}{5}<k<\frac{1}{3}$
⑤ $-\frac{9}{5}<k<-1$ 또는 $0<k<\frac{1}{3}$

290) [수상 R620번]

이차방정식 $x^2+5x+k=0$의 두 근 중에서 한 근이 이차방정식 $x^2+3x+2=0$의 두 근 사이에 존재할 때, 정수 k의 값을 구하시오.

291) [수상 R621번]

이차방정식 $x^2-2(a+1)x+a-2=0$의 한 근이 -2와 0 사이에 있고, 다른 한 근은 3과 5 사이에 있도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

292) [수상 R627번]
모든 실수 x에 대하여 $ax^2-2\sqrt{2}x+3$의 값이 a보다 크도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라. (단, $a\neq 0$)

293) [수상 R628번]
직선 $y=x+1$이 포물선 $y=x^2-ax+3$과 만나는 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB 위에 점 $(1,\ 2)$가 존재하도록 하는 실수 a의 값의 범위는? (단, 점 A, B의 x좌표는 1이 아니다.)

① $a<0$ ② $a<1$ ③ $a<2$
④ $a>1$ ⑤ $a>2$

294) [수상 R629번]
x에 대한 삼차방정식
$x^3+(2k+1)x^2+(2k^2+2k-1)x+2k^2-1=0$의 세 근이 존재할 때, 세 근 중 적어도 하나가 양수일 때, 실수 k값의 범위는?

295) [수상 R630번]
두 이차함수

$$f(x)=x^2+4x+6,\ g(x)=-x^2-2ax-2$$

가 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\geq g(x_1)$이 성립하도록 하는 정수 a의 개수를 p, 부등식 $f(x_1)\geq g(x_2)$가 성립하도록 하는 정수 a의 개수를 q라 하자. $p+q$의 값을 구하시오.

296) [수상 R632번]

x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} 8x^2 > 2x+1 \\ x^2-(2+a)x+2a<0 \end{cases}$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, a는 실수이다.)

ㄱ. $a=2$이면 주어진 연립부등식을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않는다.
ㄴ. $4<a\le 5$이면 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 3, 4뿐이다.
ㄷ. 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 -1, 1만 존재하도록 하는 a의 값의 범위는 $-3<a\le -2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ. ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

297) [수상 R633번]

이차방정식 $x^2-(k+1)x+k-4=0$의 서로 다른 두 실근 α, β에 대하여 두 실근 중 적어도 하나가 -1이상 2이하가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-3$ 또는 $k>2$ ② $-2\le k\le 1$
③ $k\le -1$ ④ $k\le -2$ 또는 $k\ge 1$
⑤ $k>2$

298) [수상 R634번]

이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k-3=0$의 두 근 α, β가 각각 $[\alpha]=-2$, $[\beta]=1$을 만족시킬 때, 실수 k의 값의 범위는 $p<k\le q$이다. $p+q$의 값은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{6}{5}$

④ $\frac{8}{5}$ ⑤ 2

299) [수상 R635번]

이차함수 $f(x)=px^2-qx+r$와 방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)=f(1-x)$이다.
(나) $-1<\alpha<1<\beta<3$

$\frac{r}{p}$의 값의 범위는? (단, p, q, r는 실수이다.)

① $-5<\frac{r}{p}<1$ ② $1<\frac{r}{p}<3$

③ $\frac{r}{p}<-1$ 또는 $\frac{r}{p}>3$ ④ $-3<\frac{r}{p}<1$

⑤ $\frac{r}{p}<-3$ 또는 $\frac{r}{p}>1$

300) [수상 R637번]

이차부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 $x=2$뿐일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오.

<보 기>

ㄱ. $a<0$
ㄴ. $b^2-4ac=0$
ㄷ. $a+b+c<0$
ㄹ. $b=-c$

301) [수상 R638번]

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$\frac{(a+1)x^2+(a-2)x+(a+1)}{x^2+x+1}>b$$

가 성립할 때, 두 상수 a, b 사이의 관계식을 나타낸 것은?

① $a<b$ ② $a \leq b$ ③ $a=b$
④ $a>b$ ⑤ $a \geq b$

302) [수상 R639번]

x 에 대한 부등식 $a(x^2+x+1)>2x$ 를 만족하는 x의 값이 존재하도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하시오.

303) [수상 R640번]

연립이차부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4 \le 0 \\ x^2-4kx-5k^2>0 \end{cases}$ 의 해가 존재하도록 하는 정수 k의 개수를 구하고, 그 풀이 과정을 서술하시오.

도형의 방정식

(9) 점

(10) 직선의 방정식

(11) 원의 방정식

(12) 이동

두 점 사이의 거리

(1) 수직선 위의 두 점 $A(x_1), B(x_2)$사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}} = |x_2 - x_1|$

(2) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

특히 원점과 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

〈참고〉

(1) 점 P가 x축 위에 있다. ⇨ P(a, 0)으로 놓는다.

(2) 점 P가 y축 위에 있다. ⇨ P(0, a)으로 놓는다.

(3) 점 P가 함수 $y = f(x)$의 그래프 위에 있다.

⇨ $P(a, f(a))$으로 놓는다.

좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2,\ \mathrm{y}_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m > 0,\ n > 0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 하면

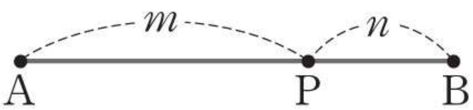
$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right), \quad \mathrm{Q}\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right) \ (\text{단, } m \neq n)$$

〈증명〉

선분 AB 위의 한 점 P에 대하여

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = m : n \ (m > 0,\ n > 0)$

일 때, 점 P는 선분 AB를 $m : n$으로 내분한다고 한다.

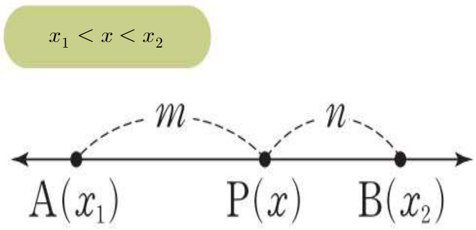


■ 참 고 | 점 P를 선분 AB의 내분점이라고 한다.

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m > 0,\ n > 0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 x를 구해 보자.

(i) $x_1 < x_2$일 때 $(x_1 < x < x_2)$

$\overline{\mathrm{AP}} = x - x_1$, $\overline{\mathrm{PB}} = x_2 - x$



이고, $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = m : n$이므로

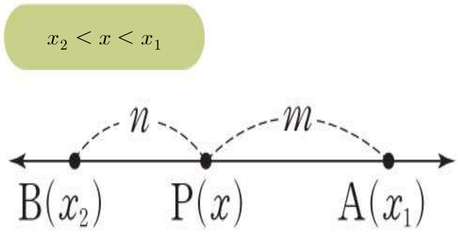
$(x - x_1) : (x_2 - x) = m : n$

$x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

이다.

(ii) $x_1 > x_2$일 때 $(x_2 < x < x_1)$

$\overline{\mathrm{AP}} = x_1 - x$, $\overline{\mathrm{PB}} = x - x_2$



이고, $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = m : n$이므로

$(x_1 - x) : (x - x_2) = m : n$

$x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

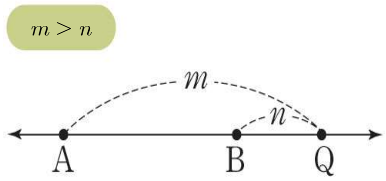
〈참고〉 두 점 $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2,\ \mathrm{y}_2)$에 대하여 선분 AB의 중점 은 선분 AB를 1 : 1로 내분하는 점이므로 그 좌표는

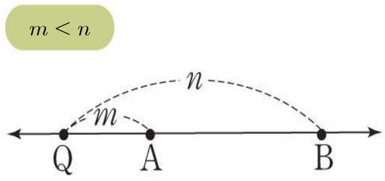
$\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

선분 AB의 연장선 위의 점 Q에 대하여

$\overline{\mathrm{AQ}} : \overline{\mathrm{BQ}} = m : n \ (m > 0,\ n > 0,\ m \neq n)$

일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m : n$으로 외분한다고 한다.





■ 참 고 | 점 Q를 선분 AB의 외분점이라고 한다.

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표 x를 구해 보자.

먼저 $x_1<x_2$일 때

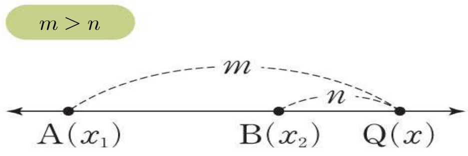
(i) $m>n$이면

$\overline{\mathrm{AQ}}=x-x_1$, $\overline{\mathrm{BQ}}=x-x_2$에서

$(x-x_1):(x-x_2)=m:n$이므로

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

이다.



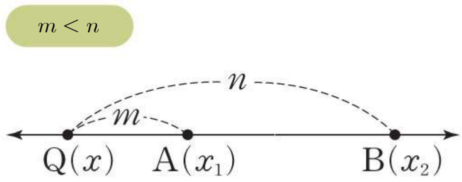
(ii) $m<n$이면

$\overline{\mathrm{AQ}}=x_1-x$, $\overline{\mathrm{BQ}}=x_2-x$에서

$(x_1-x):(x_2-x)=m:n$이므로

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

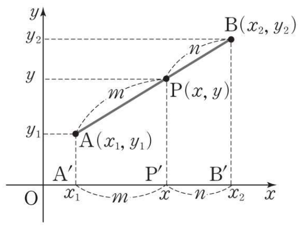
이다.



또한, $x_1>x_2$일 때에도 같은 결과를 얻을 수 있다.

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 $(x,\ y)$를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, P에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, P′이라고 하면 다음이 성립한다.



$$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'P'}}:\overline{\mathrm{P'B'}}$$
$$=m:n$$

이때 점 P′은 x축 위에서 선분 A′B′을 $m:n$으로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

이다.

또, y축 위에서도 마찬가지로 생각하면

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

이다.

따라서 내분하는 점 P는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

특히, $m=n$일 때 선분 AB의 중점 M은 다음과 같다.

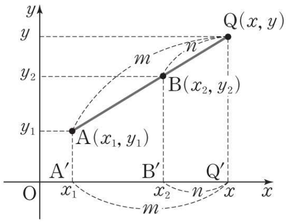
$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

마찬가지 방법으로 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 이은 선분 AB를

$m:n\ \ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

으로 외분하는 점 Q를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$



삼각형의 무게중심과 평행사변형

(1) 세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

[증명]

변 BC의 중점을 $\mathrm{M}(x',\ y')$이라고 하면

$$x'=\frac{x_2+x_3}{2},\ y'=\frac{y_2+y_3}{2}$$

무게중심 $\mathrm{G}(x,\ y)$는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

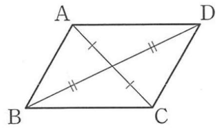
$$x=\frac{2x'+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y=\frac{2y'+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

(2) 평행사변형 ABCD의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 두 대각선의 중점이 일치한다.

즉 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점은 일치한다.



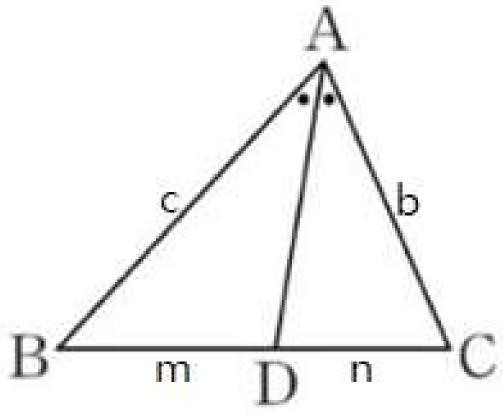
〈참고〉

(1) 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 각각 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분한 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.

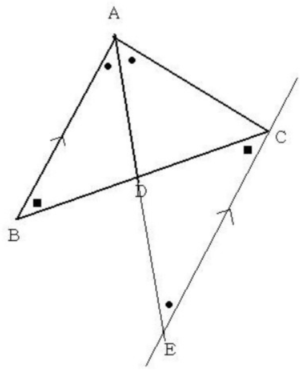
(2) 삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여 세 삼각형 GAB, GBC, GCA의 넓이는 서로 같다.

· 내각의 이등분선의 정리

$c:b=m:n$



[증명]

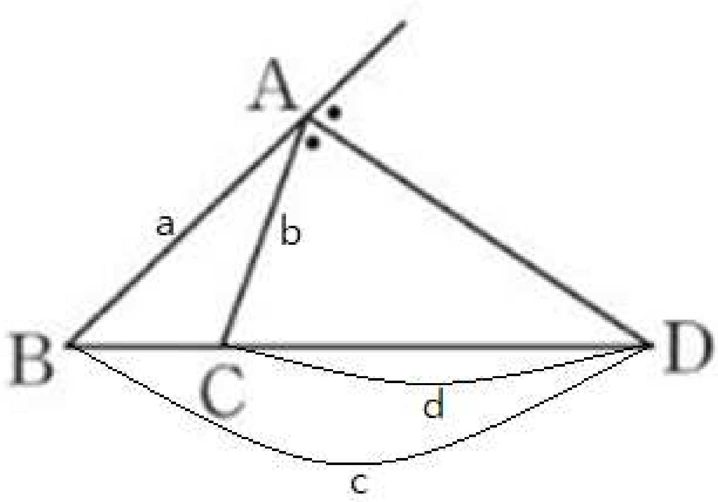


점 C를 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 직선과 , $\overline{AD}$의 연장선과 만나는 교점을 E라 하면
∠BAD = ∠DEC
∠ABD= ∠DCE
△CAE는 이등변 삼각형이므로 $\overline{AC}=\overline{CE}$

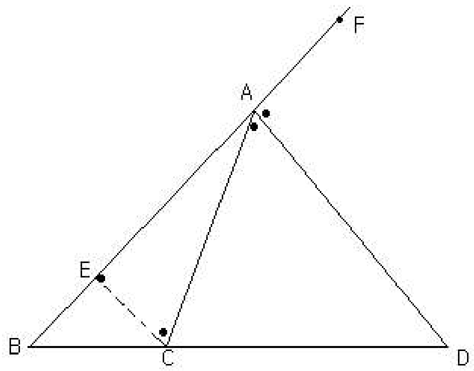
△DAB∽△DEC 이므로
$\overline{AB}$: $\overline{CE}$ = $\overline{BD}$: $\overline{CD}$
$\overline{AC}=\overline{CE}$이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

· 외각의 이등분선의 정리

$a : b = c : d$



[증명]



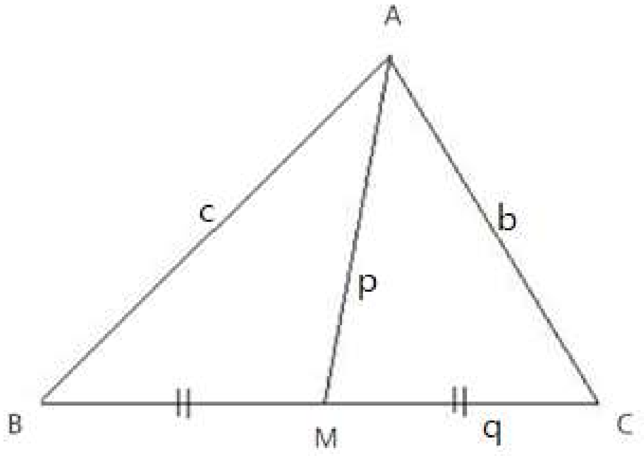
점 C에서 변 AD에 평행선을 긋고 변 BA 와의 교점을 E 라 하면,
∠DAC = ∠ACE (∵ 엇각)
∠FAD = ∠AEC (∵ 동위각) 이므로
$\overline{AC} = \overline{AE}$ 이다.

그리고 △BAD ∽ △ BEC 이므로
$\overline{BA}$: $\overline{AE} = \overline{BD}$: $\overline{CD}$ 이다.
여기서 $\overline{AC} = \overline{AE}$ 이므로
$\overline{BA}$: $\overline{AC} = \overline{BD}$: $\overline{CD}$ 이다.

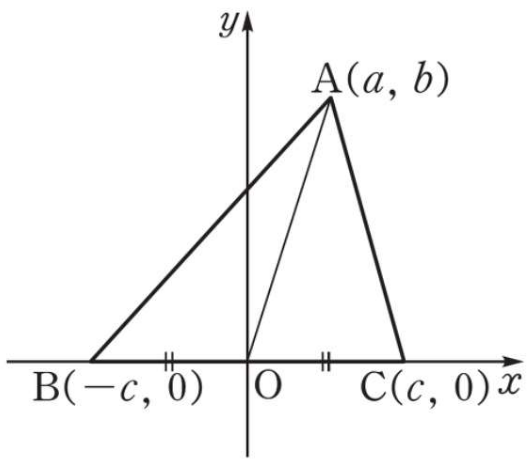
그러므로 $\overline{AB}$: $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$: $\overline{CD}$ 이다.

· 파푸스의 중선정리

$b^2 + c^2 = 2(p^2 + q^2)$



[증명]



그림과 같이 직선 BC를 x축, 선분 BC의 수직이등분선을 y축으로 정하면 점 M은 원점이 된다.
이때, $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 이라고 하면

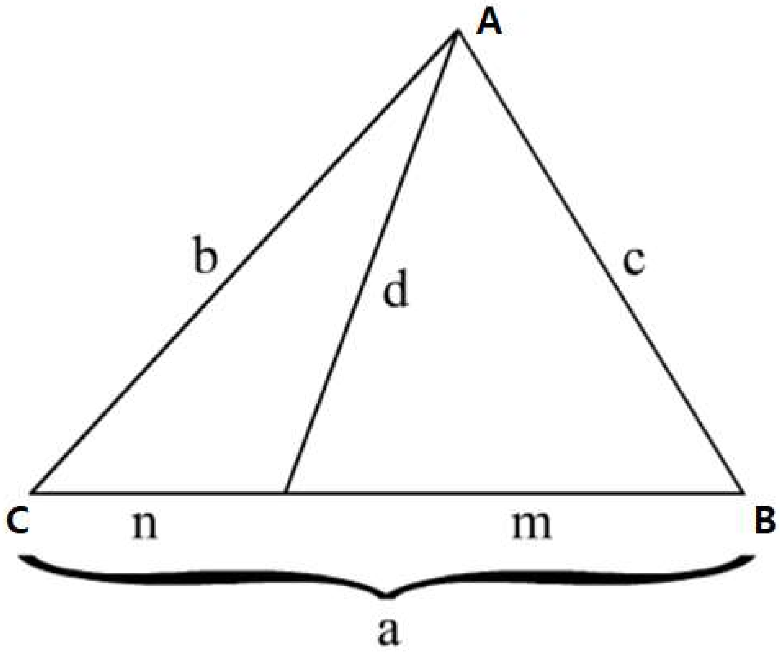
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$
$= \{(-c-a)^2 + (0-b)^2 + (c-a)^2 + (0-b)^2\}$
$= 2(a^2 + b^2 + c^2)$

한편, $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2$, $\overline{BM}^2 = c^2$ 이므로
$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + b^2 + c^2$

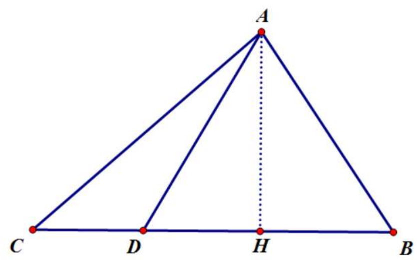
따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이 성립한다.

· 스튜어트 정리

$mb^2 + nc^2 = a(d^2 + mn)$



[증명]



$\overline{AH} = h$, $\overline{DH} = x$라 하자.

그럼 $\triangle ADH$에서 피타고라스 정리에 의해, $h^2 + x^2 = d^2$이다.
$\triangle AHB$에서 마찬가지로
$h^2 + (m-x)^2 = c^2$,
$h^2 + m^2 - 2mx + x^2 = d^2 + m^2 - 2mx = c^2$이다.

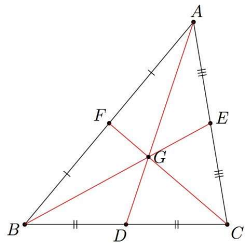
그리고 $\triangle AHC$에서 마찬가지로
$h^2 + (n+x)^2 = b^2$,
$h^2 + n^2 + 2nx + x^2 = d^2 + n^2 + 2nx = b^2$이다.

두번째 식에 n을, 세번째 식에 m을 곱하여 더해주면,
$nd^2 = m^2n - 2mnx + md^2 + mn^2 + 2mnx$
$= d^2(m+n) + mn(m+n)$
$= (m+n)(mn+d^2)$
$= a(mn+d^2) = mb^2 + nc^2$

삼각형의 오심

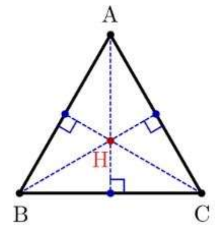
무게중심

① 세 중선의 교점
② 꼭짓점으로부터 2:1의 길이비를 이룬다.
③ 6개 삼각형의 넓이는 같다.
④ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$



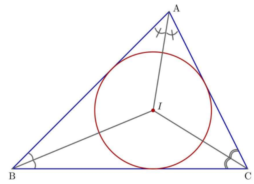
수심

① 꼭짓점에서 각 변으로 내린 수선의 교점



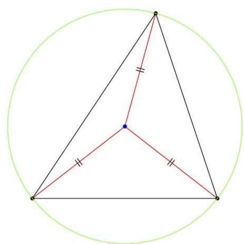
내심

① 각의 이등분선의 교점
② 내접원의 중심
③ 각 변에 내린 수선의 발의 길이가 모두 같다.



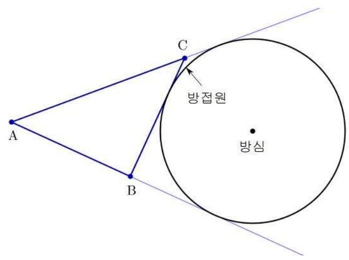
외심

① 세 변의 수직이등분선의 교점
② 외접원의 중심
③ 꼭짓점에서 외심까지의 길이가 모두 같다.



방심

삼각형의 외부에 있으면서 삼각형의 한 변과 다른 두 변의 연장선과 접하는 원을 그 삼각형의 방접원이라고 한다.
① 방접원의 중심



1. 거리

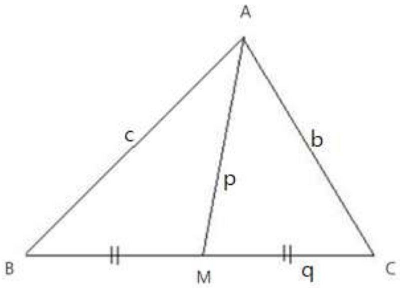
x_1, x_2사이의 거리: $|x_1 - x_2|$ = $|x_2 - x_1|$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$사이의 거리: $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

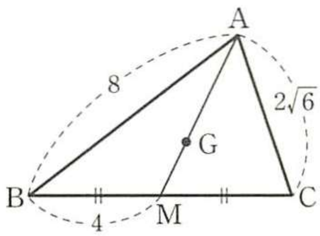
2. 정리

① 파푸스의 중선정리

$b^2 + c^2 = 2(p^2 + q^2)$



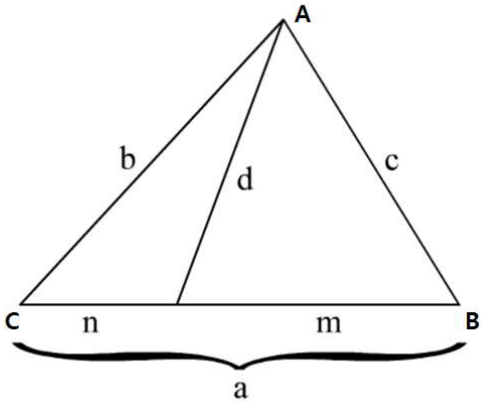
ex1) 그림과 같이 삼각형 ABC에서 점 M은 변 BC의 중점이다. $\overline{\mathrm{AM}}$의 길이를 구하여라.



풀이] 파푸스 중점 연결정리에 의해 $2\sqrt{7}$

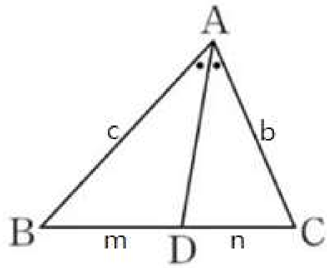
② 스튜어트 정리

$mb^2 + nc^2 = a(d^2 + mn)$



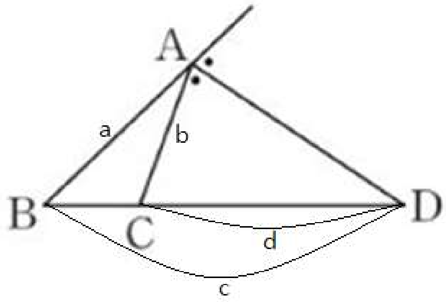
③ 내각의 이등분선의 정리

$c : b = m : n$

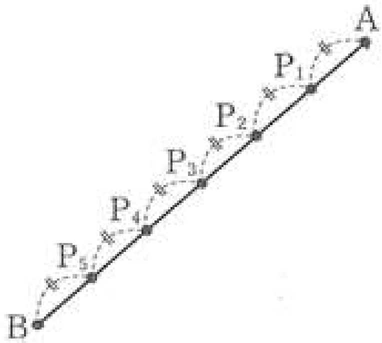


④ 외각의 이등분선의 정리

$a : b = c : d$



3. 내분점과 외분점



① B와 A를 1:5로 내분하는 내분점: P_5
② B와 A를 1:2로 내분하는 내분점: P_4
③ A와 B를 1:2로 내분하는 내분점: P_2
④ A와 B를 1:1로 내분하는 내분점(중점): P_3
⑤ P_4와 P_3를 1:2로 외분하는 외분점: P_5
⑥ P_3와 P_4를 2:3로 외분하는 외분점: P_1
⑦ P_3와 P_5를 1:2로 외분하는 외분점: P_1
⑧ P_4와 P_2를 2:1로 외분하는 외분점: A

ex2) $\mathrm{A}(5,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -6)$를 $5:3$으로 내분하는 점 P의 좌표

풀이] $\overline{\mathrm{AB}}$를 $5:3$으로 내분하는 점 P의 좌표

$\dfrac{5\cdot3+3\cdot5}{5+3}=\dfrac{15}{4}$, $\dfrac{5\cdot(-6)+3\cdot2}{5+3}=-3$, $\mathrm{P}\left(\dfrac{15}{4},\ -3\right)$

ex3) $\mathrm{A}(5,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -6)$를 $2:1$으로 외분하는 점 Q의 좌표

풀이] $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$으로 외분하는 점 Q의 좌표

$\dfrac{2\cdot3-1\cdot5}{2-1}=1$, $\dfrac{2\cdot(-6)-1\cdot2}{2-1}=-14$, $\mathrm{Q}(1,\ -14)$

ex4) $\mathrm{A}(5,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -6)$의 중점 M의 좌표

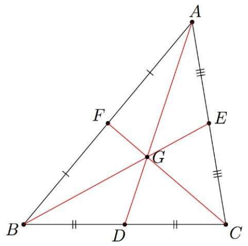
풀이] $\mathrm{M}(4,\ -2)$

$\dfrac{5+3}{2}=4$, $\dfrac{2-6}{2}=-2$ $\quad\therefore \mathrm{M}(4,\ -2)$

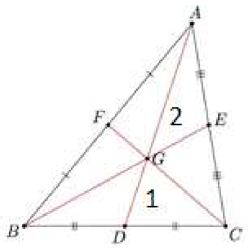
4. 오심

1] 무게중심

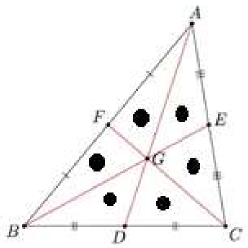
① 세 중선의 교점



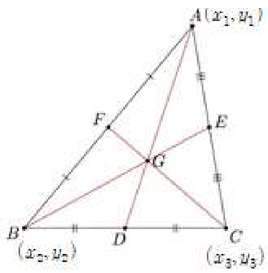
② 꼭짓점으로부터 2:1의 길이비를 이룬다.



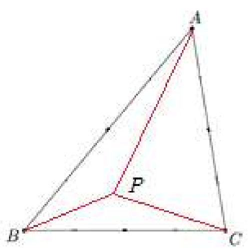
③ 6개 삼각형의 넓이는 같다.



④ $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

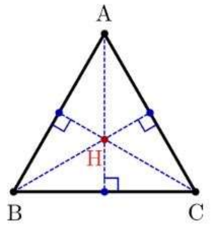


⑤ $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$이 최소가 되는 점 P가 무게중심



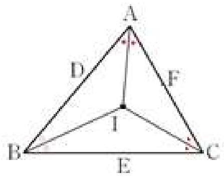
2] 수심

① 꼭짓점에서 각 변으로 내린 수선의 교점

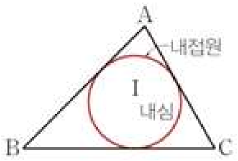


3] 내심

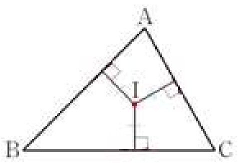
① 각의 이등분선의 교점



② 내접원의 중심

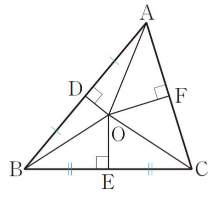


③ 각 변에 내린 수선의 길이가 모두 같다.

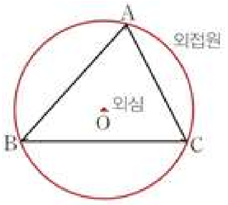


4] 외심

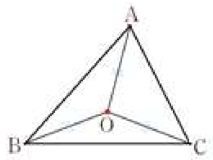
① 세 변의 수직이등분선의 교점



② 외접원의 중심

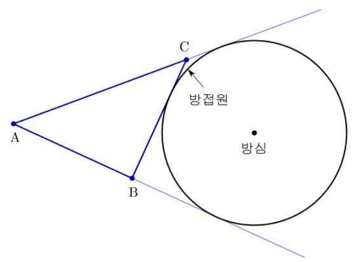


③ 꼭짓점에서 외심까지의 길이가 모두 같다.



5] 방심

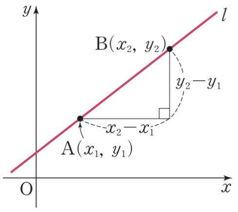
삼각형의 외부에 있으면서 삼각형의 한 변과 다른 두 변의 연장선과 접하는 원을 그 삼각형의 방접원이라고 한다. 방접원의 중심.

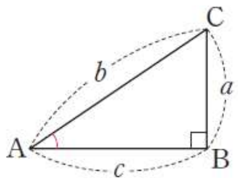


5. 자취(점의 흔적)문제 TIP

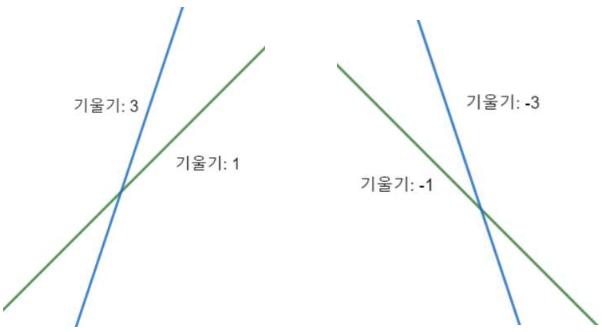
구하고자하는 점을 (x, y), 이용하는 점을 (a, b)로 둔다.

6. 기울기





① 기울기=$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\Leftrightarrow$ $\tan A = \dfrac{a}{c}$



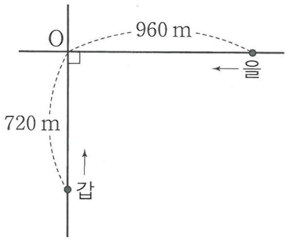
② 기울기가 양수 일 때 기울기가 클수록 급격하고,
기울기가 음수 일 때 기울이가 작을수록 급격하다.

304) [수상 R657번]
두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 3)$과 직선 $y=x-2$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값은?

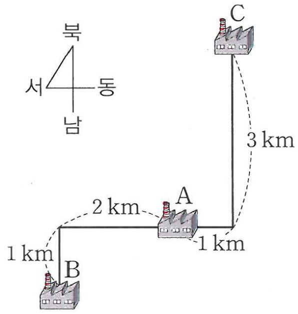
① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

305) [수상 R658번]
좌표평면 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$이 최솟값을 가질 때, 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심임을 증명하시오.

306) [수상 R660번]
그림과 같이 지점 O에서 수직으로 만나는 두 직선도로가 있다. 서로 다른 도로 위에 있는 갑과 을이 지점 O에서 각각 720m, 960m 떨어진 지점에서 동시에 출발하여 분속 40m의 일정한 속력으로 지점 O를 향해 직진하였다. 두 사람 사이의 거리가 가장 가까워지는 것은 출발한 지 a분 후이고 그때의 두 사람 사이의 최소거리는 $b\text{m}$일 때, a, b의 값을 각각 구하고, 그 과정을 서술하시오. (단, a, b는 실수이다.)



307) [수상 R661번]
세 개의 판매점 A, B, C로부터 같은 거리에 있는 지점에 창고를 지으려고 한다. 판매점 B는 판매점 A로부터 서쪽으로 2km, 남쪽으로 1km만큼 떨어진 지점에 있고, 판매점 C는 판매점 A로부터 동쪽으로 1km, 북쪽으로 3km만큼 떨어진 지점에 있을 때, 각 판매점으로부터 창고를 지으려는 지점까지의 거리는?



① $2\sqrt{2}\,\text{km}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{2}\text{km}$ ③ $3\sqrt{2}\,\text{km}$
④ $\frac{7\sqrt{2}}{2}\text{km}$ ⑤ $4\sqrt{2}\,\text{km}$

308) [수상 R662번]
좌표평면 위의 점 $A(3,\ 5)$를 한 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-1, 2)$일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는?

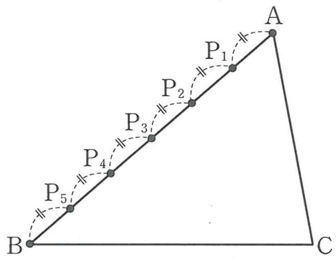
① $12\sqrt{3}$ ② $13\sqrt{3}$ ③ $14\sqrt{3}$
④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $16\sqrt{3}$

309) [수상 R663번]
좌표평면 위의 한 점 $A(2, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심은 변 BC 위에 있고 좌표가 $(-1, -1)$일 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$의 값은?

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

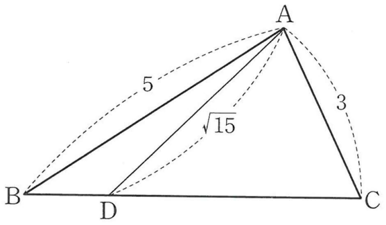
310) [수상 R664번]
세 점 $A(-1, -1)$, $B(0, -k)$, $C(2, -2)$에 대하여 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하고, 그 과정을 서술하시오.

311) [수상 R665번]
그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=2\sqrt{7}$, $\overline{CA}=4$인 삼각형 ABC에서 선분 AB를 6등분하는 5개의 점을 점 A에 가까운 것부터 순서대로 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5라 할 때, $\overline{CP_2}^2+\overline{CP_4}^2$의 값을 구하시오.



312) [수상 R666번]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=3$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이는?



① $3\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

313) [수상 R667번]

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BD}}=3\overline{\mathrm{DC}}$를 만족시키는 변 BC 위의 점 D에 대하여 $3\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2=k(\overline{\mathrm{AB}}^2+3\overline{\mathrm{AC}}^2)$이 성립할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

314) [수상 R668번]
서로 다른 두 점 $\mathrm{A, B}$에 대하여 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① 선분 AB를 $1:1$로 외분할 수 없다.
② 선분 AB를 $1:1$로 내분하는 점은 선분 AB의 중점
③ 선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 A는 선분 BM을 $2:1$로 외분하는 점이다.
④ $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=2:1$을 만족시키는 직선 AB 위의 점 C는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이다.
⑤ 두 자연수 $m,\ n$에 대하여 $m<n$일 때, 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}<\overline{\mathrm{PB}}$이다.

315) [수상 R669번]
서로 다른 5개의 점 $\mathrm{A, B, C, D, E}$가 한 직선 위에 있고, 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{AE}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$의 값은?

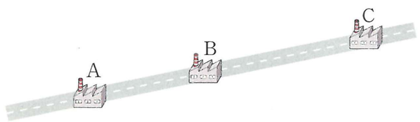
(가) 점 B는 선분 AC의 중점이다.
(나) 점 D는 선분 AB를 $5:2$로 외분한다.
(다) 점 E는 선분 BD를 $2:1$로 내분한다.

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ $\dfrac{11}{6}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{13}{6}$

316) [수상 R670번]
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-5,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ -3)$을 이은 선분 AB를 $(1-t):t$로 내분하는 점이 제3사분면에 있도록 하는 실수 t의 값의 범위를 $a<t<b$라 할 때, $a+b$의 값은?
(단, a, b는 상수이고 $0<t<1$이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

317) [수상 R672번]
그림과 같이 직선도로 위의 세 지점 A, B, C에 어느 회사의 세 공장이 위치하고, $3\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{BC}}$를 만족시킨다. 이 회사가 이 직선도로 위의 어느 한 지점에 세 공장에서 생산되는 제품을 보관할 창고를 세우려고 한다. 세 공장에서 보관 창고로 운반하는 비용이 각 공장에서 보관 창고에 이르는 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 운반비용을 최소로 하는 보관 창고의 위치는? (단, B지점은 A지점과 C지점 사이에 위치하고, 세 공장에서 생산하는 제품의 양은 동일하다.)

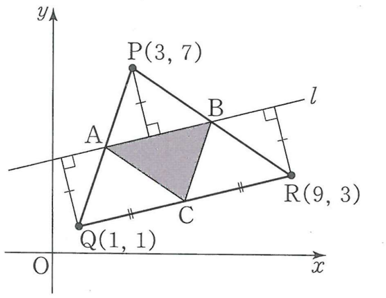


① 선분 AB의 중점
② 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점
③ 선분 AB를 $7:1$로 외분하는 점
④ 선분 AC를 $3:2$로 내분하는 점
⑤ 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점

318) [수상 R674번]
좌표평면 위의 세 점 $A(-1,\ 1)$, $B(2,\ 5)$, $C(5,\ -3)$에 대하여 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $1:2$로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 할 때, DEF의 무게중심의 좌표는?

① $(1,\ 0)$ ② $(1,\ 1)$ ③ $(1,\ 2)$
④ $(2,\ 0)$ ⑤ $(2,\ 1)$

319) [수상 R675번]
그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $P(3,\ 7)$, $Q(1,\ 1)$, $R(9,\ 3)$으로부터 같은 거리에 있는 직선 l이 선분 PQ, PR와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 QR의 중점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 $G(x,\ y)$라 하면 $x+y$의 값은?



① $\frac{16}{3}$ ② 6 ③ $\frac{20}{3}$
④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 8

320) [수상 R678번]
삼각형 ABC에서 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $2:3$으로 외분하는 점을 E, 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점을 F라 하자. 삼각형 FEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 k배이다. 상수 k의 값을 구하시오.

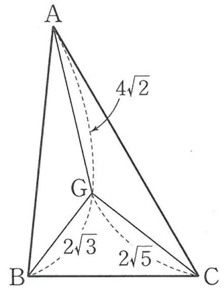
321) [수상 R680번]
좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(-4,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 7)$, $\mathrm{C}(16,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 내심을 I라 할 때, 두 직선 AI와 BC가 만나는 점의 좌표는 $(p,\ q)$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

322) [수상 R681번]
좌표평면 위의 점 A, B, C, D, E가 한 직선 위에 있고, 다음 조건을 만족시킨다.

가. B의 좌표는 $(-1,3)$이고, D의 좌표는 $(3,-1)$이다.
나. B는 선분AC의 중점이다.
다. C는 선분AD를 2:1로 내분한다.
라. E는 선분CD를 3:2로 외분한다.

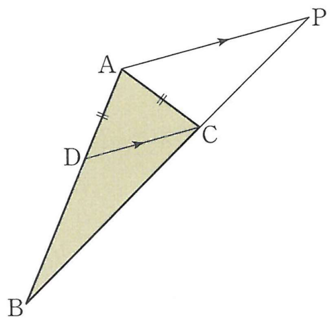
이 때 $\overline{AE}^2$의 값을 구하여라.

323) [수상 R682번]
그림과 같이 삼각형 ABC의 무게중심이 G이고, $\overline{\mathrm{AG}}=4\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BG}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{CG}}=2\sqrt{5}$이다. 삼각형 ABC의 넓이는?



① $6\sqrt{10}$ ② $6\sqrt{15}$ ③ $8\sqrt{10}$
④ $8\sqrt{15}$ ⑤ $12\sqrt{10}$

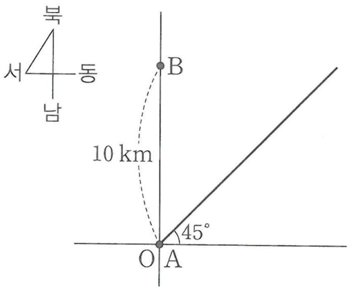
324) [수상 R683번]
세 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}(-5,\ -9)$, $\mathrm{C}(4,\ 0)$인 삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}$가 되도록 점 D를 선분 AB 위에 잡는다. 점 A를 지나면서 선분 DC와 평행인 직선이 선분 BC의 연장선과 만나는 점을 P라 하자. 점 P의 좌표는?



① $\left(\frac{61}{8},\ \frac{29}{8}\right)$ ② $\left(\frac{65}{8},\ \frac{33}{8}\right)$ ③ $\left(\frac{69}{8},\ \frac{37}{8}\right)$
④ $\left(\frac{73}{8},\ \frac{41}{8}\right)$ ⑤ $\left(\frac{77}{8},\ \frac{45}{8}\right)$

325) [수상 R684번]
두 점 A, B 에 대하여 선분 AB 를 $m:n$ 으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q 라 하자. $\overline{AB}=10$ 일 때, $\frac{1}{\overline{AP}}+\frac{1}{\overline{AQ}}$ 의 값을 구하여라. (단, $m>n>0$)

326) [수상 R685번]
그림과 같이 지점 O에서 출발한 학생 A는 동쪽 방향과 $45°$를 이루는 방향으로 시속 $2\sqrt{2}\,\mathrm{km}$로 움직이고, 학생 B는 지점 O에서 북쪽으로 $10\,\mathrm{km}$ 떨어진 지점에서 출발하여 시간당 서쪽으로 $1\,\mathrm{km}$, 남쪽으로 $2\,\mathrm{km}$만큼의 일정한 속력으로 움직인다. 두 사람이 동시에 출발하였을 때, 두 사람 사이의 거리가 가장 가까워지는 것은 출발한 지 x분 후이고, 그 때의 두 사람 사이의 거리는 $y\,\mathrm{km}$이다. $x+y$의 값은?



① 102 ② 104 ③ 106
④ 108 ⑤ 110

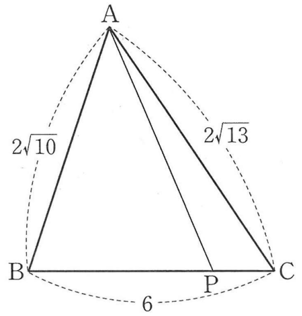
327) [수상 R686번]
두 사람 A, B가 일직선인 코스를 달리는데 B의 속력은 A의 속력의 1.5배이고, A가 B보다 $30\,\mathrm{m}$ 앞에서 출발한다. B가 $270\,\mathrm{m}$를 달려서 결승점에 도착했을 때 A의 위치를 점 P라 하고, 결승점을 점 Q라 할 때, 처음 A의 위치는 선분 PQ를 $m : n$으로 외분한다. $m-n$의 값은?
(단, m과 n은 서로소인 자연수이다.)

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

328) [수상 R687번]

그림과 같이 $\overline{AB}=2\sqrt{10}$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=2\sqrt{13}$인 삼각형 ABC에서 변 BC를 $m:n$으로 내분하는 점을 P라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, m과 n은 서로소인 자연수이다.)



ㄱ. $m=n$일 때, $\overline{AP}=\sqrt{37}$이다.
ㄴ. $\overline{AB}=\overline{AP}$일 때, $m-n=3$이다.
ㄷ. $\overline{AP}=3\sqrt{5}$일 때, $m+2n=7$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

329) [수상 R688번]

두 점 A$(1,\ 4)$, B$(2,\ 1)$과 y축 위의 점 Q에 대하여 $|\overline{AQ}-\overline{BQ}|$는 점 Q의 y좌표가 a일 때, 최댓값 b를 갖는다. a^2+b^2의 값을 구하시오.

330) [수상 R689번]
수직선 위의 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$, $\mathrm{C}(c)$에 대하여 선분 AC를 $m:n$으로 내분하는 점 $\mathrm{P}(p)$가 선분 BC를 $m:n$으로 외분하는 점이 될 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $m \neq n,\ m>0,\ n>0$)

ㄱ. $a=1,\ b=5,\ m=1,\ n=2$이면 $c=7$이다.
ㄴ. $m>n$이면 $a<p<b<c$이다.
ㄷ. $p=\dfrac{a+b}{2}$

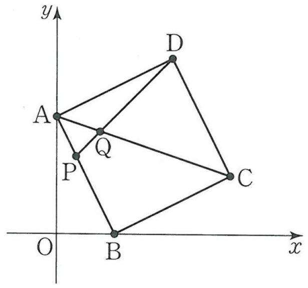
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

331) [수상 R690번]
선분 AB를 $m:n\ (m>n>0)$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 각각 C, D라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AC}}}=\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}$ ② $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AC}}}=\dfrac{2}{\overline{\mathrm{AD}}}$
③ $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AC}}}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}=\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}}$ ④ $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AC}}}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}=\dfrac{2}{\overline{\mathrm{AB}}}$
⑤ $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}=\dfrac{2}{\overline{\mathrm{AC}}}$

332) [수상 R691번]

그림과 같이 네 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(3,\ 1)$, $\mathrm{D}(2,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD의 변 AB 위의 점 P에 대하여 선분 AC와 선분 DP가 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 선분 DP를 $3:1$로 내분하는 점일 때, 점 Q의 좌표는 $(m,\ n)$이다. $m+n$의 값은?



① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{9}{4}$

④ $\frac{11}{5}$ ⑤ $\frac{13}{6}$

도형의 방정식

직선의 방정식

(1) 좌표평면에서 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

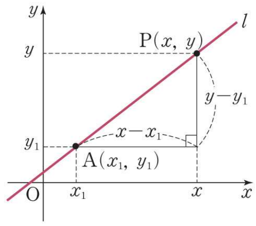
[설명]

좌표평면에서 한 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선 l의 방정식을 구해 보자.

직선 l 위의 점 A가 아닌 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 기울기

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

은 점 P의 위치에 관계없이 항상 일정하다.



양변에 $x-x_1$을 곱하면

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots\cdots ①$$

을 얻는다. 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$도 위의 방정식을 만족하므로, ①은 구하는 직선의 방정식이다.

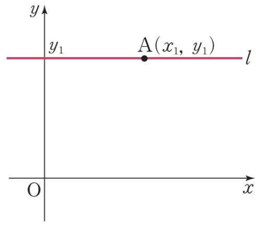
그림과 같이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선 l의 기울기는 0이므로 이 직선의 방정식은

$$y-y_1=0(x-x_1)$$

즉,

$$y=y_1$$

이다.



(2) 좌표평면에서 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$을 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1 \neq x_2$)

[설명]

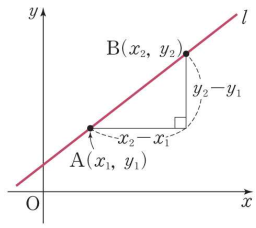
좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선 l의 방정식을 구해 보자.

(i) $x_1 \neq x_2$일 때, 직선 l의 기울기 m은

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

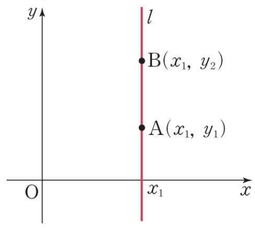
이고, 이 직선이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$



(ii) $x_1=x_2$일 때, 직선 l은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고,
y축에 평행하므로 직선 l 위의 모든 점에 대하여
x좌표는 항상 x_1이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$x=x_1$$



〈참고〉

(1) 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축에 평행한(y축에 수직인) 직선의 방정식은 $y=y_1$

(2) 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 y축에 평행한(x축에 수직인) 직선의 방정식은 $x=x_1$

(3) x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \ (\text{단, } ab \neq 0)$$

두 직선의 위치 관계

(1) 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ 이

① 평행하다. ⇨ $m=m'$, $n\neq n'$

② 일치한다. ⇨ $m=m'$, $n=n'$

③ 수직이다. ⇨ $mm'=-1$

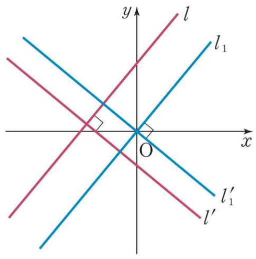
[증명]

좌표평면 위에서 두 직선이 서로 수직일 조건에 대하여 알아보자.

두 직선

$l : y=mx+n\ (m\neq 0)$

$l' : y=m'x+n'\ (m'\neq 0)$



이 서로 수직이면 두 직선 l, l'에 각각 평행하고

원점을 지나는 두 직선

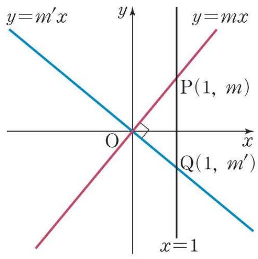
$l_1 : y=mx$

$l_1' : y=m'x$

도 서로 수직이다.

따라서 두 직선 l, l'이 서로 수직일 조건은 l_1, l_1'이 서로 수직일 조건과 같다.

이제 두 직선 l_1, l_1'이 서로 수직일 조건을 알아보자.



오른쪽 그림과 같이 직선 $x=1$과 두 직선

$y=mx$, $y=m'x$의 교점을 각각 P, Q라고 하면

$\mathrm{P}(1,\ m)$, $\mathrm{Q}(1,\ m')$

이고 삼각형 POQ는 직각삼각형이다.

따라서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2$ $\cdots\cdots$ ① 이므로

$\overline{\mathrm{OP}}^2=1+\mathrm{m}^2$, $\overline{\mathrm{OQ}}^2=1+\mathrm{m}'^2$, $\overline{\mathrm{PQ}}^2=(m-m')^2$을 ①에 대입하면

$(1+m^2)+(1+m'^2)=(m-m')^2$ $\cdots\cdots$ ②

이다. 이 식을 정리하면

$mm'=-1$이다.

또한, $mm'=-1$이면 ②가 성립하고 따라서 ①이 성립하므로 삼각형 POQ는 직각삼각형이다.

따라서 두 직선 l_1, l_1'은 서로 수직이고, l, l'도 서로 수직이다.

(2) $abc\neq 0$, $a'b'c'\neq 0$일 때, 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ 이

① 평행하다. ⇨ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

② 일치한다. ⇨ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

③ 수직이다. ⇨ $aa'+bb'=0$

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

(1) 직선 $(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$은 k의 값에 관계없이 항상 두 직선

$ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$

의 교점을 지난다.

(2) 한 점에서 만나는 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수) $\cdots\cdots$ ㉠

꼴로 나타낼 수 있다. (단, 직선 $a'x+b'y+c'=0$은 제외한다.)

〈참고〉 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 무수히 많으며 방정식 ㉠에 k의 값을 대입하여 구할 수 있다.

점과 직선 사이의 거리

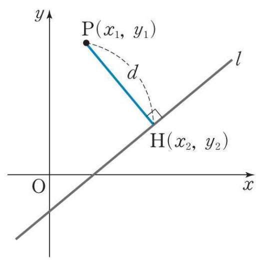
좌표평면에서 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

[증명]

좌표평면 위의 한 점 P에서 P를 지나지 않는 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 선분 PH의 길이를 점 P와 직선 l 사이의 거리라고 한다.

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$과 직선 $l: ax+by+c=0$ 사이의 거리 d를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$라고 하면



(ⅰ) $a \neq 0,\ b \neq 0$일 때

직선 l의 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$이고, 직선 PH는 직선 l에 수직이므로 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-1$이다.

이 식을 변형하면 $\dfrac{x_2-x_1}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{b}$이다.

이 식의 값을 k로 놓으면

$$x_2-x_1=ak,\ y_2-y_1=bk \cdots\cdots ①$$

따라서 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{k^2(a^2+b^2)}$

$=|k|\sqrt{a^2+b^2} \cdots\cdots ②$

또, $\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$는 직선 l 위의 점이므로 $ax_2+by_2+c=0$

①에서 $x_2=x_1+ak,\ y_2=y_1+bk$이므로

$$a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0$$

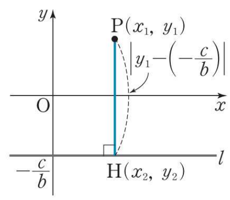
따라서 $k=\dfrac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2} \cdots\cdots ③$

③을 ②에 대입하면

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cdots\cdots ④$$

(ⅱ) $a=0,\ b\neq 0$일 때

직선 l의 방정식은 $y=-\dfrac{c}{b}$이므로

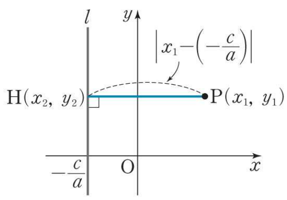


$$\overline{\mathrm{PH}}=\left|y_1-\left(-\frac{c}{b}\right)\right|=\left|\frac{by_1+c}{b}\right|$$

이다. 이것은 ④에 $a=0$을 대입한 것과 같다.

(ⅲ) $a\neq 0,\ b=0$일 때

직선 l의 방정식은 $x=-\dfrac{c}{a}$이므로



$$\overline{\mathrm{PH}}=\left|x_1-\left(-\frac{c}{a}\right)\right|=\left|\frac{ax_1+c}{a}\right|$$

이다. 이것은 ④에 $b=0$을 대입한 것과 같다.

〈참고〉

평행한 두 직선 사이의 거리

① 두 직선 $ax+by+c=0,\ ax+by+c'=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

② 두 직선 $y=mx+n,\ y=mx+n'$ 사이의 거리는 $\dfrac{|n-n'|}{\sqrt{m^2+1}}$이다.

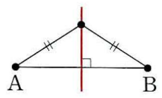
자취의 방정식

자취의 방정식을 구하는 방법은 다음과 같다.

(ⅰ) 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓는다.

(ⅱ) 주어진 조건을 이용하여 $x,\ y$ 사이의 관계식을 구한다.

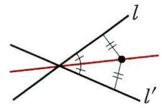
(ⅲ) $x,\ y$의 제한된 범위를 구한다.



〈참고〉

① 두 점 A, B로부터 같은 거리 에 있는 점들의 자취는 선분 AB의 수직 이등분선이다.

② 두 직선 $l,\ l'$으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취는 두 직선 $l,\ l'$이 이루는 각의 이등분선이다.



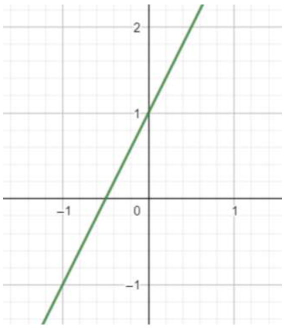
1. 관점에 따른 식의 이해

① 방정식: 해를 구하는 것

ex1) $2x-y+1=0$의 해를 구하여라.
풀이] (1, 3), (2, 5), (3, 7) …

② 직선의 방정식: 기하학적으로 표현하는 것

ex2) $2x-y+1=0$의 그래프를 그려라.
풀이] $2x-y+1=0$, $y=2x+1$
기울기가 2고 y절편이 1인 직선



2. 직선의 이해

$y=2x+k$위에 $(0,1)$이 있다.
⇔ $y=2x+k$가 $(0,1)$을 지난다.
⇔ $y=2x+k$가 $(0,1)$을 만족한다.
⇔ $y=2x+k$에 $(0,1)$을 대입했을 때, 식이 성립한다.

3. 한 직선의 공식들

① 기울기가 m이고 y절편이 k인 직선의 방정식
=> $y=mx+k$

② 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식
=> $y-y_1=m(x-x_1)$

③ 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$을 지나는 직선의 방정식
=> $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1 \neq x_2$)

④ 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식
=> $y=y_1$

⑤ 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식
=> $x=x_1$

⑥ x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은
=> $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (단, $ab \neq 0$)

4. 두 직선의 공식들

	한 점	평행	일치	수직
$y=mx+n$ $y=m'x+n'$	$m \neq m'$	$m=m'$ $n \neq n'$	$m=m'$ $n=n'$	$mm'=-1$
$ax+by+c=0$ $a'x+b'y+c'=0$ (단, $a, b, c, a', b', c' \neq 0$)	$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	$aa'+bb'=0$

5. 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

=> $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수)
꼴로 나타낼 수 있다. (단, 직선 $a'x+b'y+c'=0$은 제외한다.)

ex3) 두 직선 $3x-2y+3=0,\ x-3y-3=0$의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식?

풀이] $4x-5y=0$
$3x-2y+3+k(x-3y-3)=0$ (k는 실수)으로 놓으면 이 직선이 원점을 지나므로
$3-3k=0 \quad \therefore k=1$
따라서 $(3x-2y+3)+(x-3y-3)=0 \quad \therefore 4x-5y=0$

6. 점과 직선 사이의 거리(수직거리)

좌표평면에서 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

333) [수상 R707번]
직선 $x+2y+4+k(3x-y-9)=0$이 k값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하여라.

334) [수상 R715번]
세 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(7,\ 2)$, $\mathrm{C}(3,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 수심의 좌표는?

① $(1,\ 5)$ ② $(2,\ 4)$ ③ $(3,\ 5)$
④ $(4,\ 3)$ ⑤ $(5,\ 4)$

335) [수상 R716번]
세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 8)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 각 꼭짓점에서 각각의 대변에 그은 세 수선의 교점의 좌표가 $(2,\ 3)$일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

336) [수상 R717번]
한 직선 위에 있지 않은 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2,\ \mathrm{y}_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가
$\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ 임을 증명하시오. (단, $x_1 \neq x_2$)

337) [수상 R718번]
점$O(0,0),A(1,2),B(3,4)$을 세 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 넓이를 구하여라.

338) [수상 R721번]
직선 $(k+1)x+ky-4k-2=0$이 직선 $x+y-4=0$과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 이등분할 때, 실수 k의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$
④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

339) [수상 R722번]
직선 $3x+2y-6=0$이 x축, y축, 직선 $y=ax$ $(a>0)$와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자. 삼각형 OPR의 넓이가 삼각형 OPQ의 넓이의 $\frac{2}{3}$배일 때, a의 값은?

(단, O는 원점이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

340) [수상 R723번]
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$, $\mathrm{B}(-2,\ -1)$에 대하여 직선 $kx+3y-5k=0$이 선분 AB와 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-\frac{1}{2}\leq k\leq\frac{3}{4}$
② $-\frac{1}{2}\leq k\leq\frac{4}{3}$
③ $-\frac{5}{7}\leq k\leq 4$
④ $-\frac{7}{3}\leq k\leq 5$
⑤ $-\frac{3}{7}\leq k\leq 6$

341) [수상 R724번]
두 직선 $x+y-1=0$, $mx-y+m-1=0$이 각 사분면에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.
(1) 1사분면

(2) 2사분면

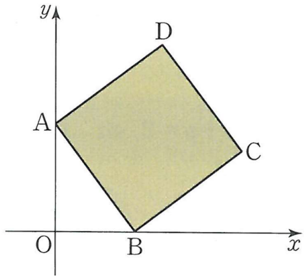
(3) 4사분면

342) [수상 R725번]
두 직선 $x+y-1=0$, $mx+y+2m+1=0$이 각 사분면에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.
(1) 1사분면

(2) 2사분면

(3) 4사분면

343) [수상 R726번]
그림과 같이 정사각형 ABCD에서 A$(0,\ 4)$, B$(3,\ 0)$일 때, 직선 CD의 방정식은 $ax+3y+b=0$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

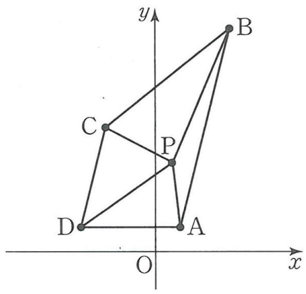


344) [수상 R727번]

좌표평면 위에 정사각형 OABC가 있다. 점 A의 좌표가 $(-1,\ 3)$이고, 점 C는 제1사분면 위에 있을 때, 점 O를 지나면서 이 정사각형의 넓이를 3등분하는 두 직선의 방정식을 모두 구하시오. (단, O는 원점이다.)

345) [수상 R728번]

좌표평면 위의 네 점 $A(1,\ 1)$, $B(3,\ 9)$, $C(-2,\ 5)$, $D(-3,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD의 내부에 있는 점 P에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$가 최솟값을 가질 때, 점 P의 좌표는?



① $\left(-2,\ \frac{11}{3}\right)$ ② $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{8}{3}\right)$ ③ $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{11}{3}\right)$

④ $\left(-1,\ \frac{8}{3}\right)$ ⑤ $\left(-1,\ \frac{11}{3}\right)$

346) [수상 R729번]
실수 k에 대하여 직선

$$l\ :\ (k-1)x+(2k+1)y-6k=0$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $k=1$일 때, 직선 l은 x축에 평행하다.
ㄴ. 직선 l은 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 2)$를 지난다.
ㄷ. 직선 l은 두 직선 $x+2y-6=0$, $x-y=0$의 교점을 지나는 모든 직선을 나타낸다.

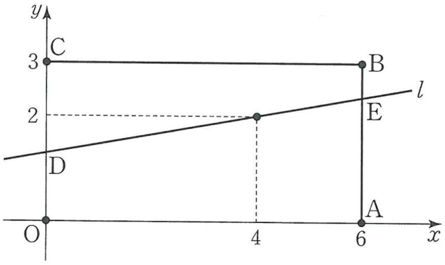
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

347) [수상 R730번]
원점을 지나고 기울기가 양수인 두 직선 l_1과 l_2가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 직선 l_2의 기울기를 구하시오.

(가) 직선 l_2의 기울기는 직선 l_1의 기울기의 4배이다.
(나) 직선 l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 직선 l_1이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기의 2배이다.

348) [수상 R731번]

그림과 같이 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(6,\ 0)$, $\mathrm{B}(6,\ 3)$, $\mathrm{C}(0,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 직사각형 OABC가 있다. 점 $(4,\ 2)$를 지나는 직선 l이 두 선분 OC, AB와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 사각형 DOAE의 넓이와 CDEB의 넓이의 비가 $3:2$가 되도록 하는 직선 l의 기울기는?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

349) [수상 R732번]

점 $(a,\ b)$가 직선 $3x+4y-2=0$ 위를 움직일 때, 점 $(a+b,\ a-b)$가 그리는 자취의 방정식은?

① $x+y-7=0$ ② $3x-y-6=0$
③ $5x+y-5=0$ ④ $7x-y-4=0$
⑤ $8x+y-3=0$

350) [수상 R733번]
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ -1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 2)$에 대하여 직선 AB 위의 점 P와 점 $(4,\ 3)$을 이은 선분을 $2:1$로 내분하는 점 Q의 자취의 방정식은?

① $2x-y-3=0$ ② $2x-y-5=0$
③ $x+y-3=0$ ④ $x+y-5=0$
⑤ $x+2y-1=0$

351) [수상 R734번]
좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(8,\ 1)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하고, x축에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

352) [수상 R736번]
두 직선 $(k^2+2k-3)x+(k+3)y=2$, $(k-4)x+(k-1)y=-1$이 서로 수직이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

353) [수상 R738번]
두 직선

$$l : ax-y+a+2=0$$
$$m : 4x+ay+3a+8=0$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

ㄱ. $a=0$일 때, 두 직선 l과 m은 서로 수직이다.
ㄴ. 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 2)$를 지난다.
ㄷ. 두 직선 l과 m이 평행하기 위한 a의 값은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

354) [수상 R739번]
평행한 두 직선 $(k+4)x+2(k+2)y+1=0$, $(4-k)x+4(k+2)y+2=0$ 사이의 거리가 m일 때, $k+m$의 값은? (단, k, m은 상수이다.)

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{5}{6}$ ③ $-\frac{7}{6}$
④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{11}{6}$

355) [수상 R740번]
점 $(0,\ 1)$을 지나는 직선과 직선 $2x+(k-1)y+6=0$이 x축 위의 점에서 수직으로 만날 때, 상수 k의 값은?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

356) [수상 R741번]
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(5,\ 1)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$에 대하여 선분 AB가 직선 $y=2x+1$과 수직으로 만나는 점을 P라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}}=2 : 1$이다. $a+b$의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

357) [수상 R742번]
세 직선

$$2x-y=0,\ x+y-1=0,\ ax-y+3=0$$

으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

358) [수상 R743번]
세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(-1,\ 5)$, $\mathrm{B}(5,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB가 있다. 선분 AB와 평행하고 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하는 직선의 y절편은?

① $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $\frac{7\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

359) [수상 R744번]
좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(5,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB가 있다. 각 꼭짓점에서 대변에 내린 세 수선의 교점의 좌표를 구하시오.

360) [수상 R745번]
세 직선

$$x+2y=0,\ 2x-y=0,\ kx-y+6k+3=0$$

으로 둘러싸인 부분의 넓이가 30일 때, 양의 실수 k의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

361) [수상 R747번]
다음은 점$\mathrm{P}(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{y}_1)$과 직선 $l : ax+by+c=0$ 사이의 거리를 구하는 과정이다. (단, $a,\ b,\ c$는 실수이다.)

(i) $a\neq 0,\ b\neq 0$ 일 때, 직선 l의 기울기는 $\boxed{(가)}$이고, 점P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(\mathrm{x}_2,\ \mathrm{y}_2)$라 하면 직선 PH와 직선 l이 수직이므로

$\boxed{(가)}\times\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$

이 식을 정리하면

$\frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}=k$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1)^2}$

$=|k|\times\boxed{(나)}$ …… ㉡

한편, 점 H가 직선 l 위의 점이므로 $ax_2+by_2+c=0$이다.

㉠에 의하여

$a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0$

이므로

$k=\boxed{(다)}$

이를 ㉡에 대입하여 정리하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\boxed{(라)}$ ……㉢

(ii) $a=0,\ b\neq 0$ 또는 $a\neq 0,\ b=0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$은 x축 또는 y축에 평행하고 이때에도 ㉢이 성립한다.

위에서 (가)~(라)에 들어갈 알맞은 식을 구하시오.

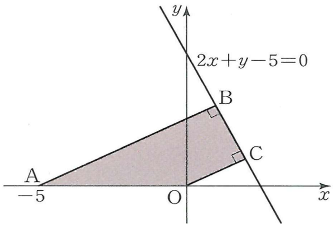
362) [수상 R749번]
원점과 직선 $k(x+y)-x+3y+4=0$ 사이의 거리는 $k=a$일 때, 최댓값 b를 갖는다. 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, k는 실수이다.)

363) [수상 R752번]
좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{A}(1,\ -3)$과 직선 $2x-3y+2=0$ 위의 서로 다른 두 점 B, C에 대하여 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

364) [수상 R753번]

그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(-5,\ 0)$과 원점 O에서 직선 $2x+y-5=0$에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 할 때, 사각형 OABC의 넓이는?



① 5　② $5\sqrt{2}$　③ $5\sqrt{3}$

④ 10　⑤ $5\sqrt{5}$

365) [수상 R754번]

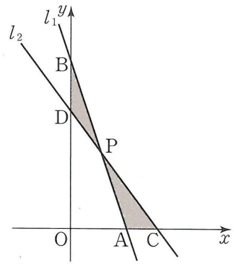
두 직선 $2x+y-3=0$, $x-2y+1=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.

366) [수상 R755번]

두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ 5)$와 직선 AB 위에 있지 않은 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 10일 때, 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 모두 구하시오.

367) [수상 R757번]

그림과 같이 직선 l_1이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 l_2가 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하면 두 직선 l_1, l_2의 교점 P에 대하여 두 삼각형 ACP와 BDP의 넓이는 서로 같다. $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{AC}}$이고, 직선 l_1의 기울기가 -3일 때, 직선 l_2의 기울기는? (단, O는 원점이고, 직선 l_2의 기울기는 음수이며 직선 l_1의 기울기보다 크다.)



① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{2}{3}$　③ -1

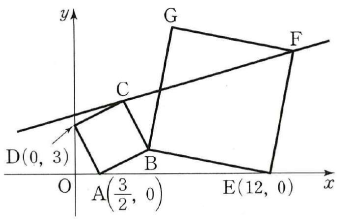
④ $-\frac{4}{3}$　⑤ $-\frac{5}{3}$

368) [수상 R758번]
세 직선 $y=0,\ 3x-4y+6=0,\ 4x+3y-12=0$으로 둘러싸인 삼각형의 내심의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

369) [수상 R760번]
세 꼭짓점이 $(0,0),(5,0),(\frac{9}{5},\frac{12}{5})$인 삼각형의 내심을 구하여라.

370) [수상 R761번]

다음 그림과 같이 두 정사각형 ABCD, BEFG에서 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{D}(0,\ 3)$, $\mathrm{E}(12,\ 0)$일 때, 직선 CF의 방정식을 구하시오.



371) [수상 R762번]

$\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=16$인 직사각형 ABCD의 내부 및 둘레 위의 한 점 P가 $\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{CP}}^2=16$을 만족시킨다. 점 P의 자취가 나타내는 도형의 길이는?

① $4\sqrt{5}$ ② $\frac{9\sqrt{5}}{2}$ ③ $5\sqrt{5}$
④ $\frac{11\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

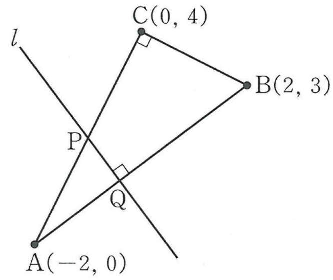
372) [수상 R763번]

좌표평면 위의 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하고, 변 AB, 변 BC, 변CA의 중점의 좌표를 각각 $\mathrm{L}(2,\ 1)$, $\mathrm{M}(4,\ -1)$, $\mathrm{N}(a,\ b)$라 하자. 직선 BN과 직선 LM이 서로 수직이고, 점 G에서 직선 LM까지의 거리가 $4\sqrt{2}$일 때, ab의 값은?

(단, 무게중심 G는 제 1 사분면에 있다.)

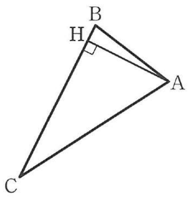
373) [수상 R764번]

세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$, $\mathrm{C}(0,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\angle\mathrm{C}=90°$인 직각삼각형이다. 선분 AB와 수직인 직선 l이 삼각형 ABC의 두 변 AC, AB와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{5}$일 때, 직선 l의 방정식을 구하시오.



374) [수상 R765번]

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 무게중심 G의 좌표는 $\left(1,\ \frac{4}{3}\right)$이고, 직선 BC의 방정식은 $y=2x+1$이다. 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이를 구하시오.



도형의 방정식

원의 방정식

(1) 원의 방정식

중심이 $(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

(2) 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형

$x,\ y$에 대한 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$(A^2+B^2-4C>0)$은

중심이 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$

인 원을 나타낸다.

여러 가지 원의 방정식

(1) 좌표축에 접하는 원의 방정식

① 중심이 $(a,\ b)$이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$$

② 중심이 $(a,\ b)$이고 y축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$

③ 중심이 $(a,\ a)$이고 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식은

$$(x\pm a)^2+(y\pm a)^2=a^2$$

(2) 아폴로니오스의 원

두 점 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$에 대하여

$$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=\mathrm{m}:\mathrm{n}\quad(\mathrm{m}>0,\ \mathrm{n}>0,\ \mathrm{m}\neq\mathrm{n})$$

인 점 P가 그리는 도형은 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 $m:n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

두 원의 교점을 지나는 원과 직선의 방정식

두 원

$\mathrm{O}\ ;\ \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{ax}+\mathrm{by}+\mathrm{c}=0$

$\mathrm{O}'\ :\ \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{a}'\mathrm{x}+\mathrm{b}'\mathrm{y}+\mathrm{c}'=0$

이 두 점에서 만날 때,

(1) 두 교점을 지나는 원 중에서 원 O'을 제외한 원의 방정식은

$$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$$

(단, $k\neq-1$인 실수)

(2) 두 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$$

즉 $(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$

원의 접선의 방정식

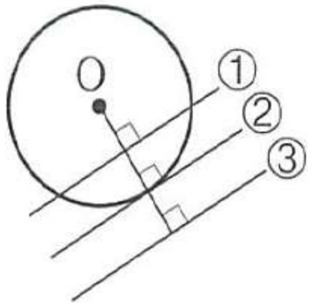
(1) 원과 직선의 위치 관계

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원과 직선의 위치관계는

① $d<r$ ➲ 두 점에서 만난다.

② $d=r$ ➲ 한 점에서 만난다.(접한다.)

③ $d>r$ ➲ 만나지 않는다.



(2) 원의 접선의 방정식

① 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

② 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$

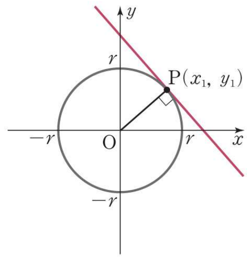
[증명]

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 그은 접선의 방정식을 구해 보자.

(ⅰ) $x_1\neq 0,\ y_1\neq 0$일 때, 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{y_1}{x_1}$이고,

선분 OP는 점 P에서의 접선에 수직이므로

접선의 기울기는 $-\dfrac{x_1}{y_1}$이다.



따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

이다. 이것을 정리하면 $x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$이다.

그런데 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이 원 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=r^2$$

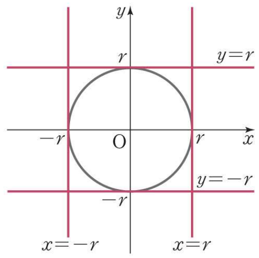
이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$x_1x+y_1y=r^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

(ⅱ) $x_1=0$ 또는 $y_1=0$일 때, 점 P가 좌표축 위에 있으므로 접선의 방정식은

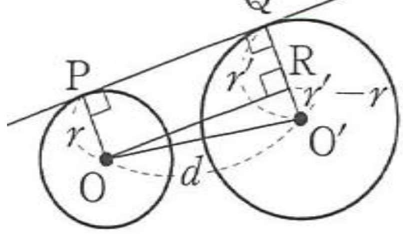
$y=\pm r$ 또는 $x=\pm r$

이다. 이 경우에도 ①이 성립한다.



위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

<참고> 원 밖의 점 P에서 원에 그은 접선의 방정식을 구하려면 먼저 접점을 $(x_1,\ y_1)$로 놓고, 이 점에서의 접선이 점 P를 지남을 이용한다.



공통접선

(1) 두 원에 동시에 접하는 접선을 공통접선이라 한다. 이때 두 원이 공통접선에 대하여 같은 쪽에 있으면 그 접선을 공통외접선, 반대쪽에 있ㅇ면 그 접선을 공통내접선이라 한다.

(2) 공통외접선의 길이

오른쪽 그림에서 O, O′의 공통외접선의 길이는 선분 PQ의 길이이며, 이는 선분 OR의 길이와 같다.

따라서 직각삼각형 OO′R에서

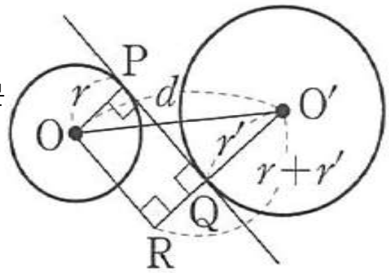
$\overline{\mathrm{OR}} = \sqrt{d^2-(r'-r)^2}$

(3) 공통내접선의 길이

오른쪽 그림에서 O, O′의 공통내접선의 길이는 선분 PQ의 길이이며, 이는 선분 OR의 길이와 같다.

따라서 직각삼각형 OO′R에서

$\overline{\mathrm{OR}} = \sqrt{d^2-(r+r')^2}$



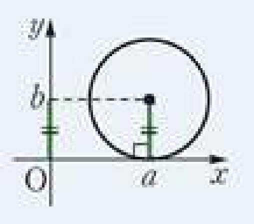
1. 원의 방정식(암기)

① $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

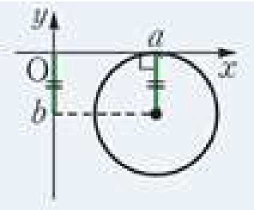
② $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

※ 가장 중요한 것은 중심(a,b)이다.
중심이 기준이 된다.

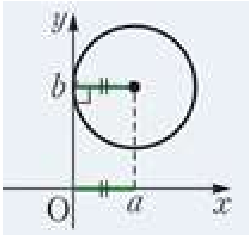
2. 축에 접하는 원



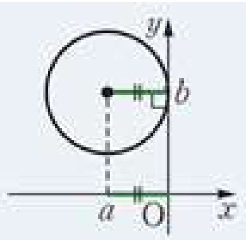
$(x-a)^2+(y-b)^2=|b|^2$



$(x-a)^2+(y-b)^2=|b|^2$



$(x-a)^2+(y-b)^2=|a|^2$



$(x-a)^2+(y-b)^2=|a|^2$

3. 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식(암기)

=> O ; $x^2+y^2+ax+by+c=0$,
O': $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$
의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$
(단, $k\neq -1$)꼴로 나타낼 수 있다.
(원 O': $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ 제외)

4. 공통현의 방정식(암기)

=> O ; $x^2+y^2+ax+by+c=0$,
O': $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$

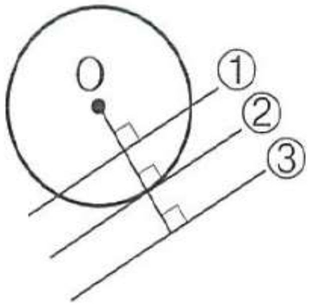
5. 원과 접선

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원과 직선의 위치관계는

① $d<r$ ➲ 두 점에서 만난다.

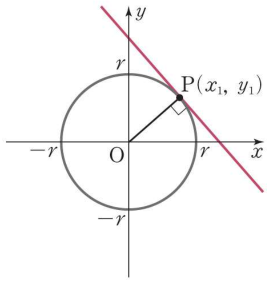
② $d=r$ ➲ 한 점에서 만난다.(접한다.)

③ $d>r$ ➲ 만나지 않는다.



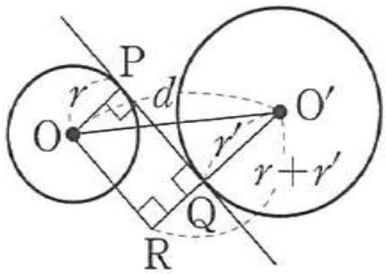
6. 원 위의 점이 주어진 접선(암기)

① 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=r^2$



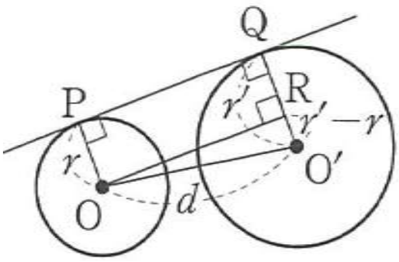
② 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선
$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

7. 공통내접선



$\overline{\mathrm{OR}}\ =\ \sqrt{d^2-(r+r')^2}$

8. 공통외접선



$\overline{\mathrm{OR}}\ =\ \sqrt{d^2-(r'-r)^2}$

9. 아폴로니우스의 원(암기)

ex1) 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$으로부터의
거리의 비가 $3:1$인 점 P에 대하여 P의 자취의 방정식을 구하여라.

풀이] $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$

① $\mathrm{P}(\mathrm{x},\ \mathrm{y})$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=3:1$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}=3\overline{\mathrm{BP}}$
$\sqrt{(x+3)^2+y^2}=3\sqrt{(x-1)^2+y^2}$
$(x+3)^2+y^2=9\{(x-1)^2+y^2\}$
$x^2+y^2-3x=0$ $\quad\therefore\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$

② 아폴로니우스의 원에 의해, $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$의 $3:1$로 내분하는 내분점과 외분하는 외분점이 지름의 양끝 점이다.
내분점은 $(0,0)$, 외분점은 $(3,0)$
따라서 원의 중심은 $(\dfrac{3}{2},0)$, 반지름은 $\dfrac{3}{2}$이다.
$\therefore\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$

375) [수상 R782번]
원 $x^2+y^2-6x+4y=0$ 위의 점 P와
직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리가 정수인 점 P의 개수를 구하여라.

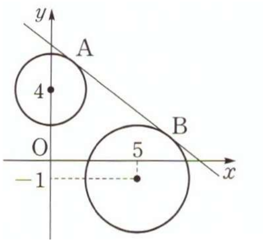
376) [수상 R785번]
두 원 $x^2+(y-4)^2=4,\ (x-5)^2+(y+1)^2=9$의 공통외접선의 길이는?

① 7 ② $5\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{6}$
④ 8 ⑤ $4\sqrt{5}$

377) [수상 R786번]
두 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1,\ (x-4)^2+(y-1)^2=4$의 공통내접선의 길이는?

① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

378) [수상 R787번]
그림과 같이 두 원
$x^2+(y-4)^2=4$, $(x-5)^2+(y+1)^2=9$에 동시에 접하는 접선을 그을 때, 두 접점 A, B사이의 거리는?



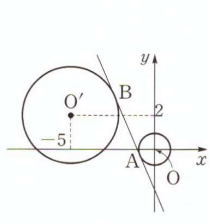
① 7 ② $5\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{6}$
④ 8 ⑤ $4\sqrt{5}$

379) [수상 R788번]
오른쪽 그림과 같이 두 원

$\mathrm{O}: \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=1$

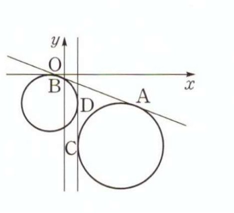
$\mathrm{O}': (\mathrm{x}+5)^2+(\mathrm{y}-2)^2=\mathrm{r}^2$

에 동시에 접하는 접선을 긋고 접점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는 $\sqrt{13}$이다. 이때 양수 r의 값을 구하여라.



380) [수상 R789번]

오른쪽 그림과 같이 두 원
$x^2+y^2-8x+10y+32=0$
$x^2+y^2+2x+4y+1=0$에 동시에 접하는 두 접선의 접점을 각각 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$라 할 때, 선분 AB의 길이와 선분 CD의 길이를 차례대로 구하여라.



381) [수상 R790번]

두 실수 x, y가 등식 $(x+y-2)(2x-y+3)=0$을 만족시킬 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하시오.

382) [수상 R793번]
두 점 $(-2,\ 5)$, $(0,\ -1)$을 지나는 원의 중심이 제2사분면에 있을 때, 원의 중심이 그리는 도형의 길이는?

① $\sqrt{10}$ ② $\frac{5\sqrt{10}}{3}$ ③ $\frac{7\sqrt{10}}{3}$
④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{10}}{3}$

383) [수상 R794번]
세 직선 $2x-y-6=0$, $x+2y+2=0$, $y=2$로 만들어지는 삼각형의 외접원의 방정식이
$(x-a)^2+(y-b)^2=r$일 때, $a+b+r$의 값은?
(단, a, b, r는 상수이다.)

① 26 ② 27 ③ 28
④ 29 ⑤ 30

384) [수상 R795번]

원 $\frac{a}{2}x^2+y^2-4x+6y+b=0$이 y축과 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 할 때, 원 위의 두 점 C, D에 대하여 사각형 ABCD가 정사각형이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

385) [수상 R796번]

점 $(-1,\ 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 두 원의 중심 사이의 거리를 구하시오.

386) [수상 R797번]
중심이 직선 $x+2y-6=0$ 위에 있고, x축, y축에 동시에 접하는 두 원의 넓이의 합은?

① 32π ② 34π ③ 36π
④ 38π ⑤ 40π

387) [수상 R798번]
원 $x^2+y^2-4x-2y=a-3$이 x축과 만나고, y축과 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-2$ ② $a\geq -1$ ③ $-1\leq a<2$
④ $-2<a\leq 2$ ⑤ $-2\leq a<3$

388) [수상 R800번]
두 점 $(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$으로부터 거리의 비가 $2:1$인 점 P가 나타내는 도형이 직선 $y=\sqrt{3}x$에 의하여 두 부분으로 나누어진다. 두 부분의 길이의 차는?

① $\frac{14}{3}\pi$ ② $\frac{16}{3}\pi$ ③ 6π
④ $\frac{20}{3}\pi$ ⑤ $\frac{22}{3}\pi$

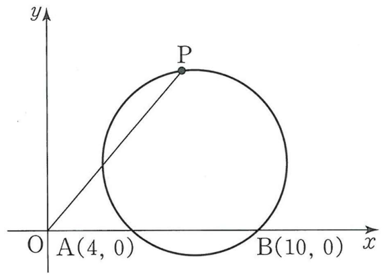
389) [수상 R801번]
점 $\mathrm{A}(-6,\ 0)$과 원 $x^2+y^2-6x=0$ 위의 점 B에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 할 때, 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오.

390) [수상 R802번]
두 점 $\mathrm{A}(5,\ -2)$, $\mathrm{B}(-2,\ -4)$와 원 $x^2+y^2=4$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 무게중심 G가 나타내는 도형의 길이는?

① $\frac{\pi}{3}$　② $\frac{\pi}{2}$　③ $\frac{2}{3}\pi$
④ $\frac{3}{4}\pi$　⑤ $\frac{4}{3}\pi$

391) [수상 R803번]
두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$에 대하여 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=4$를 만족시킬 때, $(a-3)^2+(b+4)^2$의 최댓값을 구하시오.

392) [수상 R804번]
그림과 같이 두 점 $A(4,\ 0)$, $B(10,\ 0)$을 지나고 반지름의 길이가 5인 원이 있다. 원점 O와 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 OP의 길이가 정수가 되게 하는 점 P의 개수를 구하시오. (단, 원의 중심은 제1사분면에 있다.)



393) [수상 R805번]
바다 위에 8km만큼 떨어진 두 지점 A, B에 각각 배가 한 대씩 위치해 있다. 두 배는 두 지점 A, B를 동시에 출발하여 일정한 속력으로 중간에 방향을 바꾸지 않고 직선 경로로 이동하고, 지점 A에서 출발하는 배의 속력이 지점 B에서 출발하는 배의 속력의 3배이다. 두 배가 동시에 도달할 수 있는 지점을 P라 할 때, 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은? (단, 두 배의 크기는 고려하지 않고, 움직일 수 있는 바다는 충분히 넓다.)

① 8km^2 ② 10km^2 ③ 12km^2
④ 14km^2 ⑤ 16km^2

394) [수상 R806번]
평행한 두 직선 $2x-y+1=0$, $px-y+q=0$에 동시에 접하는 원의 넓이가 5π일 때, 두 양의 실수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

395) [수상 R808번]
점 $(1,\ k)$에서 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{7}+1$ ② $\sqrt{14}-1$ ③ $\sqrt{14}$
④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

396) [수상 R809번]
점 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 PAB의 넓이는?

① $\frac{8\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{32}{5}$　③ $\frac{16\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{64}{5}$　⑤ $\frac{32\sqrt{5}}{5}$

397) [수상 R810번]
점 $\mathrm{P}(2,\ 6)$에서 원 $x^2+y^2=20$에 그은 두 접선이 원과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 PAB의 넓이는?

① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

398) [수상 R811번]

두 원 $x^2+y^2-8y=0$, $x^2+y^2-6x-12=0$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 원의 중심을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ACBD의 넓이는?

① $8\sqrt{3}$ ② $10\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $10\sqrt{5}$ ⑤ $12\sqrt{5}$

399) [수상 R812번]

원 $x^2+y^2+4ax-2ay-3=0$이 원 $x^2+y^2-6x+2y+3=0$의 둘레를 이등분할 때, 상수 a의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

400) [수상 R813번]
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-\sqrt{5},\ -1)$, $\mathrm{B}(\sqrt{5},\ 3)$과 직선 $y=x-2$ 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 $\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{AQB}=90°$일 때, 선분 PQ의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오.

401) [수상 R814번]
원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P와 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 8)$, $\mathrm{B}(2,\ 4)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값을 구하고, 그 과정을 서술하시오.

402) [수상 R815번]

좌표평면에 원 $x^2+y^2-10x=0$ 이 있다. 이 원의 현 중에서 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지나고 그 길이가 자연수의 현의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

403) [수상 R816번]

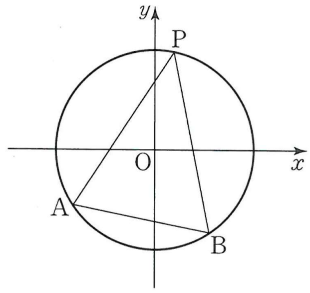
중심이 곡선 $y=2x^2$ 위에 있고, 두 직선 $x=2$, $y=1$ 에 동시에 접하는 모든 원의 둘레의 길이의 합을 구하시오.

404) [수상 R818번]

원점에서 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB의 방정식은 $y=mx+n$이다. $4(m+n)$의 값을 구하시오. (단, m, n은 상수이다.)

405) [수상 R819번]

그림과 같이 원 $x^2+y^2=13$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ -2)$, $\mathrm{B}(2,\ -3)$과 원 위의 임의의 점 P를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은 $\frac{q}{p}(1+\sqrt{2})$이다. pq의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



406) [수상 R820번]

직선 $y=3x$와 점 $(1,\ 3)$에서 접하고, x축에 접하는 원 중 중심이 제1사분면 위에 있는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

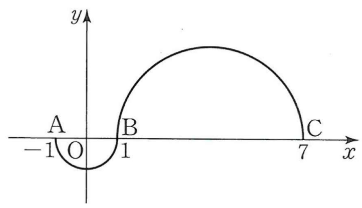
① $\frac{10+\sqrt{5}}{3}$　② $\frac{10+2\sqrt{5}}{3}$

③ $\frac{10+\sqrt{10}}{3}$　④ $\frac{10+2\sqrt{10}}{3}$

⑤ $\frac{10+\sqrt{15}}{3}$

407) [수상 R821번]

그림과 같이 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(7,\ 0)$에 대하여 선분 AB를 지름으로 하고 제3사분면과 제4사분면을 지나는 반원과 선분 BC를 지름으로 하고 제1사분면을 지나는 반원 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여 $\frac{y}{x-8}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.



408) [수상 R824번]

점 $(0,\ 5)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 두 접선 중 기울기가 음수인 직선을 l이라 할 때, x축, y축 및 직선 l에 동시에 접하면서 중심이 제1사분면 위에 있는 원은 두 개이다. 두 원의 반지름의 길이의 합은?

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$

④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

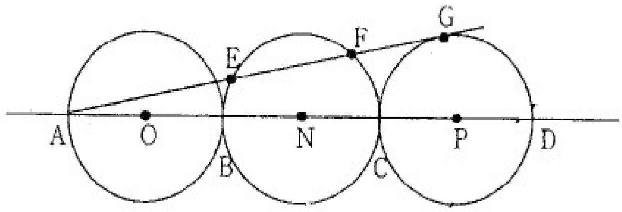
409) [수상 R825번]

두 원 $x^2+y^2=9$, $(x-4)^2+(y-2)^2=17$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 두 접선의 교점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10

④ 11 ⑤ 12

410) [수상 R826번]
그림과 같이 반지름의 길이가 15인 세 개의 원이 나란히 접해있고, $\overline{AG}$는 원 P의 접선일 때, $\overline{EF}$의 길이는?



411) [수상 R827번]
원 $x^2+(y+2)^2=25$ 위의 두 점 $A(3,\ 2),\ B(-4,\ 1)$ 에 대하여 삼각형 PAB가 직각삼각형이 되도록 하는 원 위의 점 P는 2개이다. 이 두 점을 이은 선분의 중점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a-b$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2
④ 4 ⑤ 6

412) [수상 R828번]

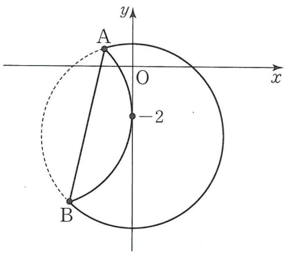
점 $P(-2\sqrt{3},\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 $A,\ B$라 할 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하여라.

413) [수상 R829번]

좌표평면 위에 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$가 있다. 이 원에 접하는 접선들 중에서 서로 수직이 되는 두 직선의 교점을 P라 할 때, 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

414) [수상 R830번]

그림과 같이 원 $x^2+(y+3)^2=16$을 선분 AB를 접는 선으로 하여 접어 y축과 점 $(0,\ -2)$에서 접하도록 하였다. 직선 AB의 방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, 두 상수 $m,\ n$에 대하여 mn의 값을 구하시오. (단, $m>0$이다.)



415) [수상 R831번]

원 $x^2+y^2+4x+3=0$ 위를 움직이는 점 P와 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 5),\ \mathrm{B}(2,\ 3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값과 최댓값의 합은?

① 96 ② 100 ③ 104
④ 108 ⑤ 112

416) [수상 R832번]

원 $x^2+y^2-6x-2y=0$이 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 제 1사분면에 있는 원 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는?

① 14　② 15　③ 16
④ 17　⑤ 18

417) [수상 R833번]

이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 중에서 직선 $y=\sqrt{3}x-2$와 접하는 원은 2개이다. 두 원의 반지름의 길이를 각각 a, b라 할 때, $100ab$의 값을 구하시오.

418) [수상 R834번]

중심이 y축 위에 있는 원이 곡선 $y=x^2$과 두 점 $(1,\ 1)$, $(-1,\ 1)$에서 접할 때, 이 원의 넓이는?

① $\frac{5}{4}\pi$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{7}{4}\pi$
④ 2π ⑤ $\frac{9}{4}\pi$

419) [수상 R835번]

두 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=10$, $(x-2)^2+(y+1)^2=k$ $(k>0)$가 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이가 $2\sqrt{2}$가 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

① 50 ② 52 ③ 54
④ 56 ⑤ 58

420) [수상 R836번]

P 지점에 있는 레이더는 반경 $10\sqrt{13}\,\mathrm{km}$ 안에 있는 모든 선박을 감지하여 화면에 나타낸다. P 지점에서 서쪽 $40\,\mathrm{km}$ 지점 해상에 있던 한 척의 배가 시속 $4\,\mathrm{km}$의 일정한 속력으로 움직이기 시작했다. 배의 진행 방향과 동쪽 방향이 이루는 각의 크기가 $60°$일 때, 이 배가 레이더 화면에 보였다가 사라질 때까지 걸리는 시간은?

① 4시간　② 4시간 30분
③ 5시간　④ 5시간 30분
⑤ 6시간

421) [수상 R837번]

좌표평면에서 x축, y축, 직선 $3x-4y+6=0$에 동시에 접하는 모든 원의 중심의 좌표를 구하고, 그 과정을 서술하시오.

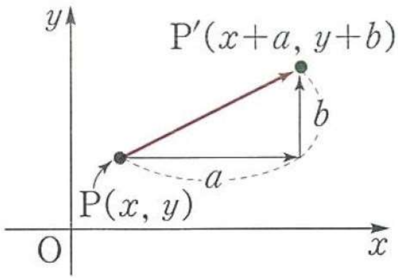
422) [수상 R838번]
점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$에서 원점을 지나는 직선에 내린 수선의 발 P의 자취의 길이를 구하여라.

423) [수상 R840번]
직선 $y=mx+n$이 두 원 $x^2+y^2=9$, $(x+3)^2+y^2=4$에 동시에 접할 때, 두 실수 m, n에 대하여 $32mn$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

도형의 방정식

점의 평행이동

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면 $\mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$



<참고> 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 점 $\mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$로 옮기는 평행이동을 기호로

$$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$$

와 같이 나타낸다.

도형의 평행이동

(1) 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

(2) 방정식 $y=f(x)$가 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

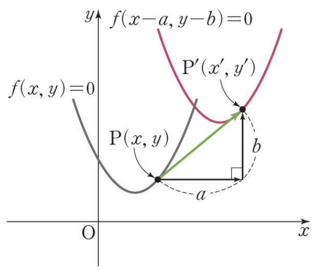
$$y-b=f(x-a)$$

[설명]

좌표평면 위의 도형의 방정식을

$$f(x,\ y)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

이라고 할 때, ①이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구해 보자.



방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라고 하면

$$x'=x+a,\ \ y'=y+b$$

즉,

$$x=x'-a,\ \ y=y'-b$$

이다. 이것을 $f(x,\ y)=0$에 대입하면

$$f(x'-a,\ y'-b)=0$$

이 성립한다. 따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 방정식

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

을 만족한다.

<참고> 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 대하여

① 점 : x좌표에 $x+a$, y좌표에 $y+b$를 대입한다.

② 도형 : x대신 $x-a$, y대신 $y-b$를 대입한다.

원의 평행이동

원 $x^2+y^2=r^2$을 평행이동

$$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$$

에 의하여 이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

즉 원은 평행이동에 의하여 이동할 때, 원의 중심 $(0,\ 0)$은 $(a,\ b)$로 이동하고 반지름의 길이는 변하지 않는다.

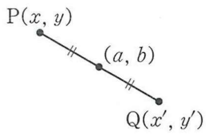
점의 대칭이동

점 (x, y)를 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 다음과 같다.

① x축 $\Rightarrow (x, -y)$　② y축 $\Rightarrow (-x, y)$

③ 원점 $\Rightarrow (-x, -y)$　④ 직선 $y=x$ $\Rightarrow (y, x)$

⑤ 직선 $y=-x$ $\Rightarrow (-y, -x)$



〈참고〉 $\mathrm{P}(x, y)$를 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 점이 $\mathrm{Q}(x', y')$일 때, 선분 PQ의 중점의 좌표가 (a, b)이므로 $\frac{x+x'}{2}=a$, $\frac{y+y'}{2}=b$

$\therefore x'=2a-x$, $y'=2b-y$

도형의 대칭이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

① x축 $\Rightarrow f(x, -y)=0$

② y축 $\Rightarrow f(-x, y)=0$

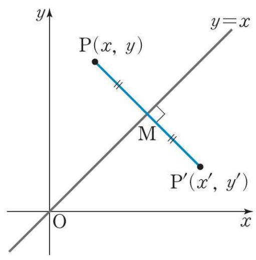
③ 원점 $\Rightarrow f(-x, -y)=0$

④ 직선 $y=x$ $\Rightarrow f(y, x)=0$

⑤ 직선 $y=-x$ $\Rightarrow f(-y, -x)=0$

[증명]

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{P}'(x', y')$을 구해 보자.



오른쪽 그림에서와 같이 직선 $y=x$는 $\overline{\mathrm{PP'}}$의 수직이등분선이다.

이때 $\overline{\mathrm{PP'}}$의 중점

$$\mathrm{M}\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$$

은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$\frac{y+y'}{2}=\frac{x+x'}{2}$$

으로부터

$$x'-y'=y-x \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

또, $\overline{\mathrm{PP'}}$은 직선 $y=x$와 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x}=-1$$

로부터

$$x'+y'=x+y \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. ①, ②에서

$$x'=y,\ y'=x$$

이다.

따라서 좌표평면 위에 있는 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

$$\mathrm{P}'(y, x)$$

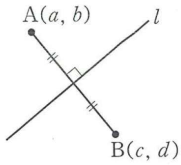
〈참고〉 방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 때, 방정식에 포함된 y대신에 $-y$를 대입하므로 $f(-y, x)=0$이 된다.

직선에 대한 대칭이동

점 $A(a,\ b)$를 직선 $l : y = mx + n$에 대하여 대칭이동한 점 $B(c,\ d)$는 다음을 이용하여 구한다.

(i)직선 AB는 직선 l과 수직이므로 $\frac{d-b}{c-a} \cdot m = -1$

(ii)선분 AB의 중점은 직선 l위의 점이므로 $\frac{b+d}{2} = m \cdot \frac{a+c}{2} + n$



〈참고〉 기울기가 ± 1인 직선에 대한 대칭이동

(1) 직선 $y = x + n$에 대한 대칭이동 $(x,\ y) \longrightarrow (y-n,\ x+n)$ $f(x,\ y) = 0 \longrightarrow f(y-n,\ x+n) = 0$

(2) 직선 $y = -x + n$에 대한 대칭이동 $(x,\ y) \longrightarrow (-y+n,\ -x+n)$ $f(x,\ y) = 0 \longrightarrow f(-y+n,\ -x+n) = 0$

1. 표현의 이해

① (x, y) : 주로 점을 나타낼 때 사용

② $y=f(x)$: 주로 표준형 꼴의 도형을 간단히 표현할 때 사용

ex1) $y=2x+1 \Rightarrow y=f(x)$, $f(x)=2x+1$

③ $f(x, y)=0$: 주로 일반형 꼴의 도형을 간단히 표현할 때 사용

ex2) $2x-y+1=0 \Rightarrow f(x, y)=0$, $f(x, y)=2x-y+1$

2. 평행이동(x축으로 a만큼, y축으로 b만큼)

점	(x, y)	$\Rightarrow$	$(x+a, y+b)$
도형	$y=f(x)$	$\Rightarrow$	$y-b=f(x-a)$, $y=f(x-a)+b$
	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(x-a, y-b)=0$

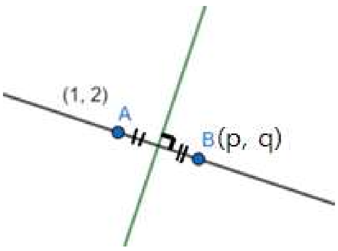
3. 대칭이동

	점			도형		
x축	(x, y)	$\Rightarrow$	$(x, -y)$	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(x, -y)=0$
y축	(x, y)	$\Rightarrow$	$(-x, y)$	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(-x, y)=0$
원점	(x, y)	$\Rightarrow$	$(-x, -y)$	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(-x, -y)=0$
$y=x$	(x, y)	$\Rightarrow$	(y, x)	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(y, x)=0$
$y=-x$	(x, y)	$\Rightarrow$	$(-y, -x)$	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(-y, -x)=0$

4. $y=ax+b$에 대한 대칭이동

ex3) 직선 $y=3x+2$에 대하여 $(1,\ 2)$를 대칭

풀이] 대칭된 점을 (p, q)



(i) $(1,\ 2)$, (p, q)에서 $y=3x+2$까지의 거리가 같다. 따라서 $(1,\ 2)$, (p, q)의 중점 $\left(\frac{p+1}{2},\ \frac{q+2}{2}\right)$이

$y=3x+2$위에 있다. $\frac{q+2}{2}=3\frac{p+1}{2}+2$, $3p-q=-5$

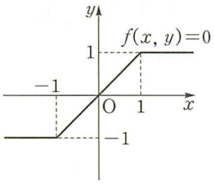
(ii) $(1,\ 2)$와 (p, q)를 이은 기울기가 직선 $y=3x+2$와 수직

$\frac{q-2}{p-1}=-\frac{1}{3}$, $p-1=6-3q$ $\quad\quad \therefore\ p+3q=7$

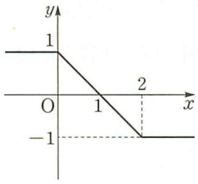
연립하여 풀면 $p=-\frac{4}{5}$, $q=\frac{13}{5}$

5. 응용(일반적인 그림에서는 선말고 점부터 옮긴다)

ex4) 방정식 $f(x,\ y)=0$ 이 나타내는 도형이 [그림 1]과 같을 때, [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식인 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?



[그림 1]



[그림 2]

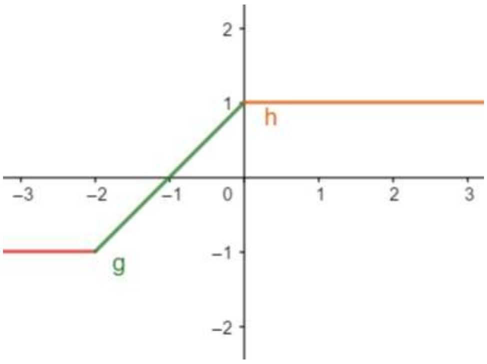
[보 기]

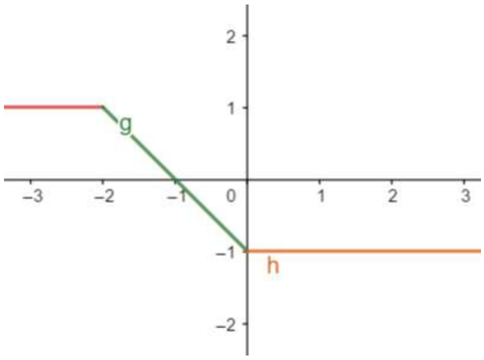
ㄱ. $f(x+1,\ -y)=0$
ㄴ. $f(x-1,\ -y)=0$
ㄷ. $f(1-x,\ y)=0$

풀이] ㄴ, ㄷ

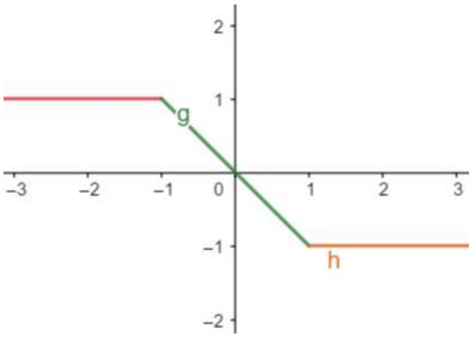
ㄱ.

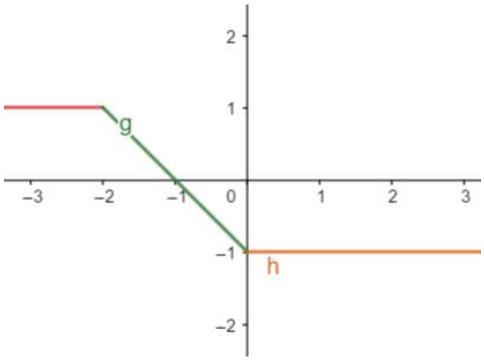
① $f(x,y)=0 \xRightarrow{x\text{축으로 } -1\text{만큼 평행이동}} f(x+1,y)=0 \xRightarrow[x\text{축 대칭}]{} f(x+1,\ -y)=0$





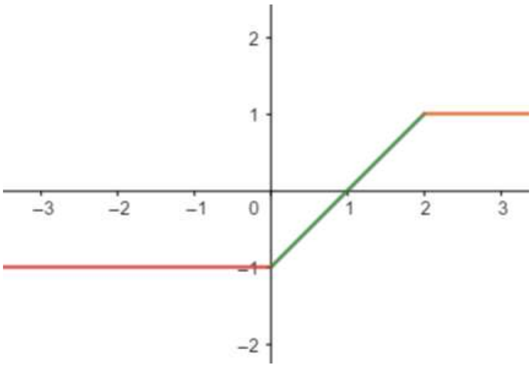
② $f(x,y)=0 \xRightarrow{x\text{축 대칭}} f(x,\ -y)=0 \xRightarrow[x\text{축으로 } -1\text{만큼 평행이동}]{} f(x+1,\ -y)=0$

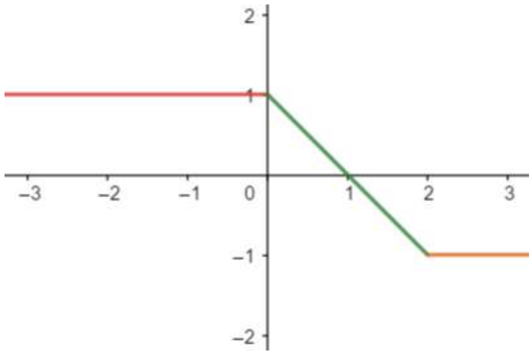




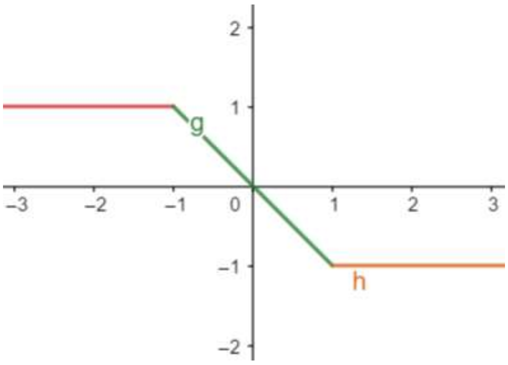
ㄴ.

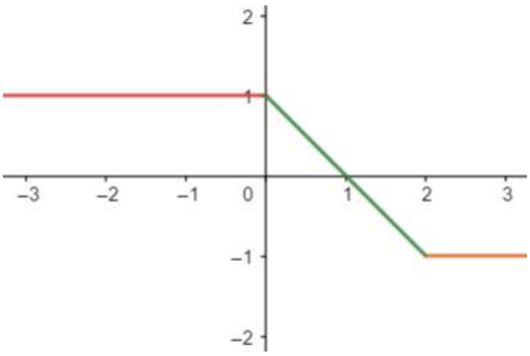
① $f(x,y)=0 \xRightarrow{x\text{축으로 }1\text{만큼 평행이동}} f(x-1,y)=0 \xRightarrow[x\text{축 대칭}]{} f(x-1,\ -y)=0$





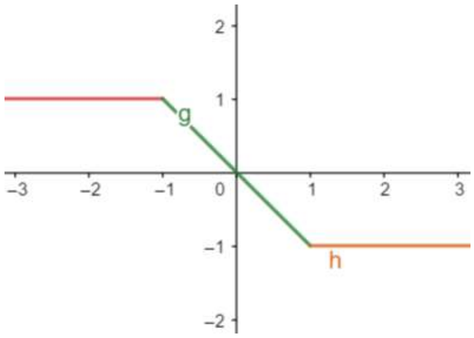
② $f(x,y)=0 \xRightarrow{x\text{축 대칭}} f(x,-y)=0 \xRightarrow[x\text{축 }1\text{만큼 평행이동}]{} f(x-1,\ -y)=0$

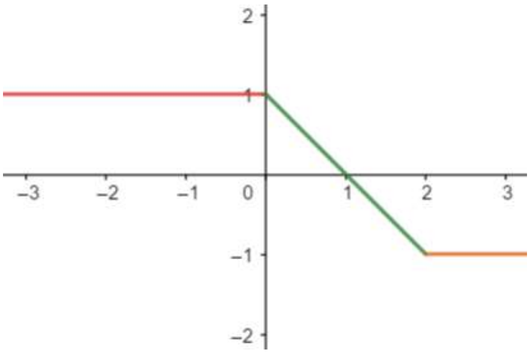




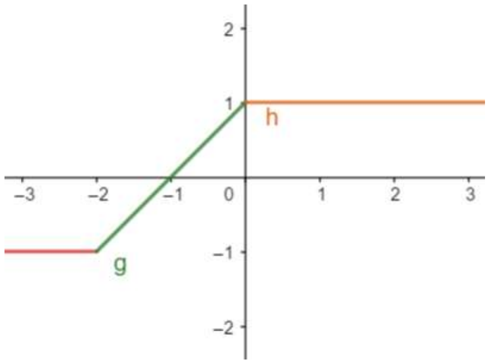
ㄷ.

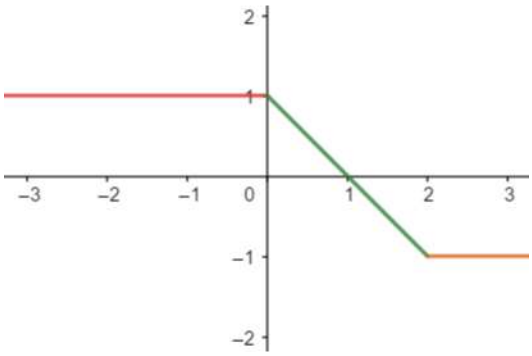
$$① \; f(x,y)=0 \overset{y\text{축 대칭}}{\Rightarrow} f(-x,\; y)=0 \underset{x\text{축 } 1\text{만큼 평행이동}}{\Rightarrow} f(-(x-1),\; y)=0$$





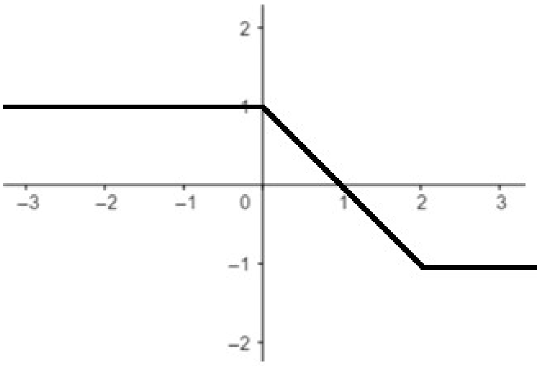
$$② \; f(x,y)=0 \overset{x\text{축 } -1\text{만큼 평행이동}}{\Rightarrow} f(x+1,\; y)=0 \underset{y\text{축 대칭}}{\Rightarrow} f(1-x,\; y)=0$$



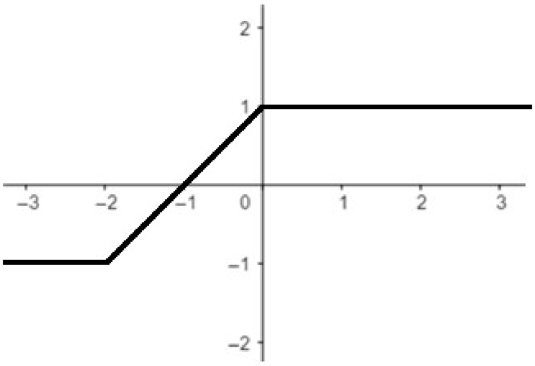


6. 절댓값 그래프

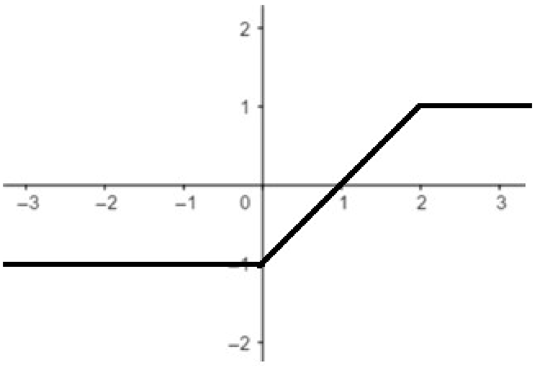
ex5) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음의 그래프를 그려라.



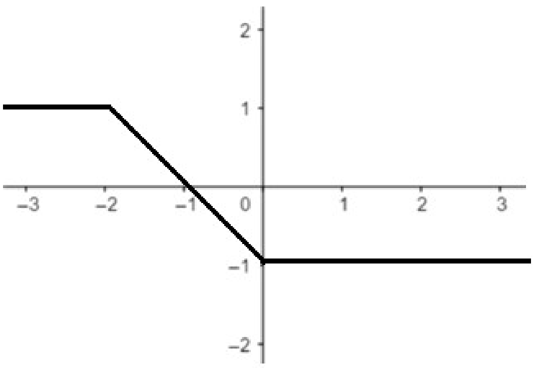
(1) $y=f(-x)$



(2) $-y=f(x)$



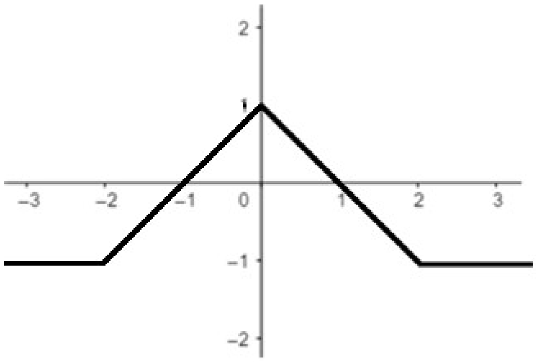
(3) $-y=f(-x)$



(4) $y=f(|x|)$

$x \geq 0$일 때, $y=f(x)$,

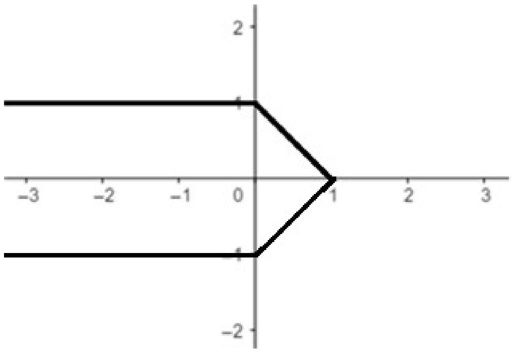
$x<0$일 때, $y=f(-x)$



(5) $|y|=f(x)$

$y \geq 0$일 때, $y=f(x)$

$y<0$일 때, $-y=f(x)$



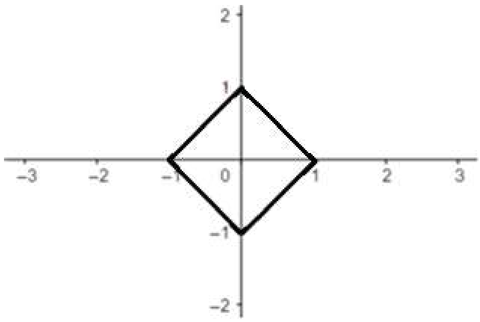
(6) $|y|=f(|x|)$

$x \geq 0, y \geq 0$일 때, $y=f(x)$

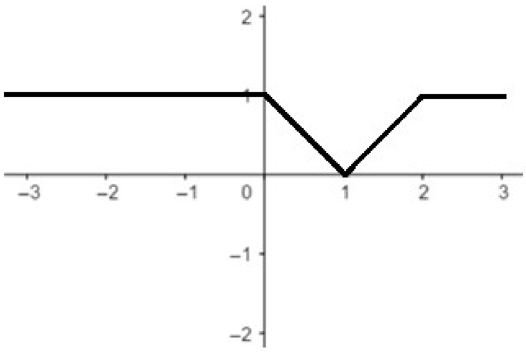
$x \geq 0, y<0$일 때, $-y=f(x)$

$x<0, y \geq 0$일 때, $y=f(-x)$

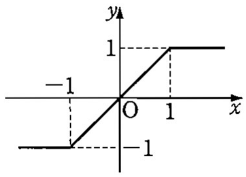
$x<0, y<0$일 때, $-y=f(-x)$



(7) $y=|f(x)|$



424) [수상 R854번]
함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음의 그래프를 그려라.



(1) $y=f(-x)$

(2) $-y=f(x)$

(3) $-y=f(-x)$

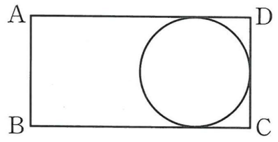
(4) $y=f(|x|)$

(5) $|y|=f(x)$

(6) $|y|=f(|x|)$

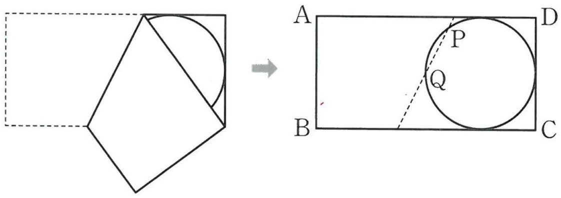
(7) $y=|f(x)|$

425) [수상 R857번]
가로의 길이가 16, 세로의 길이가 8인 직사각형 모양의 종이가 있다. [그림1]은 네 꼭짓점을 A, B, C, D라 하고 변 BC, CD, DA와 접하는 원을 그린 것이다.



[그림1]

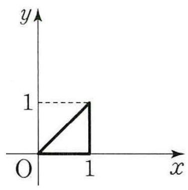
[그림2]와 같이 점 A와 C가 만나도록 종이를 접었다가 다시 펼쳤을 때 생기는 선이 원과 만나는 점을 P, Q라 하자. 선분 PQ의 길이를 k라 할 때, $5k^2$의 값을 구하시오.

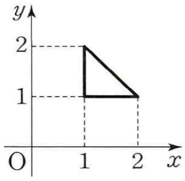


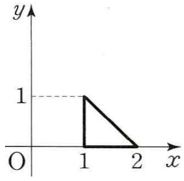
[그림2]

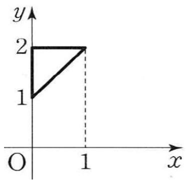
426) [수상 R858번]

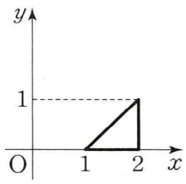
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 방정식 $f(y,\ x-1)=0$이 나타내는 도형은?

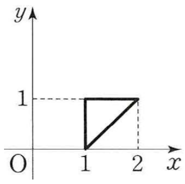


① 

② 

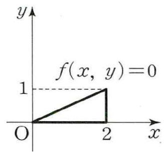
③ 

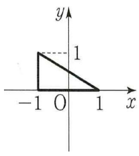
④ 

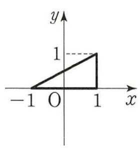
⑤ 

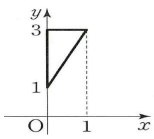
427) [수상 R859번]

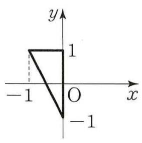
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 방정식 $f(y+1,\ -x)=0$이 나타내는 도형은?

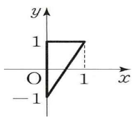


① 

② 

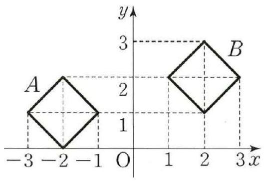
③ 

④ 

⑤ 

428) [수상 R860번]

오른쪽 그림과 같은 도형 A를 나타내는 방정식이 $f(x,\ y)=0$일 때, 도형 B를 나타낼 수 있는 방정식만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오.



<보 기>

ㄱ. $f(x-4,\ y-1)=0$ ㄴ. $f(-x,\ -y-3)=0$

ㄷ. $f(-y+3,\ -x)=0$ ㄹ. $f(x-4,\ -y+3)=0$

ㅁ. $f(-x,\ y-1)=0$

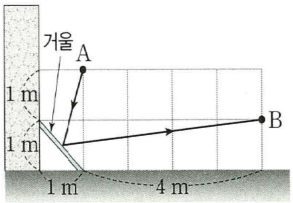
429) [수상 R863번]

점 $\mathrm{A}(2,\ -3)$을 지나는 직선 l을 점 $(1,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 후, 다시 x축에 대하여 대칭이동하였더니 다시 점 A를 지나는 직선이 되었다. 이때, 직선 l의 방정식을 구하시오.

430) [수상 R865번]
좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ 3)$이 있고, 직선 $y=-2x+2$ 위에 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표는?

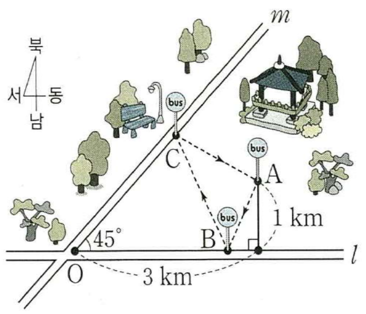
① $(-1,\ 4)$ ② $\left(-\frac{1}{8},\ \frac{9}{4}\right)$ ③ $\left(-\frac{1}{16},\ \frac{17}{8}\right)$
④ $\left(\frac{1}{8},\ \frac{7}{4}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$

431) [수상 R866번]
다음 그림과 같이 벽면에 거울이 설치되어 있다. 점 A에서 출발한 빛 중에서 거울에 반사되어 점 B를 통과하는 경우는 오직 한 경우 밖에 없을 때, 점 A에서 출발한 빛이 거울을 거쳐 점 B까지 움직인 거리는? (단, 빛은 항상 최단 거리로 움직인다.)



① $\sqrt{34}$ ② $\sqrt{35}$ ③ 6
④ $\sqrt{37}$ ⑤ $\sqrt{38}$

432) [수상 R867번]



오른쪽 그림과 같이 동서로 뻗어 있는 직선도로 l과 남서쪽에서 북동쪽으로 뻗어 있는 직선도로 m이 이루는 각은 45°이다. 두 직선도로 l과 m이 만나는 지점 O로부터 동쪽으로 3 km 떨어진 지점에서 북쪽으로 $1km$ 떨어진 지점에 정류소 A가 있다. 정류소 A를 출발해서 직선도로 l 위의 한 지점과 직선도로 m 위의 한 지점을 차례로 경유하여 정류소 A로 돌아오는 도로를 만들려고 한다. 만들려고 하는 도로의 길이가 최소가 되도록 직선도로 l 위의 한 지점에 정류소 B, 직선도로 m 위의 한 지점에 정류소 C를 만들 때, 두 정류소 B와 C 사이의 거리(km)는? (단, 도로의 폭은 무시하며 모든 지점과 도로는 동일평면 위에 있다.)

① $\frac{\sqrt{5}}{2}$　② $\frac{7\sqrt{5}}{12}$　③ $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{3\sqrt{5}}{4}$　⑤ $\frac{5\sqrt{5}}{6}$

433) [수상 R868번]

두 점 $\mathrm{A}(a,\ 3)$, $\mathrm{B}(-2,\ b)$가 어떤 평행이동에 의하여 각각 두 점 $\mathrm{A}'(4,\ 1)$, $\mathrm{B}'(1,\ 5)$로 옮겨질 때, 이 평행이동에 의하여 점 $(a,\ b)$가 옮겨지는 점의 좌표는?

① $(3,\ 4)$　② $(4,\ 5)$　③ $(5,\ 6)$
④ $(6,\ 7)$　⑤ $(7,\ 8)$

434) [수상 R869번]

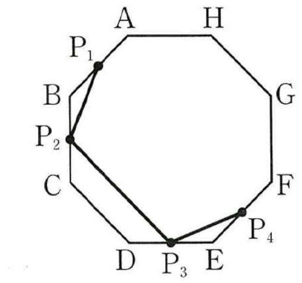
원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 직선 $3x-4y-4=0$에 접한다. 이때, 양수 a의 값은?

① $\frac{8}{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 3

④ $\sqrt{10}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

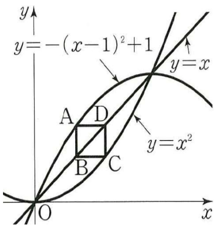
435) [수상 R870번]

한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정팔각형 $ABCDEFGH$에 대하여 변 AB의 중점 P_1에서 출발하여 변 BC, 변 DE를 거쳐 변 EF의 중점 P_4에 이르는 최단거리를 구하시오.



436) [수상 R871번]

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=-(x-1)^2+1$, $y=x^2$의 그래프 위에 각각 점 A와 C를, 직선 $y=x$ 위에 서로 다른 두 점 B와 D를 잡아 사각형 ABCD가 정사각형이 되도록 하였다. 이때, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는? (단, 점 A, B, C, D의 x좌표는 양수이다.)



① $\frac{\sqrt{5}}{2}-1$ ② $\sqrt{5}-2$ ③ $2-\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $3-\sqrt{5}$

437) [수상 R873번]

직선 $y=-2x+b(b>0)$와 이 직선을 세 대칭이동

$f:(x,\ y)\longrightarrow(-x,\ y)$,

$g:(x,\ y)\longrightarrow(x,\ -y)$,

$h:(x,\ y)\longrightarrow(-x,\ -y)$

에 의하여 각각 옮겼을 때 생기는 모든 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 되도록 하는 상수 b의 값을 구하시오.

438) [수상 R875번]

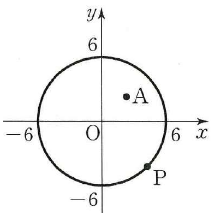
점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P, 점 $(1,\ -2)$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하자. 점 P와 점 Q가 y축에 대하여 대칭일 때, 점 A의 좌표는?

① $(-1,\ -3)$ ② $(-1,\ 3)$ ③ $(1,\ -3)$
④ $(1,\ 3)$ ⑤ $(3,\ 1)$

439) [수상 R876번]

포물선 $y=x^2-4x+1$을 점 $(-1,\ a)$에 대하여 대칭이동한 포물선이 x축과 만나지 않도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하시오.

440) [수상 R877번]
오른쪽 그림과 같이 두 점 A, P가 원 $x^2+y^2=36$의 내부와 경계선 위에서 각각 움직이고 있다. 점 A의 점 P에 대한 대칭점을 B라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. A(3, 2), P(6, 0)이면 점 B의 좌표는 (9, −2)이다.
ㄴ. A(3, 4)이면 선분 AB의 길이의 최댓값은 22이다.
ㄷ. 점 A의 위치에 관계없이 선분 AB의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은 항상 일정하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

441) [수상 R878번]
원 $x^2+y^2-4x-8y=0$을 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2=c$와 일치한다고 할 때, $a-b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 실수이다.)

442) [수상 R879번]
포물선 $y=x^2+2x-3$ 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$가 직선 $x+y=1$에 대하여 대칭할 때, x_1+x_2의 값은?

(단, $x_1 \neq x_2$)

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

443) [수상 R880번]
포물선 $y=x^2-4x+2$ 위의 서로 다른 두 점이 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭일 때, 두 점 사이의 거리를 구하시오.

444) [수상 R884번]

0이 아닌 두 실수 $a,\ b$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
(나) 복소수 $z=(a+b-2)+(a-b)i$에 대하여 $z^2=-16$이다. (단, $i=\sqrt{-1}$)

평행이동 $(x,\ y)\to(x+a,\ y+b)$에 의하여 원 $x^2+y^2=10$을 옮길 때, 옮겨진 원이 x축에 의하여 잘리는 현의 길이를 구하시오.

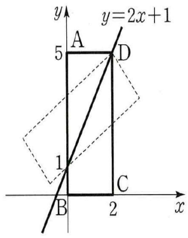
445) [수상 R885번]

직선 $x-3y+2=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선을 l이라 할 때, x축, y축 및 직선 l로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

446) [수상 R889번]

오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 2, 5인 직사각형 $ABCD$를 점 B를 원점으로 하여 좌표평면 위에 놓았다. 직사각형 $ABCD$를 직선 $y=2x+1$에 대하여 대칭이동하였을 때, 두 직사각형의 내부의 공통부분의 넓이는?



① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5

④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

447) [수상 R891번]

원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$의 제1사분면에 있는 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭 이동하여 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

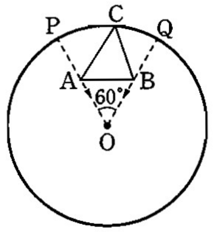
① $\pi+2$ ② $4\pi+8$

③ $4\pi+\sqrt{2}$ ④ $4\pi+\sqrt{5}$

⑤ $4\pi+4\sqrt{2}$

448) [수상 R892번]

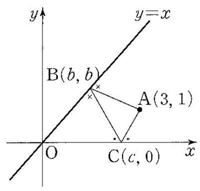
반지름의 길이가 $20\mathrm{m}$인 원형의 수영장이 있다. 그림에서 점O는 수영장의 중심이고 두 점 P, Q은 원 위의 점이며 $\angle \mathrm{POQ} = 60^{\circ}$ 이다. 갑과 을이 각각 P, Q에서 동시에 출발하여 중심 O를 향해 가고 있다. 호 PQ위에 한 점 C를 고정하고 선분 OP와 선분 OQ위의 임의의 두 지점 A, B에 갑과 을이 각각 도달하였을 때, 세 지점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$를 서로 연결한 거리의 합 $\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CA}}$의 최솟값은?



① $15\sqrt{2}\mathrm{m}$　② $15\sqrt{3}\mathrm{m}$　③ $20\sqrt{2}\mathrm{m}$
④ $20\sqrt{3}\mathrm{m}$　⑤ $25\sqrt{2}\mathrm{m}$

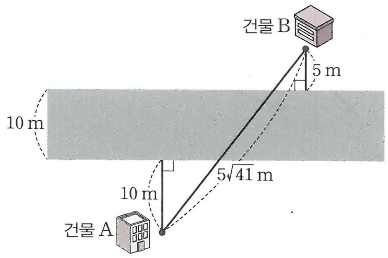
449) [수상 R893번]

점 $\mathrm{A}(3, 1)$에서 나온 광선이 직선 $y = x$로 나타내어지는 거울의 점 $\mathrm{B}(\mathrm{b}, \mathrm{b})$에서 반사된 후 다시 x축으로 나타내어지는 거울의 점 $\mathrm{C}(\mathrm{c}, 0)$에서 반사되어 점 A로 되돌아올 때, $6(b+c)$의 값을 구하시오. (단, 반시될 때 입사각과 반사각의 크기는 같다.)



450) [수상 R894번]

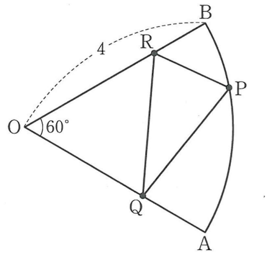
두 건물 A, B사이에 폭이 10m인 도로가 있다. 그림과 같이 두 건물 A, B에서 도로의 경계선까지의 거리는 각각 10m, 5m이고, 두 건물 A, B사이의 거리는 $5\sqrt{41}\text{m}$이다. 건물 A에서 건물 B까지 이동하는 거리가 최소이면서 도로와 수직이 되도록 도로 위에 횡단보도를 만들 때, 건물 A에서 이 횡단보도를 거쳐 건물 B로 이동하는 거리의 최솟값은? (단 건물의 크기와 횡단보도의 폭은 무시한다.)



① 25 m ② 30 m ③ 35 m
④ 40 m ⑤ 45 m

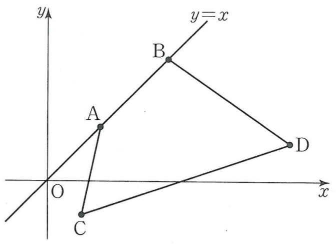
451) [수상 C895번]

그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $60°$인 부채꼴 BOA의 호 AB위에 두 점 A, B가 아닌 점 P를 잡았다. 두 변 OA, OB위를 움직이는 점을 각각 Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값은?



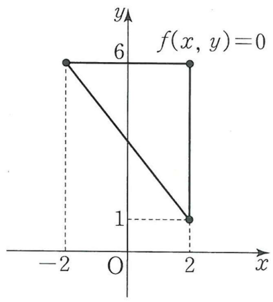
① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ 6
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ 8

452) [수상 R896번]
그림과 같이 직선 $y=x$위에 두 점 A, B가 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$를 만족시키며 움직이고 있다. 두 점 $\mathrm{C}(1,\ -1)$, $\mathrm{D}(7,\ 1)$에 대하여 사각형 ACDB의 둘레의 길이의 최솟값은?
(단, 점 B의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 크다.)



① $4\sqrt{2}+2\sqrt{10}$ ② $6\sqrt{2}+2\sqrt{10}$
③ $2\sqrt{2}+4\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{2}+6\sqrt{10}$
⑤ $4\sqrt{2}+4\sqrt{10}$

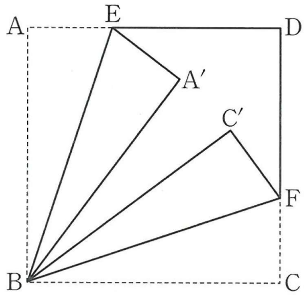
453) [수상 R897번]
그림과 같이 세 점 $(-2,\ 6)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 나타내는 도형의 방정식을 $f(x,\ y)=0$이라 하자. 방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{P}(\mathrm{a},\ \mathrm{b})$에 대하여 $\dfrac{3(b+1)}{a}$의 값이 정수가 되도록 하는 점 P의 개수는?



① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

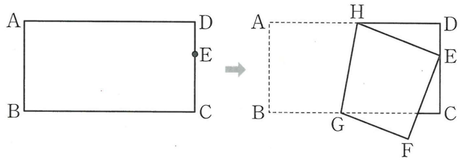
454) [수상 R899번]

그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD모양의 종이가 있다. 선분 AD와 CD를 $1:2$로 내분하는 점을 각각 E, F라 하고, 선분 BE와 BF를 접는 선으로 하여 각각 삼각형 ABE와 BCF를 접을 때, 두 점 A, C가 옮겨지는 점을 각각 A', C'이라 하자. 선분 $\mathrm{A'C'}$의 길이가 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

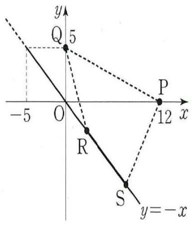


455) [수상 R900번]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$인 직사각형 ABCD 모양의 종이를 점 A가 변 CD위의 점 E에 오도록 접었다. 점 B가 옮겨진 점을 F, 접힌 선이 변 BC, AD와 만나는 점을 각각 G, H라 할 때, 사각형 EFGH의 넓이가 $\frac{17}{18}$이었다. $\overline{\mathrm{CE}}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \overline{\mathrm{CE}}>\frac{1}{2}\text{이다.}\right)$

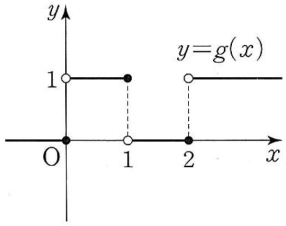


456) 수상 R901번]
오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 $P(12,\ 0),\ Q(0,\ 5)$가 있다. 길이가 $5\sqrt{2}$인 선분 RS가 반직선 $y=-x\,(x\ge-5)$ 위에서 움직일 때, 사각형 $PQRS$의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.

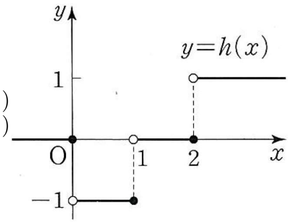


457) [수상 R903번]
다음 두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $y=g(x)+h(x)$, $y=g(x)h(x)$를 그려라.

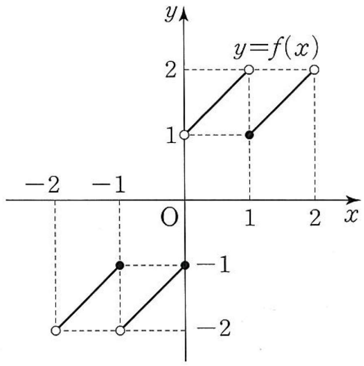
$$g(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ 1 & (0 < x \le 1) \\ 0 & (1 < x \le 2) \\ 1 & (x > 2) \end{cases}$$



$$h(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ -1 & (0 < x \le 1) \\ 0 & (1 < x \le 2) \\ 1 & (x > 2) \end{cases}$$



458) [수상 R904번]
열린구간 $(-2,\ 2)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다..



열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $g(x)$를
$$g(x)=f(x)+f(-x)$$
로 정의할 때, $g(x)$의 그래프를 그려라.