

제 2 교시

수학 영역

KSM

5 지선 다형

1.  $\sqrt[5]{54} \times 2^{\frac{5}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 4      ② 6      ③ 8      ④ 10      ⑤ 12

2. 함수  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ 에 대하여  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{2h}$ 의 값은? [2점]

- ① 1      ② 3      ③ 5      ④ 7      ⑤ 9

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

$$f'(3) = 27 - 18 + 1 = 10$$

$$\therefore \frac{1}{2} f'(3) = 5$$

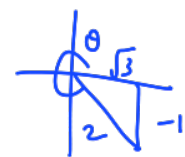
3.  $\cos \theta > 0$ 이고  $\sin \theta + \cos \theta \tan \theta = -1$ 일 때,  $\tan \theta$ 의 값은? [3점]

- ①  $-\sqrt{3}$       ②  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$       ③  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       ④ 1      ⑤  $\sqrt{3}$

$$s + c \cdot \frac{s}{c} = -1$$

$$2s = -1$$

$$s = -\frac{1}{2}$$



$$\tan \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & (x < 3) \\ \sqrt{x+1}-a & (x \geq 3) \end{cases}$$

이  $x=3$ 에서 연속일 때, 상수  $a$ 의 값은? [3점]

- ① -2      ② -1      ③ 0      ④ 1      ⑤ 2

$$6+a = 2-a$$

$$a = -2$$

5. 다항함수  $f(x)$ 가

$$f'(x) = x(3x+2), \quad f(1) = 6$$

을 만족시킬 때,  $f(0)$ 의 값은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

$$f' = 3x^2 + 2x$$

$$f = x^3 + x^2 + c$$

$$f(1) = 2 + c = 6, \quad c = 4$$

$$f(0) = c = 4$$

6. 공비가 1보다 큰 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2} = 5, \quad a_5 = 48$$

일 때,  $a_1 + a_4$ 의 값은? [3점]

- ① 39      ② 36      ③ 33      ④ 30      ⑤ 27

$$1+r^2=5, \quad r=2$$

$$a_5 = 48$$

$$a_4 = 24$$

$$a_1 = 3$$

7. 함수  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 1$ 이 닫힌구간  $[a, b]$ 에서

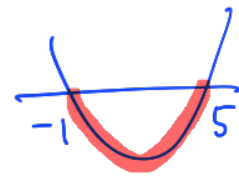
감소할 때,  $b-a$ 의 최댓값은? (단,  $a, b$ 는  $a < b$ 인 실수이다.)

[3점]

- ① 6      ② 7      ③ 8      ④ 9      ⑤ 10

$$f' = x^2 - 4x - 5$$

$$= (x-5)(x+1) \leq 0$$



$$b-a \leq 5 - (-1) = 6$$

8. 두 다항함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여

$$(x+1)f(x)+(1-x)g(x)=x^3+9x+1, f(0)=4$$

일 때,  $f'(0)+g'(0)$ 의 값은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

$$f(0)+g(0)=1, g(0)=-3$$

$$f(x)+(x+1)f'(x)-g(x)+(1-x)g'(x)=3x^2+9$$

$$f(0)+f'(0)-g(0)+g'(0)=9 \therefore f'(0)+g'(0)=2$$

9. 좌표평면 위의 두 점  $(0, 0), (\log_2 9, k)$ 를 지나는 직선이 직선  $(\log_4 3)x+(\log_8 8)y-2=0$ 에 수직일 때,  $3^k$ 의 값은? (단,  $k$ 는 상수이다.) [4점]

- ① 16      ② 32      ③ 64      ④ 128      ⑤ 256

$$\left(-\frac{\log_4 3}{\log_8 8}\right) \times \left(\frac{k}{\log_2 9}\right) = -1$$

$$\frac{k \cdot \log_2 3}{\frac{3}{2} \times 2} = 1, k \log_2 3 = 6$$

$$k = 6 \log_2 2, 3^k = 64$$

10. 시각  $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각  $t(t \geq 0)$ 에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t-2, v_2(t)=-2t+6$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

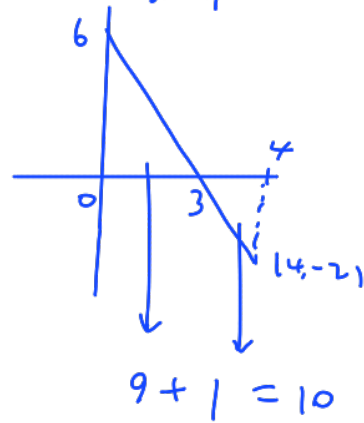
- ① 7      ② 8      ③ 9      ④ 10      ⑤ 11

$$x_1(t) = \frac{1}{2} - 3t^2 - 2t$$

$$x_2(t) = -t^2 + 6t$$

$$\frac{1}{2} - 2t^2 - 8t = 0$$

$$t(t+2)(t-4) = 0$$



11. 공차가 음의 정수인 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_6 = -2, \sum_{k=1}^8 |a_k| = \sum_{k=1}^8 a_k + 42$$

일 때,  $\sum_{k=1}^8 a_k$ 의 값은? [4점]

- ① 40    ② 44    ③ 48    ④ 52    ⑤ 56

$$\sum_{k=1}^8 (|a_k| - a_k) = 42, \quad \begin{matrix} a_k \geq 0 \rightarrow |a_k| - a_k = 0 \\ a_k < 0 \rightarrow |a_k| - a_k = -2a_k \end{matrix}$$

$$d = -1 \rightarrow a_5 = -1 \quad (\times)$$

$$\begin{matrix} d \leq -2 \rightarrow a_5 \geq 0 \\ a_6 < 0 \end{matrix} \Rightarrow -2(a_1 + a_7 + a_8) = 42$$

$$-6a_1 = 42, a_1 = -7, d = -5$$

$$a_n = -5n + 28$$

$$\sum_{k=1}^8 a_k = \frac{8(23-12)}{2} = 44$$

12. 실수  $a$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x + a & (x < 0) \\ 3x + a & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수

$$g(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$$

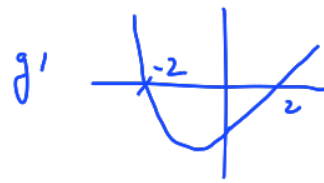
가  $x=2$ 에서 극솟값을 가질 때, 함수  $g(x)$ 의 극댓값은? [4점]

- ① 18    ② 20    ③ 22    ④ 24    ⑤ 26

$$g'(x) = f(x) \quad g'(2) = f(2) = 0$$

$$6 + a = 0, a = -6$$

$$f(x) = \begin{cases} 3(x+2)(x-1) & (x < 0) \\ 3(x-2) & (x \geq 0) \end{cases}$$



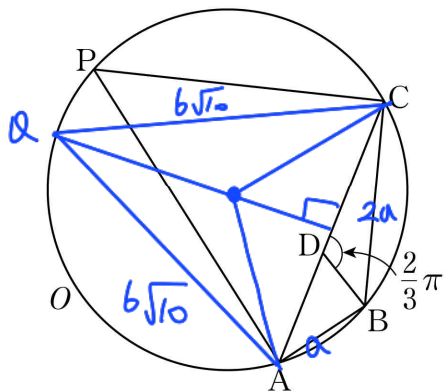
$$\begin{aligned} \therefore g(2) &= \int_{-4}^2 f(t) dt = \left[ \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6t \right]_{-4}^2 \\ &= (-2 + 6 + 12) - (-64 + 24 + 24) \\ &= 26 \end{aligned}$$

13. 그림과 같이

$$2\overline{AB} = \overline{BC}, \quad \cos(\angle ABC) = -\frac{5}{8}$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때,  $\overline{QA} = 6\sqrt{10}$ 이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여  $\angle CDB = \frac{2}{3}\pi$ 일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는?

[4점]



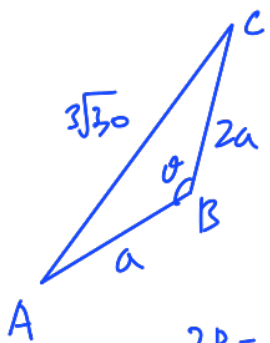
- ①  $3\sqrt{3}$     ②  $4\sqrt{3}$     ③  $3\sqrt{6}$     ④  $5\sqrt{3}$     ⑤  $4\sqrt{6}$

$$\overline{QA} = \overline{QC} = 6\sqrt{10}$$

$$\angle CBA = \theta \rightarrow \angle CQA = \pi - \theta, \quad \cos(\pi - \theta) = -\frac{5}{8}$$

$$\triangle ACQ \Rightarrow \overline{AC}^2 = 360 + 360 - 2 \cdot 6\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{10} \cdot \frac{5}{8} = 270$$

$$\therefore \overline{AC} = 3\sqrt{30}$$



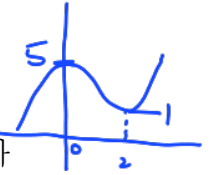
$$270 = 4a^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot (-\frac{5}{8})$$

$$\frac{15}{2}a^2 = 270, \quad a^2 = 36, \quad a = 6$$

$$2R = \frac{2a}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3} \quad \therefore R = 4\sqrt{3}$$

14. 두 정수  $a, b$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 는

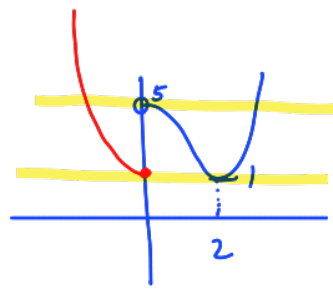
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + \frac{a^2}{4} + b^2 & (x \leq 0) & (x-a)^2 + b^2 - \frac{3}{4}a^2 \\ x^3 - 3x^2 + 5 & (x > 0) & 3x^2 - 6x + 5 = 3x(x-2) \end{cases}$$



이다. 실수  $t$ 에 대하여 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=t$ 가 만나는 점의 개수를  $g(t)$ 라 하자. 함수  $g(t)$ 가  $t=k$ 에서 불연속인 실수  $k$ 의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수  $a, b$ 의 모든 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수는? [4점]

- ① 3    ② 4    ③ 5    ④ 6    ⑤ 7

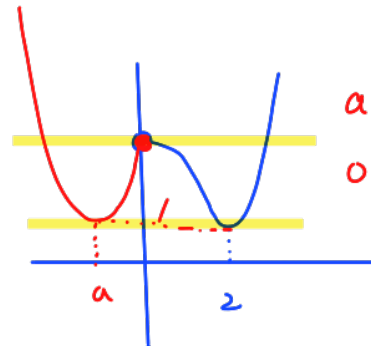
i)  $a \geq 0$



$$0 \rightarrow \frac{a^2}{4} + b^2 = 1$$

$$\begin{matrix} a & b \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix} \quad 3\text{개}$$

ii)  $a < 0$



$$a \rightarrow b^2 - \frac{3}{4}a^2 = 1$$

$$0 \rightarrow b^2 + \frac{a^2}{4} = 5$$

$$a^2 = 4, \quad a = -2$$

$$\begin{matrix} a & b \\ -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{matrix} \quad 2\text{개}$$

$$\underline{\underline{3+2=5}}$$

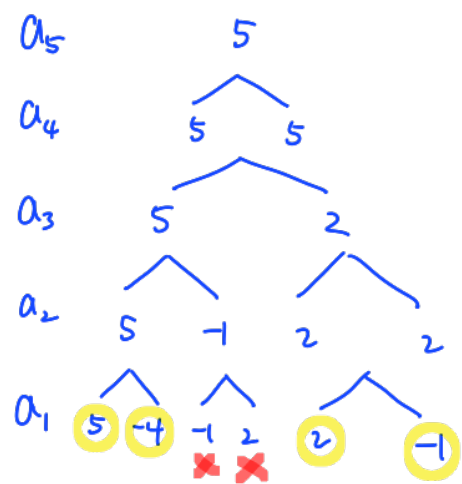
15. 수열  $\{a_n\}$  이 모든 자연수  $n$  에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & (a_n > n) \\ 3n - 2 - a_n & (a_n \leq n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때,  $a_5 = 5$  가 되도록 하는 모든  $a_1$  의 값의 곱은? [4점]

- ① 20    ② 30    ③ 40    ④ 50    ⑤ 60

$$a_n = \begin{cases} a_{n+1} & (a_n > n) \\ 3n - 2 - a_{n+1} & (a_n \leq n) \end{cases}$$



$\therefore 5 \times (-4) \times 2 \times (-1) = 40$

단답형

16. 방정식  $4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$  을 만족시키는 실수  $x$  의 값을 구하시오. [3점]

3

$$2^{2x} = 2^{9-x}$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

17.  $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 3) dx - \int_2^0 (2x + 1) dx$  의 값을 구하시오. [3점]

16

$$\int_0^2 ((3x^2 - 2x + 3) + (2x + 1)) dx$$

$$= \int_0^2 (3x^2 + 4) dx$$

$$= x^3 + 4x \Big|_0^2 = 8 + 8 = 16$$

18. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} \alpha a_k + \sum_{k=1}^9 \beta a_k = 137, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^9 2a_k = 101$$

일 때,  $a_{10}$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$\alpha + \beta = 137$$

$$\alpha - 2\beta = 101$$

$$\beta = 12$$

$$\alpha = 125$$

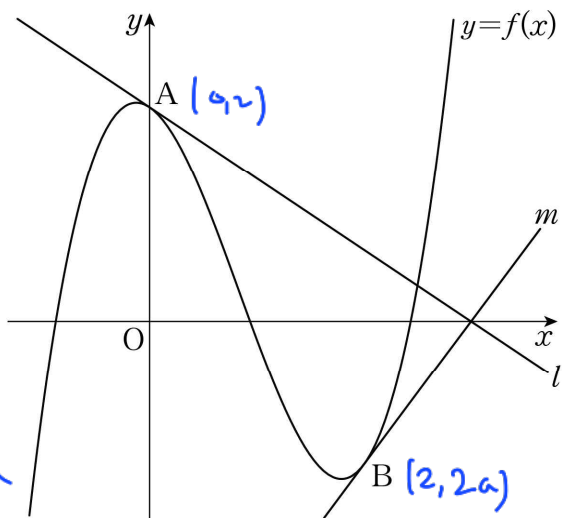
$$a_{10} = \alpha - \beta = 113$$

113

19. 실수  $a$ 에 대하여 함수  $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + ax + 2$ 이다.

곡선  $y = f(x)$  위의 두 점  $A(0, 2)$ ,  $B(2, f(2))$ 에서의 접선을 각각  $l$ ,  $m$ 이라 하자. 두 직선  $l$ ,  $m$ 이 만나는 점이  $x$ 축 위에 있을 때,  $60 \times |f(2)|$ 의 값을 구하시오. [3점]

80



$$f'(x) = 3x^2 - 5x + a$$

$$f'(0) = a$$

$$f'(2) = a + 2$$

$$l: y = ax + 2 \rightarrow (-\frac{2}{a}, 0)$$

$$m: y = (a+2)(x-2) + 2a \rightarrow (2 - \frac{2a}{a+2}, 0)$$

$$-\frac{2}{a} = 2 - \frac{2a}{a+2} = \frac{4}{a+2}$$

$$4a = -2a - 4, \quad a = -\frac{2}{3}$$

$$f(2) = 8 - 10 - \frac{4}{3} + 2 = -\frac{4}{3} \quad \therefore 60 \times |f(2)| = 80$$

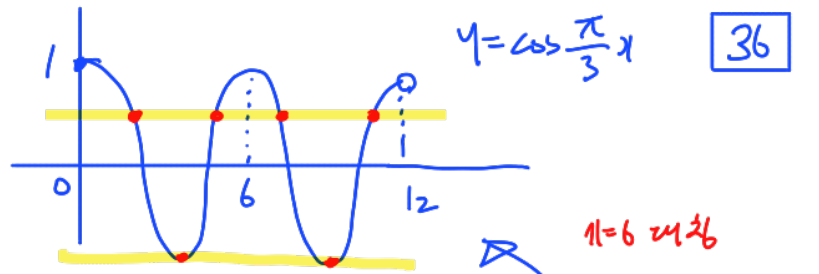
20. 두 함수  $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$ ,  $g(x) = \cos \frac{\pi}{3}x$ 에 대하여

$0 \leq x < 12$ 에서 방정식

주기 6

$$f(g(x)) = g(x)$$

를 만족시키는 모든 실수  $x$ 의 값의 합을 구하시오. [4점]



$$g(t) = t \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$$f(t) = t \rightarrow 2t^2 + 2t - 1 = t$$

$$(2t-1)(t+1) = 0, \quad t = \frac{1}{2}, -1$$

$t = 6$  때  $t = 6$

$$12 + 12 + 12 = 36$$

21.  $a > 2$ 인 실수  $a$ 에 대하여 기울기가  $-1$ 인 직선이 두 곡선

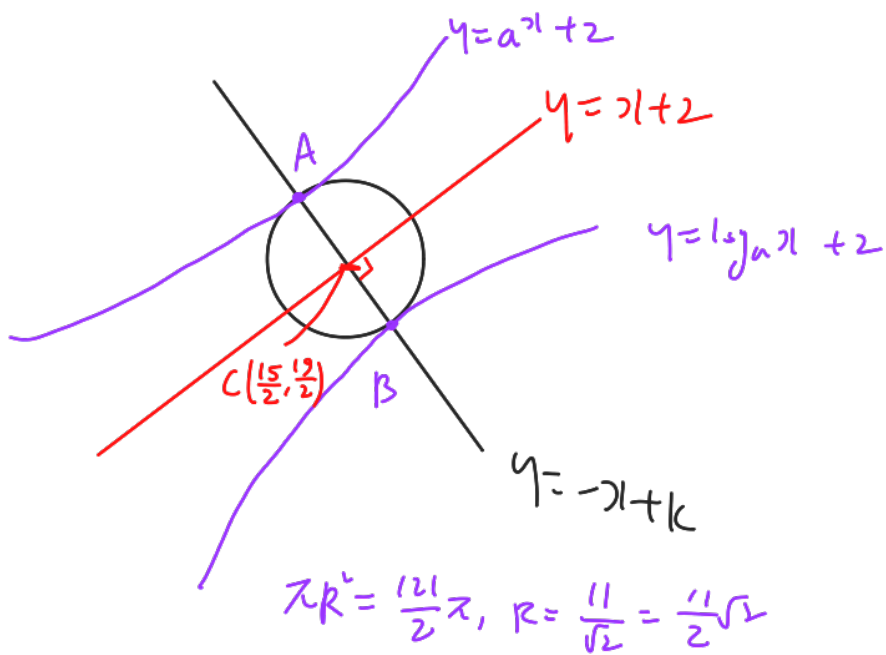
$y = a^x + 2$ ,  $y = \log_a x + 2$

와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의  $y$ 좌표가  $\frac{19}{2}$ 이고 넓이가  $\frac{121}{2}\pi$ 일 때,  $a^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

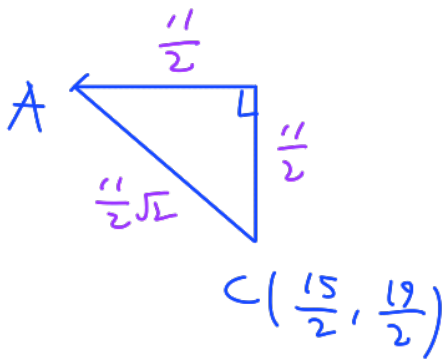
13

$a^x$  &  $\log_a x$ :  $y=x$  대칭

$\therefore a^x+2$  &  $\log_a x+2$ :  $y=x+2$  대칭



$\pi R^2 = \frac{121}{2}\pi, R = \frac{11}{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{2}$



$A(2, 15)$

$a^2 + 2 = 15$

$\therefore a^2 = 13$

22. 함수  $f(x) = |x^3 - 3x + 8|$  과 실수  $t$ 에 대하여

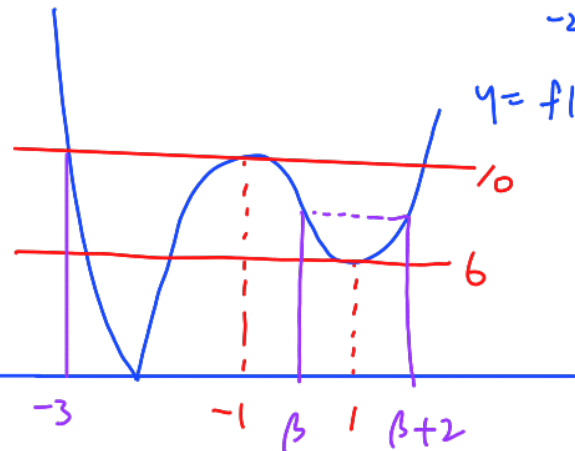
단구간  $[t, t+2]$ 에서의  $f(x)$ 의 최댓값을  $g(t)$ 라 하자. 서로 다른 두 실수  $\alpha, \beta$ 에 대하여 함수  $g(t)$ 는  $t=\alpha$ 와  $t=\beta$ 에서만 미분가능하지 않다.  $\alpha\beta = m+n\sqrt{6}$ 일 때,  $m+n$ 의 값을 구하시오. (단,  $m, n$ 은 정수이다.) [4점]

2

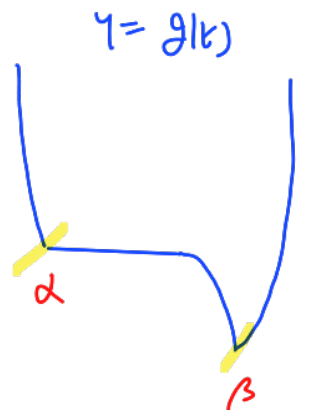
$3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$



$f(-3) = -10$



$$g(t) = \begin{cases} -f(t) & (t < -3) \\ 10 & (-3 \leq t < -1) \\ f(t) & (-1 \leq t < \beta) \\ f(t+2) & (t \geq \beta) \end{cases}$$



$\alpha = -3, f(\beta) = f(\beta+2)$

$\beta^3 - 3\beta + 8 = \beta^3 + 6\beta^2 + 12\beta + 8 - 3\beta - 6 + 8$

$6\beta^2 + 12\beta + 2 = 0$

$3\beta^2 + 6\beta + 1 = 0, \beta = \frac{-3 \pm \sqrt{6}}{3}, \beta = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3}$

$\therefore \alpha\beta = 3 - \sqrt{6} \quad \begin{matrix} m=3 \\ n=-1 \end{matrix} \Rightarrow m+n=2$

\* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.



제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5 지선 다형

23.  ${}_3H_3$ 의 값은? [2점]

- ① 10
- ② 12
- ③ 14
- ④ 16
- ⑤ 18

24. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 홀수의 개수는?

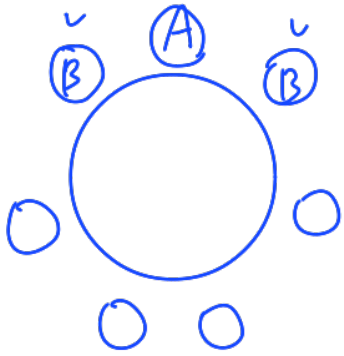
[3점]

- ① 30
- ② 36
- ③ 42
- ④ 48
- ⑤ 54

$$\begin{array}{r}
 \text{---}1 \\
 \text{---}3 \\
 \hline
 3^3=27 \\
 27 \quad )54
 \end{array}$$

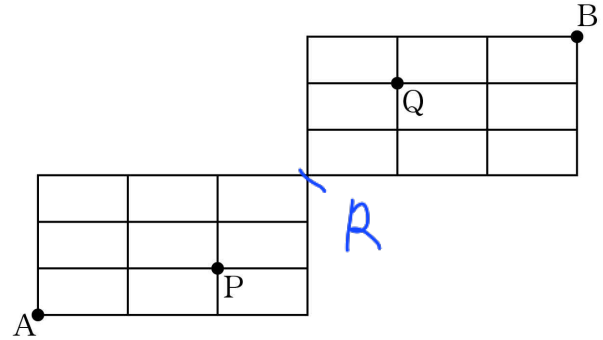
25. 남학생 5명, 여학생 <sup>A, B</sup> 2명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 여학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는?  
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

- ① 200    ② 240    ③ 280    ④ 320    ⑤ 360



$2 \times 5! = 240$

26. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 갈 때, P 지점을 지나면서 Q 지점을 지나지 않는 경우의 수는? [3점]



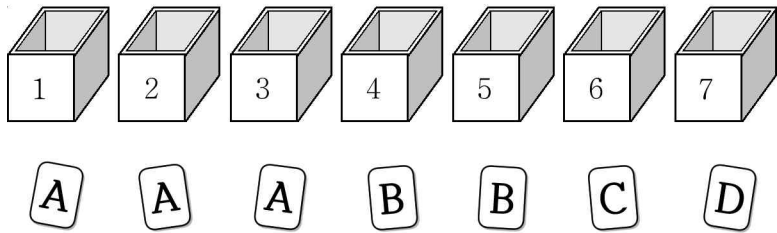
- ① 72    ② 81    ③ 90    ④ 99    ⑤ 108

$A \rightarrow P \rightarrow R : 3 \times 3 = 9$

$(R \rightarrow B) - (R \rightarrow Q \rightarrow B) : 6C_3 - 3 \times 3 = 11$

$9 \times 11 = 99$

27. 그림과 같이 문자 A, A, A, B, B, C, D가 각각 하나씩 적혀 있는 7장의 카드와 1부터 7까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 7개의 빈 상자가 있다.



각 상자에 한 장의 카드만 들어가도록 7장의 카드를 나누어 넣을 때, 문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)

[3점]

- ① 144    ② 168    ③ 192    ④ 216    ⑤ 240

홀짝

$$3 \text{ 홀} \rightarrow 4C_3 \times \frac{4!}{2!} = 48$$

$$1 \text{ 홀} \rightarrow (4C_1 \times 3C_2) \times \frac{4!}{2!} = 144$$

) 192

28. 다음 조건을 만족시키는 자연수  $a, b, c$ 의 모든 순서쌍  $(a, b, c)$ 의 개수는? [4점]

(가)  $ab^2c = 720$

(나)  $a$ 와  $c$ 는 서로소가 아니다.

- ① 38    ② 42    ③ 46    ④ 50    ⑤ 54

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

$b^2$	$a$	$c$	
$1^2$	$5 \cdot 2^4 \cdot 3^1$	$2^2 \cdot 3^2$	$2 \times (5 \times 3 - 4) = 22$
$2^2$	$5 \cdot 2^2 \cdot 3^1$	$2^2 \cdot 3^2$	$2 \times (3 \times 3 - 4) = 10$
$2^4$	$5 \cdot 3$	$3$	$2 \times 1 = 2$
$3^2$	$5 \cdot 2^4$	$2^2$	$2 \times 3 = 6$
$2^2 \cdot 3^2$	$5 \cdot 2$	$2$	$2 \times 1 = 2$
$2^4 \cdot 3^2$	$1$	$1$	(X)

} 42

$b^2$	$a$	$c$
$2^2$	$2^2 \cdot 3^2$	$1$
	$1$	$2^2 \cdot 3^2$
	$2^2$	$3^2$
	$3^2$	$2^2$

} 4

$b^2$	$a$	$c$
$1^2$	$2^4 \cdot 3^2$	$1$
	$1$	$2^4 \cdot 3^2$
	$2^4$	$3^2$
	$3^2$	$2^4$

} 4

단답형

ABC

272

29. 세 명의 학생에게 서로 다른 종류의 초콜릿 3개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.  
(단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점] 117

- (가) 적어도 한 명의 학생은 초콜릿을 받지 못한다.
- (나) 각 학생이 받는 초콜릿의 개수와 사탕의 개수의 합은 2 이상이다.

	A	B	C	
초	3	0	0	$3 \times 3H_1 = 9$
사	2↑	2↑	2↑	

초	2	1	0	$(3 \times 2 \times 3 \times 2) \times 3H_2 = 108$
사	1↑	2↑	2↑	

117

30. 집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수  $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오. [4점] 90

- (가)  $f(1) \leq f(2) \leq f(3)$
- (나)  $1 < f(5) < f(4)$
- (다)  $f(a) = b, f(b) = a$ 를 만족시키는 집합  $X$ 의 서로 다른 두 원소  $a, b$ 가 존재한다.  $\rightarrow$  (가)에서 불가능

$f(5)$	$f(4)$	
2	3	$f(5)=2, f(4)=5 \Rightarrow 3 \times 5 \times 1 = 15$
2	4	
2	5	$f(5)=2, f(4)=3 \Rightarrow 4H_2 = 10$
3	4	
3	5	$f(5)=3, f(4)=5 \Rightarrow 2 \times 5H_2 = 30$
4	5	
		$f(4)=5, f(5)=4 \Rightarrow 5H_3 = 35$

90

\* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5 지선 다형

23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n-1}}{2^n - 3^n}$  의 값은? [2점]

- ①  $-\frac{1}{3}$    
  ②  $-\frac{1}{6}$    
  ③ 0   
  ④  $\frac{1}{6}$    
  ⑤  $\frac{1}{3}$

24. 두 수열  $\{a_n\}, \{b_n\}$  이

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 3$$

을 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + b_n}{1 + 2b_n}$  의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{3}$    
  ②  $\frac{1}{2}$    
 ③  $\frac{2}{3}$    
  ④  $\frac{5}{6}$    
  ⑤ 1

$$\frac{na_n + \frac{b_n}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{2b_n}{n}} \rightarrow \frac{1+3}{0+6} = \frac{2}{3}$$

25. 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$2n+3 < a_n < 2n+4$$

를 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}$ 의 값은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

$$2 + \frac{a_n}{n} = 2$$

$$\frac{\left(\frac{a_n+1}{n}\right)^2 + 6}{\frac{a_n}{n}} \rightarrow \frac{4+6}{2} = 5$$

26. 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = a_1 + 2 = d$$

를 만족시킨다.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n+n}{a_n-n+1} = 3$ 일 때,  $a_{10}$ 의 값은?

(단,  $a_1 > 0$ ) [3점]

- ① 35      ② 36      ③ 37      ④ 38      ⑤ 39

$$a_n = dn + \dots$$

$$\frac{2d+1}{d-1} = 3$$

$$2d+1 = 3d-3, \quad d=4$$

$$a_1 = 2$$

$$a_{10} = 2 + 9d = 38$$

27.  $a_1=3, a_2=6$ 인 등차수열  $\{a_n\}$ 과 모든 항이 양수인 수열  $\{b_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k(b_k)^2 = n^3 - n + 3$$

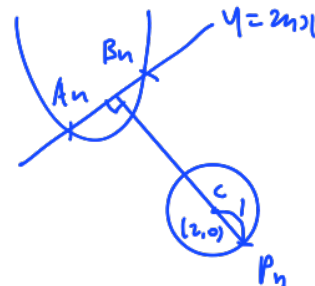
을 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}}$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{3}{2}$     ②  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$     ③ 3    ④  $3\sqrt{2}$     ⑤ 6

$a_n = 3n$   
 $a_n(b_n)^2 = (n^3 - n + 3) - ((n-1)^3 - (n-1) + 3)$   
 $= 3n^2 - 3n = 3n(n-1) \quad (n \geq 2)$   
 $a_1(b_1)^2 = 3, \quad a_1=3, \quad b_1=1$   
 $3n(b_n)^2 = 3n(n-1) \quad \therefore (b_n)^2 = n-1$   
 $b_n = \sqrt{n-1} \quad (n \geq 2)$   
 $b_1 = 1$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n-1} \sqrt{2n-1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

28. 자연수  $n$ 에 대하여 직선  $y=2nx$ 가 곡선  $y=x^2+n^2-1$ 과 만나는 두 점을 각각  $A_n, B_n$ 이라 하자. 원  $(x-2)^2+y^2=1$  위의 점  $P$ 에 대하여 삼각형  $A_n B_n P$ 의 넓이가 최대가 되도록 하는 점  $P$ 를  $P_n$ 이라 할 때, 삼각형  $A_n B_n P_n$ 의 넓이를  $S_n$ 이라 하자.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ 의 값은? [4점]

- ① 2    ② 4    ③ 6    ④ 8    ⑤ 10

$x^2 - 2nx + n^2 - 1 = 0$   
 이  $-(n+1)$      $x=n-1, x=n+1$   
 기  $-(n-1)$   
  
 $A_n B_n = \sqrt{4n^2 + 1} \cdot 2 = 2\sqrt{4n^2 + 1}$   
 $(2,0) \sim 2nx - y = 0 \Rightarrow \frac{4n}{\sqrt{4n^2 + 1}}$   
 $\therefore S_n = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{4n^2 + 1} \left( \frac{4n}{\sqrt{4n^2 + 1}} + 1 \right)$   
 $= 4n + \sqrt{4n^2 + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 4 + 2 = 6$

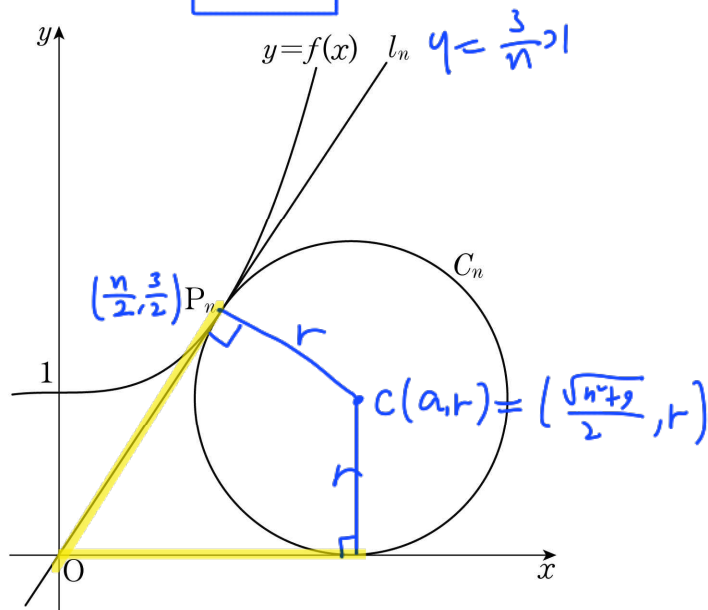
단답형

29. 자연수  $n$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 를

$$f(x) = \frac{4}{n^3}x^3 + 1$$

이라 하자. 원점에서 곡선  $y=f(x)$ 에 그은 접선을  $l_n$ , 접선  $l_n$ 의 접점을  $P_n$ 이라 하자.  $x$ 축과 직선  $l_n$ 에 동시에 접하고 점  $P_n$ 을 지나는 원 중 중심의  $x$ 좌표가 양수인 것을  $C_n$ 이라 하자. 원  $C_n$ 의 반지름의 길이를  $r_n$ 이라 할 때,  $40 \times \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(4r_n - 3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

270



$f'(x) = \frac{12}{n^3}x^2$ ,  $f'(t) = \frac{12}{n^3}t^2$ ,  $P_n(t, \frac{4}{n^3}t^3 + 1)$ ,  
 $\frac{12t^2}{n^3} = \frac{4}{n^3}t^3 + 1$ ,  $\frac{3}{n^3}t^3 = 1$ ,  $t = \frac{n}{2}$ ,  $P_n(\frac{n}{2}, \frac{3}{2})$   
 $OP_n = \frac{\sqrt{n^2+9}}{2}$ ,  $C(\frac{\sqrt{n^2+9}}{2}, r)$   
 $OP_n C = r \Rightarrow (a - \frac{n}{2})^2 + (r - \frac{3}{2})^2 = r^2$   
 $(\frac{\sqrt{n^2+9}-n}{2})^2 = 3r - \frac{9}{4}$   
 $\therefore 4r - 3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{(\sqrt{n^2+9}-n)^2}{4} = \frac{1}{3}(\sqrt{n^2+9}-n)^2 = \frac{27}{(\sqrt{n^2+9}+n)^2}$   
 $\therefore 40 \times \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \times \frac{27}{(\sqrt{n^2+9}+n)^2} = 10 \times 27 = 270$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 와 자연수  $m$ 에 대하여 구간  $(0, \infty)$ 에서 정의된 함수  $g(x)$ 를

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) \left(\frac{x}{m}\right)^n + x}{\left(\frac{x}{m}\right)^n + 1} = \begin{cases} x & \frac{x}{m} < 1 \rightarrow x < m \\ \frac{f(x)}{2} & \frac{x}{m} > 1 \rightarrow x > m \\ \frac{f(m)+m}{2} & \frac{x}{m} = 1 \rightarrow x = m \end{cases}$$

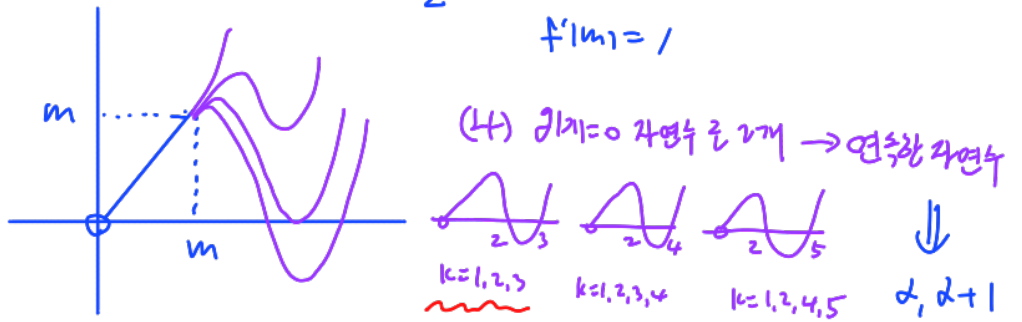
라 하자. 함수  $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수  $g(x)$ 는 구간  $(0, \infty)$ 에서 미분가능하고,  $g'(m+1) \leq 0$ 이다.
- (나)  $g(k)g(k+1) = 0$ 을 만족시키는 자연수  $k$ 의 개수는 3이다.
- (다)  $g(l) \geq g(l+1)$ 을 만족시키는 자연수  $l$ 의 개수는 3이다.

$g(12)$ 의 값을 구하시오. [4점]

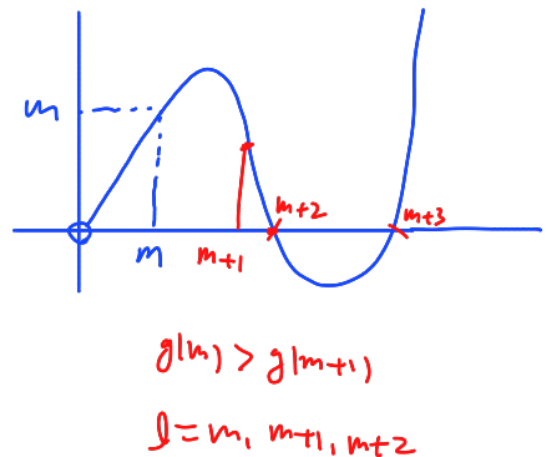
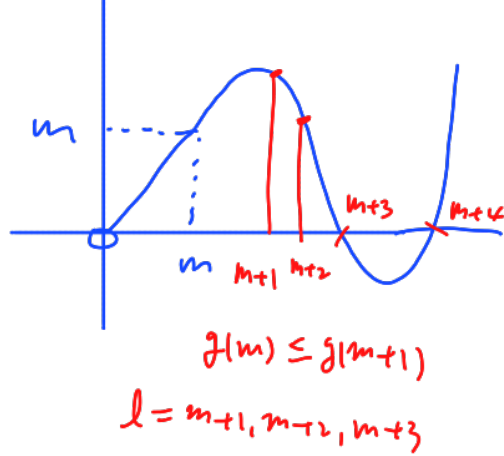
84

$x=m$  미가  $\Rightarrow f(m) = \frac{f(m)+m}{2}$ ,  $f'(m) = 1$



(가)  $g'(m+1) \leq 0$

$f(x) = (x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\alpha-2)$



$f(x) = (x-k)(x-m-3)(x-m-4)$

$f(m) = 12(m-k) = m$

$f'(m) = 12 + (-4)(m-k) + (-3)(m-k-1) = 1$   
 $7(m-k) = 11$

$\frac{12}{7} = \frac{m}{11}$ ,  $m = \frac{132}{7}$  (+)  
 $\therefore$ 은 자연수

$f(x) = (x-k)(x-m-2)(x-m-3)$

$f(m) = 6(m-k) = m$

$f'(m) = 6 + (-5)(m-k) = 1$   
 $5(m-k) = 5$

$\frac{6}{5} = \frac{m}{5}$ ,  $m = 6$ ,  $k = 1$     $f'(m+1) = f'(7) = -4 \leq 0$

$f(x) = (x-5)(x-8)(x-9)$   
 $g(12) = f(12) = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$

- \* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.



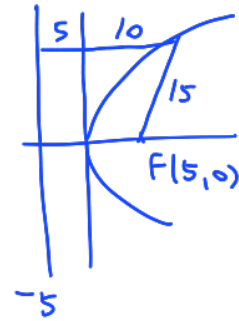
제 2 교시

수학 영역(기하)

5 지선 다형

23. 타원  $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$ 의 두 초점 사이의 거리는? [2점]
- ① 4      ② 5      ③ 6      ④ 7      ⑤ 8

24. 초점이 F인 포물선  $y^2 = 20x$  위의 점 P에 대하여  $\overline{PF} = 15$  일 때, 점 P의 x좌표는? [3점]
- ① 9      ② 10      ③ 11      ④ 12      ⑤ 13



25. 두 초점이  $x$ 축 위에 있고, 두 초점 사이의 거리가 30인 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이  $y = \frac{3}{4}x$ 일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

- ① 16    ② 18    ③ 20    ④ 22    ⑤ 24

$C=15$

$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$

$b=3k, a=4k$

$a^2 + b^2 = 225, k=9, k=3$

$a=12, b=9$

$2a=24$

26. 두 실수  $a, b$ 에 대하여 포물선

$C : (y-a+1)^2 = (a+b)x+1$  (단,  $a+b \neq 0$ )

이 있다. 포물선  $C$ 가 원점을 지나고 초점과 준선 사이의 거리가 2일 때,  $a-b$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 하자.  $M-m$ 의 값은? [3점]

- ① 6    ② 8    ③ 10    ④ 12    ⑤ 14

$(0,0) \rightarrow (a-1)^2 = 1 \quad a=0, 2$

$|2p|=2, |p|=1$

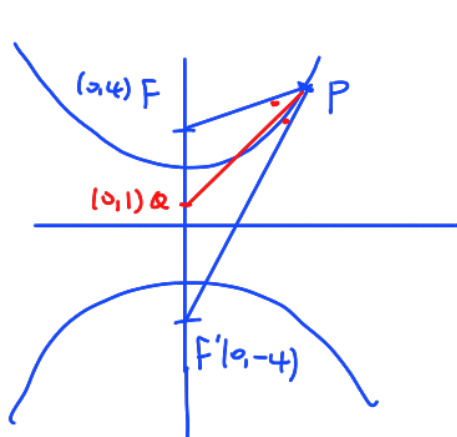
$\left| \frac{a+b}{4} \right| = 1, \quad a+b=4, -4$

$a$	$b$	$a-b$
0	4	-4 = $m$
0	-4	4
2	2	0
2	-6	8 = $M$

$M-m=12$

27. 두 초점이 F, F'인 쌍곡선  $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = -1$  위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 각 FPF'의 이등분선이 점 (0, 1)을 지날 때,  $\overline{FP} + \overline{F'P}$ 의 값은? [3점]

- ① 24    ② 28    ③ 32    ④ 36    ⑤ 40

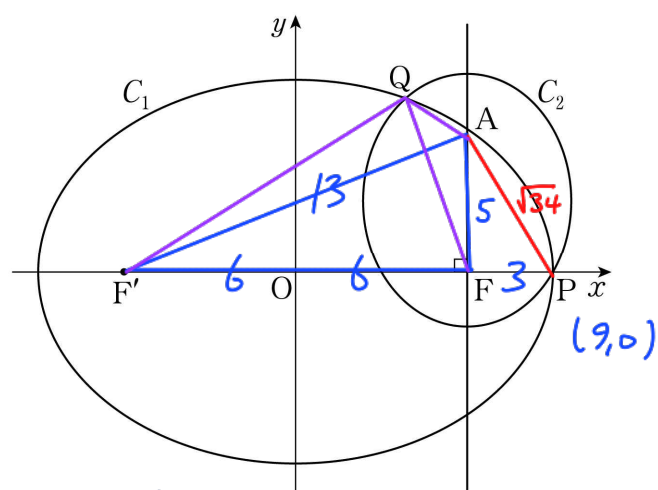


$c^2 = b^2 + a^2$   
 $\overline{FQ} = 3, \overline{F'Q} = 5$   
 $\overline{FQ} : \overline{F'Q} = \overline{PF} : \overline{PF'}$   
 $\overline{PF} = 3k, \overline{PF'} = 5k$   
 $5k - 3k = 6$   
 $k = 3$   
 $\therefore \overline{FP} + \overline{F'P} = 8k = 24$

28. 두 초점이 F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)이고 장축의 길이가 18인 타원을 C<sub>1</sub>이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 타원 C<sub>1</sub>과 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하고, 두 초점이 F, A이고 점 P(9, 0)을 지나는 타원을 C<sub>2</sub>라 하자. 두 타원 C<sub>1</sub>과 C<sub>2</sub>가 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하자.

$\cos(\angle FF'A) = \frac{12}{13}$  일 때,  $\overline{F'Q} - \overline{AQ}$ 의 값은? [4점]

- ①  $14 - \sqrt{34}$     ②  $20 - 2\sqrt{34}$     ③  $15 - \sqrt{34}$   
 ④  $21 - 2\sqrt{34}$     ⑤  $16 - \sqrt{34}$



$\overline{AF'} + \overline{AF} = 18, 12k = 18, k = 1$   
 $\overline{F'A} = 13, \overline{AF} = 5, \overline{F'F} = 12$   
 $\Rightarrow \overline{FQ} = 3, \overline{AP} = \sqrt{34}$

$\overline{F'Q} + \overline{AQ} = 18$   
 $\overline{AQ} + \overline{AQ} = \overline{F'A} + \overline{PF} = 3 + \sqrt{34}$   
 $\overline{F'Q} - \overline{AQ} = 15 - \sqrt{34}$

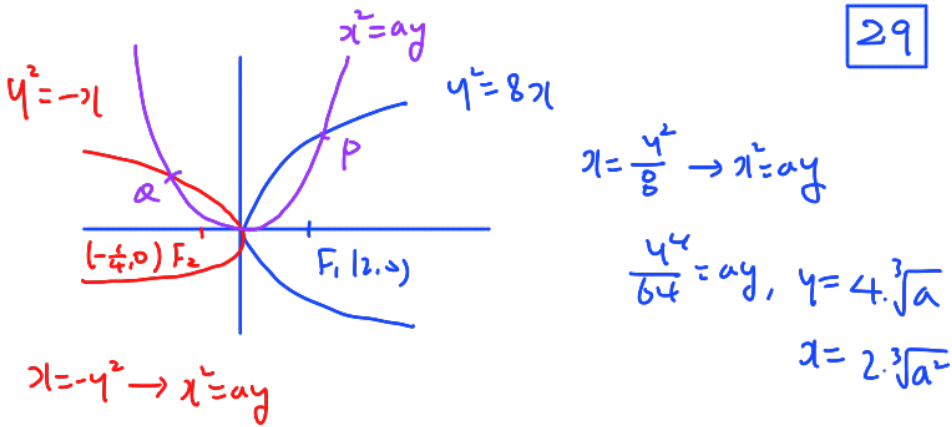
단답형

29. 포물선  $x^2 = ay$  ( $a > 0$ )이 두 포물선

$$C_1: y^2 = 8x, \quad C_2: y^2 = -x$$

와 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 각각 P, Q라 하고, 두 포물선  $C_1, C_2$ 의 초점을 각각  $F_1, F_2$ 라 하자. 직선 PQ의

기울기가  $2\sqrt{2}$  일 때,  $\overline{F_1P} + \overline{F_2Q} = \frac{q}{p}$  이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29

$$y^2 = a, \quad y = \sqrt{a}$$

$$x = -\sqrt{a}$$

$$P(2\sqrt{a}, 4\sqrt{a})$$

$$Q(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$$

$$\left| \frac{y}{x} \right| = \frac{3\sqrt{a}}{3\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{F_1P} = 2 + 2\sqrt{a}$$

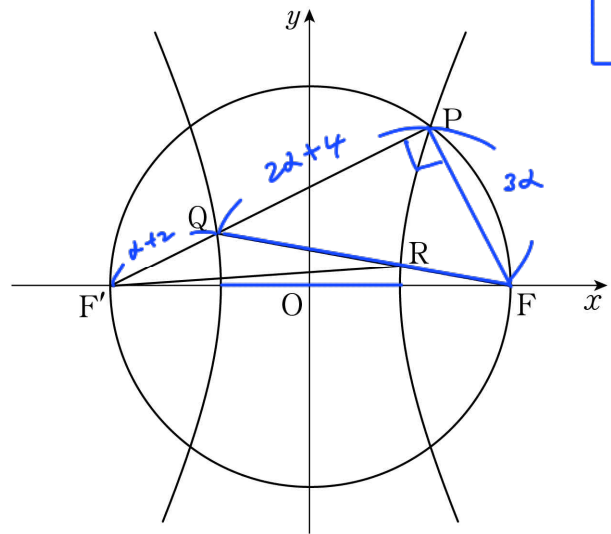
$$\overline{F_2Q} = \frac{1}{4} + \sqrt{a}$$

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2Q} = \frac{9}{4} + 3\sqrt{a}$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{3}{8} = \frac{21}{8} = \frac{p}{q}$$

$$\therefore p+q = 29$$

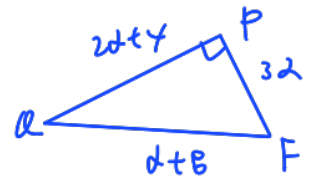
30. 그림과 같이 두 점  $F(c, 0), F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ )을 초점으로 하고 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선이 선분  $FF'$ 을 지름으로 하는 원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 선분  $F'P$ 가 쌍곡선과 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하고, 선분  $FQ$ 가 쌍곡선과 만나는 점 중 점 Q가 아닌 점을 R이라 하자. 점 Q가 선분  $F'P$ 를 1:2로 내분할 때, 삼각형  $QF'R$ 의 넓이를  $S$ 라 하자.  $20S$ 의 값을 구하시오. [4점]



150

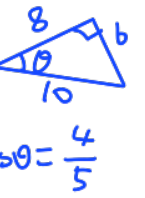
$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 6,$$

$$\overline{PF} = 3d, \quad \overline{PF'} = 3d + 6 \begin{cases} \overline{PQ} = 2d + 4 \\ \overline{QP} = d + 2 \end{cases}$$

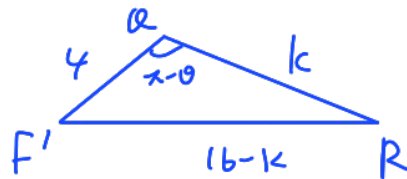


$$\overline{QF} - \overline{QF'} = 6 \rightarrow \overline{QF} = d + 6 \quad (d+6)^2 = (2d+4)^2 + 9d^2$$

$$12d^2 = 48, \quad d = 2$$



$$\overline{QR} = k, \quad \overline{RF} = 10 - k \rightarrow \overline{F'R} = 16 - k$$



$$\|(16-k)^2 = k^2 + 16 - 8k(-\frac{4}{5}), \quad 256 - 32k = \frac{32k}{5} + 16$$

$$\frac{192k}{5} = 240, \quad k = \frac{25}{4}$$

$$\Delta QF'R = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot k \cdot \sin(x-\theta) = \frac{25}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{2} = S \therefore 20S = 150$$

\* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.