19번 문항(2022 시립대 논술기출)

자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$e^2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$$

20번 문항(2022 성균관대 논술기출)

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 한다. $-1<x<0$에서 정의된 곡선 $y=(x+1)^2$위의 점 P에서의 접선을 L이라 하자. 또한, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 원 C와 만나는 두 점 중, x좌표가 음수인 점을 A, x좌표가 양수인 점을 B라고 한다.

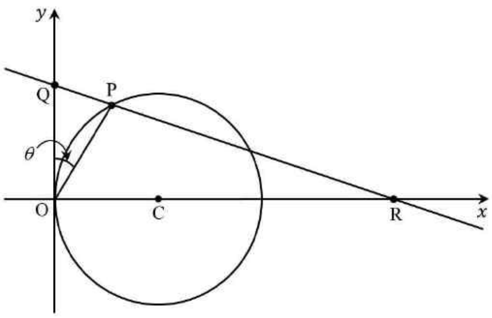
(1) 점 P와 직선 L에 대해서, 원점 O와 점 P를 연결하는 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$일 때,
직선 L이 원 C와 만나는 두 점을 E, F라 하자. $\overline{\mathrm{EF}}^2$을 구하고 그 이유를 논하시오.

(2) 점 P와 직선 L에 대해서, $\overline{\mathrm{OP}}$가 최소가 될 때 직선 L과 선분 OP가 수직임을 보이고
그 이유를 논하시오.

(3) 점 $\mathrm{P}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$와 직선 L에 대해서, $\overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{PB}}$가 최댓값을 가질 때 직선 L과 선분 OP가
수직임을 보이고 그 이유를 논하시오.

21번 문항(2023 성균관대 논술기출)

아래 그림은 중심이 점 $C(2, 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원과 그 위의 점 P를 지나는 직선을 나타낸다.



(가) 점 P는 제1사분면에 있고, y축과 선분 OP가 이루는 예각을 θ라 하자.
(나) 점 Q는 y축 위에 있고, 선분 OQ의 길이는 호 OP의 길이와 같다.
(다) 두 점 P, Q를 지나는 직선이 x축과 만나는 점은 R이다.
(라) 호 OP와 선분 OP로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 삼각형 ORP의 넓이를 S_2, $f(\theta) = \dfrac{S_1 \times S_2}{\theta}$라 하자.

(1) $\angle OCP$의 크기를 θ에 대한 식으로 나타내시오.

(2) S_1을 θ에 대한 식으로 나타내시오.

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$일 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기를 구하시오.

(4) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$일 때, 함수 $f(\theta)$의 최댓값을 구하시오.

22번 문항(2023 부산대 논술기출)

자연수 n에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 함수 $f(x)=x^n e^{1-x}$에 대하여 방정식 $f''(x)=0$의 0이 아닌 두 실근을 α, β라 하자.

$\lim_{n \to \infty}\left\{\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right\}^{\frac{1}{n}}$의 값을 구하시오.

(2) $x \geq 0$에서 부등식 $x^n e^{1-x} \leq n!$이 성립함을 보이시오.

23번 문항(2023 경북대 논술기출)

구간 $(-1, \infty)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\frac{-x^2+n(n+3)x+n}{n(x+1)}$$

에 대하여, 함숫값 $f(k)$가 자연수가 되도록 하는 가장 큰 자연수 k를 a_n이라 하자.

함수 $f(x)$가 $x=b_n$에서 극댓값을 가질 때, 다음 물음에 답하시오. (단, n은 자연수)

(1) $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.

(2) 두 점 $(a_n, f(a_n))$, $(b_n, f(b_n))$을 지나는 직선을 $y=g(x)$라 할 때, 닫힌구간 $[b_n, a_n]$에서

부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립함을 보이시오.

(3) 중심이 $\mathrm{P}(b_n, f(b_n))$인 원 C가 y축에 접할 때, 점 P와 점 $((\sqrt{3}+1)n+\sqrt{3}, 0)$을 지나는

직선과 원 C의 두 교점 중 x좌표가 큰 점을 D, 곡선 $y=f(x)$와 원 C의 두 교점 중

x좌표가 큰 점을 E라 하자. 두 점 P, E 사이의 곡선 $y=f(x)$의 부분과 부채꼴 PDE의

호 DE 및 선분 PD로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$의 값을 구하시오.

(단, 부채꼴 PDE의 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$보다 작다.)

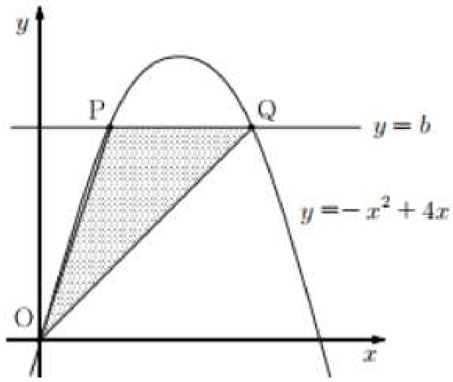
24번 문항(2021 서울과기대 논술기출)

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

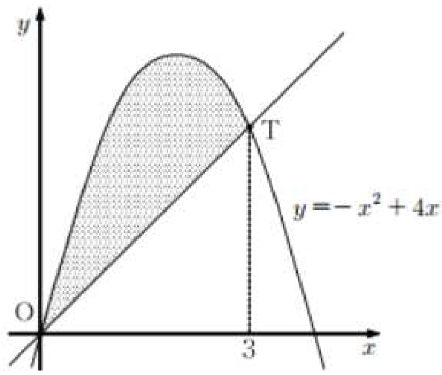
(가) [그림 1]과 같이 $0<b<4$ 일 때, 직선 $y=b$ 와 곡선 $y=-x^2+4x$ 가 만나는 두 교점을 각각 P 와 Q 라 하자. (단, 점 Q 의 x 좌표는 점 P 의 x 좌표보다 크다.)

(나) [그림 2]와 같이 $x=3$ 일 때, 곡선 $y=-x^2+4x$ 위의 점을 T 라 하자.

(다) [그림 1]과 [그림 2]에서 점 O 는 원점이다.



[그림 1]



[그림 2]

(1) [그림 1]에서 삼각형 OPQ 의 넓이가 최대가 되는 점 Q 의 x 좌표가 $u+v\sqrt{w}$ 일 때,
uvw 의 값을 구하시오. (단, u 와 v 는 유리수이고, w 는 소수인 자연수이다.)

(2) [그림 2]에서 곡선 $y=-x^2+4x$ 와 직선 OT 로 둘러싸인 도형이 넓이를 구하시오.

(3) [그림 2]에서 $0<x<3$ 일 때, 곡선 $y=-x^2+4x$ 위의 점 S 와 직선 OT 사이의 거리의
최댓값을 구하시오.

25번 문항(2021 성균관대 논술기출)

다음 <제시문1>~<제시문2>를 읽고 [수학 2-i]~[수학 2-iv]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

$y=\dfrac{2x+1}{2x+2}$의 그래프 위의 임의의 한 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$로부터 원점까지 이르는 거리를 γ이라 하자.

<제시문2>

실수 a,b,c에 대하여 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$가 성립한다.

(1) <제시문1>의 $\alpha,\ \beta$에 대해 $\alpha>-1$일 때, $\alpha-\beta$의 최솟값과 $\alpha<-1$일 때, $\alpha-\beta$의 최댓값을 각각 구하고, 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문1>의 α,β,γ에 대해 $\alpha<-1$일 때, $\alpha-\beta$를 γ에 대한 식으로 나타내고,
그 이유를 논하시오.

(3) <제시문1>의 $\alpha,\ \gamma$, 점 P, 그리고 점 $\mathrm{Q}(-2,2)$에 대해 $\alpha<-1$일 때, 선분 PQ의
길이를 γ에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

(4) <제시문1>의 α와 γ에 대해 $\alpha<-1$일 때, α를 한 근으로 갖는 이차방정식을 $2x^2+b_1x+b_0=0$이라고 하자. 이때, b_0,b_1의 값을 γ에 대한 식으로 표시하고, 그 이유를 논하시오.

26번 문항(2022 시립대 논술기출)

좌표평면에서 곡선 $y=x-x^2$의 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ a-a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b-b^2)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, $0<b<a<1$ 이다.)

(a) 점 B가 곡선에서 두 점 O와 A 사이를 움직일 때, 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값을 a에 대한 식으로 나타내어라.

(b) 두 점 A, B가 곡선에서 두 점 O와 C사이를 움직일 때, 사각형 ABOC의 넓이의 최댓값을 구하여라.

27번 문항(2022 중앙대 논술기출)

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(b, b^2+1)$과 원점 O가 이루는 삼각형 OAB의 넓이가 4라고 하자. 이때 $20(2a+b^2)-(2a+b^2)^2$의 최댓값 M과 최솟값 m을 각각 구하시오. (단, $a \geq 1$이다.)

28번 문항(2022 한양대 모의논술)

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+3}=4$, $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{f(x)}=-\frac{1}{7}$을 만족시킬 때, $-2\le t\le 2$인 t에 대하여 $g(t)=\int_{-t}^{t}f(x)dx$라 하자. $g(t)$의 최솟값을 구하시오.

29번 문항(2020 인하대 논술기출)

(가) 포물선 $y=x^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $y=2x_1x-y_1$이다.

(나) 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$사이의 거리는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

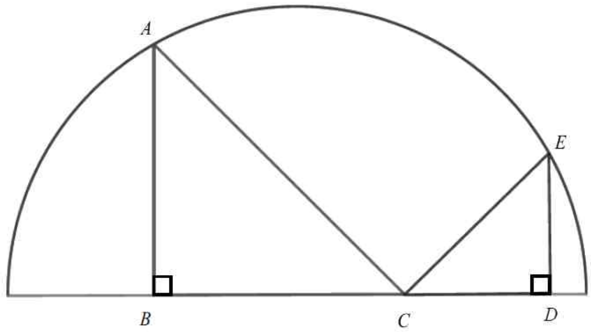
(1) 좌표평면 위의 점 (a, b)를 지나고 포물선 $y=x^2$에 접하는 서로 다른 두 개의 접선이 존재하기 위한 필요충분조건을 a, b에 대한 부등식으로 나타내시오.

(2) 점 (a, b)를 지나고 포물선 $y=x^2$에 접하는 서로 다른 두 개의 접선이 존재한다.

(a) 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(b) 점 (a, b)가 $y=-(x+2)^2$의 그래프 위에 있을 때, 점 (a, b)와 두 접점이 이루는 삼각형의 넓이의 최솟값을 구하시오.

30번 문항(2022 경희대 모의논술)



[그림 2]

반지름이 r인 반원과 두 개의 삼각형이 [그림 2]와 같이 주어져 있다. 삼각형 ABC는 $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이며, 삼각형 CDE는 $\angle \mathrm{CDE}=\frac{\pi}{2}$이고 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DE}}$인 직각이등변삼각형이다. 변 BC와 변 CD는 반원의 지름 위에 있으며, 점 A와 점 E는 반원의 호 위에 있고, 두 삼각형은 한 점 C에서만 만날 때 다음 물음에 답하시오.

(1) 두 삼각형의 넓이의 합의 최댓값을 구하고 그 근거를 서술하시오.

(2) 두 삼각형의 둘레의 길이의 합의 최댓값을 구하고 그 근거를 서술하시오.

31번 문항(2022 중앙대 논술기출)

함수 $f(x)=x+\dfrac{1}{2(x+1)^2}\,(x \geq 0)$과 그 역함수 $f^{-1}(x)$가 있다. 좌표평면 위에서 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선을 l이라 할 때, 직선 l과 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 B라 하자. 두 점 A, B와 원점 O가 이루는 삼각형 OAB의 넓이가 최대가 되게 하는 점 A의 좌표를 구하시오.

32번 문항(2021 인하대 논술기출)

(가) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$$

가 성립한다.

(나) 다음 삼각함수의 극한이 성립한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(다) $\sin^2 x$의 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \ (C\text{는 적분상수})$$

(※) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$는

$$\int_0^x (x^2 - t^2) f(t)dt = x\sin^2 x$$

를 만족한다.

닫힌구간 $[0, 10]$에서 함수 $h(x) = \int_0^x (x^3 - t^3) f(t)\,dt$의 최솟값을 구하시오.

33번 문항(2021 한양대 논술기출)

자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $n^2-12n+37$인 정사각형의 넓이를 a_n, 한 변의 길이가 $2n+1$인 정사각형의 넓이를 b_n이라고 하자. $\frac{a_n}{b_n}$이 최소가 되는 n을 구하고, 이때 $\frac{a_n}{b_n}$의 값을 구하시오.

34번 문항(2020 시립대 모의논술)

좌표평면에서 반지름의 길이가 1이고 중심이 원점 O인 원에서 두 점 P, Q가 움직인다. 시각 t일 때 P, Q가 x축의 양의 방향과 이루는 각은 각각 $4\cos 4t$, $8\cos 2t$이다. 삼각형 OPQ의 넓이가 최대가 되는 t의 개수를 구하여라. (단, $0 \le t \le 2\pi$)

35번 문항(2020 인하대 논술기출)

(가) (정적분과 미분의 관계) 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \text{ (단, } a<x<b)$$

가 성립한다.

(나) (곡선의 볼록) 함수 $f(x)$가 구간 (a,b)에서 이계도함수를 갖고 $f''>0$이면 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하다.

(※) 실수 t에 대하여, 곡선 $y=x(x-t)e^{x^3}$과 직선 $x=0$, $x=2$, x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$라고 하자.

(1) 함수 $S(t)$는 구간 $[2,\infty)$에서 증가함을 보이시오.

(2) $S'(0)<-\frac{2e^8}{25}$임을 보이시오.

(3) $S(t)$가 $t=a$에서 최솟값을 가지면, $a>\frac{3}{2}$임을 보이시오.

36번 문항(2020 중앙대 논술기출)

$g(t)=e^{t^2}\left(t^2+3t+\frac{5}{2}\right)$에 대하여 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=e^{-\int_1^x \frac{g'(t)}{g(t)}dt}$$

이때 함수 $h(x)=\int_1^x f(t)f'(t)\sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt$의 최댓값을 구하시오.

19번 문항 해설

밑이 $e(e>1)$인 로그함수는 구간 $(0,\infty)$에서 증가하는 함수이므로 자연수 n에 대하여

$2\leq(2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$가 성립함을 보이면 충분하다. 구간 $(0,\infty)$에서 함수

$$f(x)=(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

라 하자. 그러면

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}+\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=2$$

이다. 구간 $(0,\infty)$에서 함수 $f(x)$는 미분가능하고

$$f'(x)=2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2x+1}{x^2+x}$$

이므로 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$이다.

구간 $(0,\infty)$에서 $f''(x)=\frac{1}{(x^2+x)^2}>0$이므로 $f'(x)$는 증가함수이다. 따라서 구간 $(0,\infty)$에서 $f'(x)\leq\lim_{t\to\infty}f'(t)=0$이므로 $f(x)$는 감소함수이다. 그러므로 자연수 n에 대하여

$$f(n)\geq\lim_{x\to\infty}f(x)=2$$

20번 문항 해설

정답 : (1) $\frac{23}{8}$ (2) 해설참조 (3) 해설참조

(1) 원점 O와 점 P를 지나는 직선의 방정식 $y=-\frac{1}{2}x$과 곡선 $y=(x+1)^2$을 연립하면

$-\frac{1}{2}x=(x+1)^2$

이를 정리하면 $2x^2+5x+2=0$

이다. 두 개의 해 중 $-1<x<0$을 만족하는 해는

$x=-\frac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

이고 P를 지나는 접선의 방정식은

$y=2\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=x+\frac{3}{4}$

이를 원의 방정식에 대입하면

$32x^2+24x-7=0$

이 방정식의 두 근을 $\alpha,\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 공식에 의해

$\alpha+\beta=-\frac{3}{4},\ \alpha\beta=-\frac{7}{32}$

를 만족하고 점 E, F는

$\mathrm{E}(\alpha,-\sqrt{1-\alpha^2}),\ \mathrm{F}(\beta,\sqrt{1-\beta^2})$

가 된다. 따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{EF}}^2&=(\alpha-\beta)^2+(\sqrt{1-\alpha^2}+\sqrt{1-\beta^2})^2\\&=2-2\alpha\beta+2\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2+\alpha^2\beta^2}\\&=2-2\alpha\beta+2\sqrt{1-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta+\alpha^2\beta^2}\\&=2-2\left(-\frac{7}{32}\right)+2\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2+2\left(-\frac{7}{32}\right)+\left(-\frac{7}{32}\right)^2}\\&=\frac{23}{8}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{P}(p,(p+1)^2)\ (-1<p<0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}^2=p^2+(p+1)^4=p^4+4p^3+7p^2+4p+1$

이다. 따라서 $-1<p<0$에서 정의된 함수 $g(p)$를

$g(p)=p^2+(p+1)^4=p^4+4p^3+7p^2+4p+1$

로 정의하고 함수 $g(p)$의 최솟값을 조사하면 된다. 함수 $g(p)$를 미분하면

$$g'(p)=4p^3+12p^2+14p+4$$

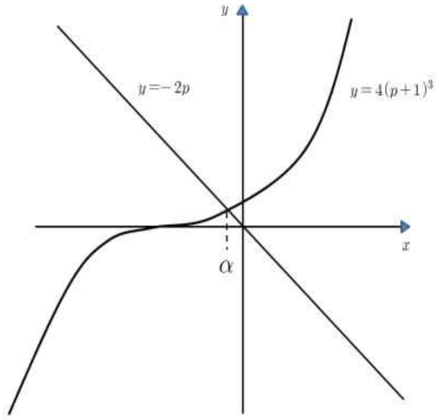
이는

$$g'(p)=4(p+1)^3+2p$$

로 적을 수 있다. 따라서

$$y=4(p+1)^3,\ y=-2p$$

의 교점에서 $g'(p)=0$가 됨을 알 수 있다.
오른쪽 그림과 같이 두 곡선과 직선의 그래프를 고려하면



$4(\alpha+1)^3 = -2\alpha$

인 $0<\alpha<1$가 유일하게 존재함을 알 수 있다.
이로부터 함수의 증감을 조사하면

p		α	
$g'(p)$	$-$	0	$+$
$g(p)$	↘	$g(\alpha)$	↗

따라서 $g(p)$는 α에서 최소가 되고 α는

$\alpha=-2(\alpha+1)^3$을 만족한다. -----①

직선 L의 기울기는 $2(\alpha+1)$이고 직선 OP의 기울기는

$$\frac{0-(\alpha+1)^2}{0-\alpha}=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$$

이므로 ①을 사용하면 L의 기울기와 직선 OP의 기울기의 곱은

$$2(\alpha+1)\times\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}=\frac{2(\alpha+1)^3}{\alpha}=-1$$

이다. 따라서 직선 L과 선분 OP는 수직이다.

(3) 점 $\mathrm{P}(p,(p+1)^2)$라 두면 A, B를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{A}\left(-\sqrt{1-(p+1)^4},\ (p+1)^2\right),\ \mathrm{B}\left(\sqrt{1-(p+1)^4},\ (p+1)^2\right)$$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PB}}&=\left(p+\sqrt{1-(p+1)^4}\right)\left(\sqrt{1-(1+p)^4}-p\right)\\&=1-p^2-(1+p)^4\\&=1-\overline{\mathrm{OP}}^2\end{aligned}$$

이로부터 $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PB}}$가 최대가 될 때는 $\overline{\mathrm{OP}}$가 최소가 될 때임을 알 수 있다.
따라서 (2)번에 의해 $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PB}}$가 최댓값을 가질 때 직선 L과 선분 OP가 수직이다.

21번 문항 해설

정답 : (1) 2θ (2) $S_1 = 2(2\theta - \sin 2\theta)$ (3) $\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$ (4) $6\sqrt{3}$

(1) 삼각형 OCP 는 이등변삼각형이고 $\angle \mathrm{OPC} = \angle \mathrm{POC} = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로

$$\angle \mathrm{OCP} = \pi - \angle \mathrm{POC} - \angle \mathrm{OPC} = 2\theta$$

이다.

(2) 부채꼴 OCP 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2^2 \times 2\theta = 4\theta$$

이고, 삼각형 OCP 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sin 2\theta = 2\sin 2\theta$$

이므로 $S_1 = 2(2\theta - \sin 2\theta)$ 이다.

(3) 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = 2 - 2\cos\frac{\pi}{3} = 1, \ y = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

이고, 점 Q 의 좌표는 $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ 이므로 점 P 와 점 Q 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}}{1 - 0} = \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

이다.

(4) 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = 2 - 2\cos 2\theta, \ y = 2\sin 2\theta$$

이고 점 Q 의 좌표는 $(0, 4\theta)$ 이므로 점 P 와 점 Q 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2\sin 2\theta - 4\theta}{2 - 2\cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta - 2\theta}{1 - \cos 2\theta}$$

이다. 또 점 P 와 점 Q 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{\sin 2\theta - 2\theta}{1 - \cos 2\theta} x + 4\theta$$

이므로 점 R 의 x 좌표는 $x = \frac{4\theta(1 - \cos 2\theta)}{2\theta - \sin 2\theta}$ 이고,

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4\theta(1 - \cos 2\theta)}{2\theta - \sin 2\theta} \times 2\sin 2\theta = \frac{4\theta sin 2\theta(1 - \cos 2\theta)}{2\theta - \sin 2\theta}$$

이다.

따라서

$$f(\theta) = \frac{S_1 \times S_2}{\theta} = 8\sin 2\theta(1 - \cos 2\theta)$$

이다. $f(\theta)$를 θ에 대하여 미분하면

$$f'(\theta) = 16\cos 2\theta(1 - \cos 2\theta) + 16\sin^2 2\theta = 16(1 - \cos 2\theta)(1 + 2\cos 2\theta)$$

인데 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $\cos 2\theta \neq 1$이므로 $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 $f'(\theta) = 0$이다.

$f'(\theta)$의 부호를 조사하여 $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	최대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(\theta)$는 $\theta = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8\sin\frac{2\pi}{3}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = 6\sqrt{3}$$

을 갖는다.

22번 문항 해설

정답 : (1) 64 (2) 해설참조

(1)

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (nx^{n-1} - x^n)e^{1-x}$

$f''(x) = \{n(n-1)x^{n-2} - nx^{n-1}\}e^{1-x} - (nx^{n-1} - x^n)e^{1-x}$

$\quad = x^{n-2}e^{1-x}(x^2 - 2nx + n^2 - n)$

따라서 $f''(x) = 0$을 만족시키는 두 양의 실근 α, β는 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha + \beta = 2n$, $\alpha\beta = n^2 - n$이다.

이때, $f(\alpha) = \alpha^n e^{1-\alpha}$, $f(\beta) = \beta^n e^{1-\beta}$이므로

$f(\alpha)f(\beta) = (\alpha\beta)^n e^{2-\alpha-\beta} = \{n(n-1)\}^n e^{2-2n}$이다.

따라서

$$\left\{\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right\}^{\frac{1}{n}} = \left\{\frac{4n(4n-1)\cdots(2n+1)}{n^n(n-1)^n e^{2-2n}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left\{\frac{1}{e^{2-2n}} \times \frac{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}{n^n} \times \frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{(n-1)^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left\{\frac{1}{e^{2-2n}} \times \left(\frac{3n+1}{n} \times \frac{3n+2}{n} \times \cdots \times \frac{3n+n}{n}\right) \times \left(\frac{2n+1}{n-1} \times \frac{2n+2}{n-1} \times \cdots \times \frac{2n+n}{n-1}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

이고, 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left\{\ln\frac{1}{e^{2-2n}} + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{3n+k}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{2n+k}{n-1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{2n - 2 + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(3 + \frac{k}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(2 + \frac{k}{n}\right) + n\ln\frac{n}{n-1}\right\}$$

이다. 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(3 + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2 + \frac{k}{n}\right) + \ln\frac{n}{n-1}\right\}$$

$$= 2 + \int_2^3 \ln x\,dx + \int_3^4 \ln x\,dx = 2 + \int_2^4 \ln x\,dx$$

$$= 2 + [x\ln x - x]_2^4 = 2 + (4\ln 4 - 4) - (2\ln 2 - 2) = 6\ln 2$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}} = 2^6 = 64$이다.

[별해]

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (nx^{n-1} - x^n)e^{1-x}$

$f''(x) = \{n(n-1)x^{n-2} - nx^{n-1}\}e^{1-x} - (nx^{n-1} - x^n)e^{1-x}$

$\quad = x^{n-2}e^{1-x}(x^2 - 2nx + n^2 - n)$

따라서 $f''(x) = 0$을 만족시키는 두 양의 실근 α, β는 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha + \beta = 2n$, $\alpha\beta = n^2 - n$이다.

이때, $f(\alpha)=\alpha^n e^{1-\alpha}$, $f(\beta)=\beta^n e^{1-\beta}$이므로
$f(\alpha)f(\beta)=(\alpha\beta)^n e^{2-\alpha-\beta}=\{n(n-1)\}^n e^{2-2n}$이다.

따라서 $\left\{\dfrac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right\}^{\frac{1}{n}}=\left\{\dfrac{4n(4n-1)\cdots(2n+1)}{n^n(n-1)^n e^{2-2n}}\right\}^{\frac{1}{n}}$

이고, 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left\{\ln\frac{1}{e^{2-2n}}+\sum_{k=1}^{2n}\ln(2n+k)-n\ln n(n-1)\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left(\frac{2n+k}{n}\times n\right)-\ln n(n-1)+\frac{2n-2}{n}$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\ln\frac{2n+k}{n}+2n\ln n\right)-\ln n(n-1)+\frac{2n-2}{n}$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{2n+k}{n}+\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{3n+k}{n}\right)+2\ln n-\ln n(n-1)+\frac{2n-2}{n}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(3+\frac{k}{n}\right)\right\}+2\ln n-\ln n(n-1)+\frac{2n-2}{n}$$

이다. 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(3+\frac{k}{n}\right)+\ln\frac{n^2}{n(n-1)}+\frac{2n-2}{n}\right\}$$
$$=\int_2^3\ln x\,dx+\int_3^4\ln x\,dx+2=\int_2^4\ln x\,dx+2$$
$$=[x\ln x-x]_2^4+2=(4\ln 4-4)-(2\ln 2-2)+2=6\ln 2$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}{f(\alpha)f(\beta)}\right)^{\frac{1}{n}}=2^6=64$ 이다.

(2) $f'(x)=nx^{n-1}e^{1-x}-x^n e^{1-x}=(n-x)x^{n-1}e^{1-x}$ 이므로
$x\geq 0$ 에서 $f(x)$ 의 증감표는 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

따라서, $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값 $f(n)=n^n e^{1-n}$을 가진다.
이는 $x\geq 0$에서 $f(x)$의 최댓값이 된다.
이제 $n^n e^{1-n}\leq n!$ 임을 보이자.
(i) $n=1$일 때 (좌변) $=1^1e^0=1$, (우변) $=1!=1$이므로 성립한다.
(ii) $n\geq 2$일 때

$y=\ln x$는 증가함수이므로 $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\ln x dx<\ln k$ 이다. (단, $k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

k에 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하여 더하면 $\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln x dx < \sum_{k=2}^{n}\ln k$이다.

좌변을 계산하면, $\int_{1}^{n}\ln x dx = [x\ln x - x]_1^n = n\ln n - n + 1 = \ln n^n e^{1-n}$이고,

우변을 계산하면, $\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n = \ln(n!)$이다.

따라서, $\ln n^n e^{1-n} \le \ln n!$이다. 즉, $n^n e^{1-n} \le n!$이다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의해 $n^n e^{1-n} \le n!$이다. $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

즉, $x^n e^{1-x} \le n^n e^{1-n} \le n!$이다.

[별해 1]

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (n-x)x^{n-1}e^{1-x}$이므로

$x \ge 0$에서 $f(x)$의 증감표는 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

따라서, $f(x)$는 $x = n$에서 극댓값 $f(n) = n^n e^{1-n}$을 가진다.

이는 $x \ge 0$에서 $f(x)$의 최댓값이 된다.

이제 $n^n e^{1-n} \le n!$임을 보이자.

(ⅰ) $n = 1$일 때 (좌변) $= 1^1 e^0 = 1$, (우변) $= 1! = 1$이므로 성립한다.

(ⅱ) $n = k\,(k \ge 1)$일 때, $k^k e^{1-k} \le k!$이 성립한다고 가정하면,

$(k+1)^{k+1}e^{1-(k+1)} = (k+1)^{k+1}e^{1-k}e^{-1}$이고, 가정에서 $e^{1-k} \le \dfrac{k!}{k^k}$이므로

$(k+1)^{k+1}e^{1-k}e^{-1} \le (k+1)^{k+1}\dfrac{k!}{k^k}e^{-1} = (k+1)!\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k e^{-1} = (k+1)!\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k e^{-1}$이다.

$g(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\ (x > 0)$라 두고, 양변에 자연로그를 취하면,

$\ln g(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x\{\ln(x+1) - \ln x\}$이고 미분하면

$\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}$이므로 $g'(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left\{\ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}\right\}$이다.

$h(x) = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}\ (x > 0)$이라 두면

$h'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{-1}{x(x+1)^2} < 0$이고 $\lim_{x\to\infty}h(x) = 0$이므로 $h(x) > 0$이다.

따라서, $g'(x) > 0$이므로 $g(x)$는 증가함수이고 $\lim_{x\to\infty}g(x) = e$이므로 $g(x) < e$이다.

이를 이용하면, $(k+1)^{k+1}e^{1-(k+1)} \le (k+1)!\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k e^{-1} < (k+1)!$

즉, $n = k+1$에서도 성립한다.

(i) 과 (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $n^n e^{1-n} \le n!$ 이다.

따라서, $x^n e^{1-x} \le n^n e^{1-n} \le n!$ 이다.

[별해 2]

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (n-x)x^{n-1}e^{1-x}$ 이므로

$x \ge 0$ 에서 $f(x)$ 의 증감표는 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

따라서, $f(x)$ 는 $x = n$ 에서 극댓값 $f(n) = n^n e^{1-n}$ 을 가진다.

이는 $x \ge 0$ 에서 $x^n e^{1-x} \le n^n e^{1-n}$ $-$ (ㄱ)

이제 $n^n e^{1-n} \le n!$ 임을 보이자.

(i) $n = 1$ 일 때 (좌변) $= 1^1 e^0 = 1$, (우변) $= 1! = 1$ 이므로 성립한다.

(ii) $n = k\,(k \ge 1)$ 일 때, $k^k e^{1-k} \le k!$ 이 성립한다고 가정하자. 모든 $x \ge 0$ 에 대하여 (ㄱ)을 이용하면

$x^{k+1} e^{1-x} = x \times x^k e^{1-x} \le x \times k^k e^{1-k} \le x \times k!$ 가 성립한다. 이때 $x = k+1$ 을 대입하면

$(k+1)^{k+1} e^{1-(k+1)} \le (k+1)!$ 가 성립한다. 즉, $n = k+1$ 에서도 성립한다.

(i) 과 (ii)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $n^n e^{1-n} \le n!$ 이다.

따라서, $x^n e^{1-x} \le n^n e^{1-n} \le n!$ 이다.

23번 문항 해설

정답 : (1) 495 (2) 해설참조 (3) $\frac{\pi}{12}$

(1) 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리기 위하여 도함수 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\frac{-(x+1)^2+(n+1)^2}{n(x+1)^2}$$

이다.

$f'(x)=0$에서 $x=n$ 또는 $x=-n-2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-1)	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$n+1$	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x \ge n$에서 감소하고 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로, $f(k)$가 자연수가 되도록 하는 가장 큰 자연수를 찾기 위해서 우선 x에 대한 방정식 $f(x)=1$의 해가 자연수인지부터 살펴본다. $f(x)=1$에서 $x=n^2+2n$이고 n은 자연수이므로 n^2+2n은 자연수가 되어,

$a_n=n^2+2n$이 된다. 따라서, 구하는 값은 $\sum_{n=1}^{10}(n^2+2n)=495$이다.

(2) 위 (1)번의 표에 의해서 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값 $n+1$을 가지므로, $b_n=n$이고 $f(b_n)=n+1$이다. $a_n=n^2+2n$이고 $f(a_n)=1$이므로 두 점 $(a_n, f(a_n))$, $(b_n, f(b_n))$을 지나는 직선은

$$g(x)=-\frac{1}{n+1}(x-n)+n+1$$

이다.

함수 $l(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면 함수 $l(x)$의 도함수는

$$l'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{-(x+1)^2+(n+1)^2}{n(x+1)^2}+\frac{1}{n+1}=\frac{-(x+1)^2+(n+1)^3}{n(n+1)(x+1)^2}$$

이므로 $n \le x \le n^2+2n$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	n	$\cdots$	$-1+(n+1)\sqrt{n+1}$	$\cdots$	n^2+2n
$l'(x)$	$\frac{1}{n+1}$	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{(n+1)^2}$
$l(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

따라서, $n \le x \le n^2+2n$에서 $l(x)=f(x)-g(x)\ge 0$이므로 $f(x)\ge g(x)$이다.

(3) 원 C와 직선 $y=g(x)$의 두 교점 중 x좌표가 큰 점을 F, 원 C와 직선 $y=n+1$의 두 교점 중 x좌표가 큰 점을 G라 하자. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$보다 작은 부채꼴 PFG의 중심

각과 넓이를 각각 θ_n 과 T_n 이라 하면 $T_n = \frac{1}{2}n^2\theta_n$ 이고

$$\frac{\pi}{12}n^2 - T_n \le S_n \le \frac{\pi}{12}n^2$$

이 성립한다. 또한,

$$\sin\theta_n = \frac{n}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}}, \ \tan\theta_n = \frac{n}{n^2+n}$$

이므로, $\lim_{n\to\infty}\sin\theta_n = \lim_{n\to\infty}\tan\theta_n = 0$ 이고, $\lim_{n\to\infty}\theta_n = 0$ 이다. 따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\theta_n = 0$$

이므로, 부등식

$$\frac{\pi}{12} - \frac{T_n}{n^2} \le \frac{S_n}{n^2} \le \frac{\pi}{12}$$

이 성립하고, 함수의 극한의 대소관계에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2} = \frac{\pi}{12}$ 이다.

24번 문항 해설

정답 : (1) 4 (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{9}{8}$

(1) 점 P 와 Q 의 x 좌표를 각각 $2-\alpha$ 와 $2+\alpha$ 라하고 삼각형 OPQ 의 넓이를 $A(\alpha)$ 라고 하면, 선분 PQ 의 길이는 $2+\alpha-(2-\alpha)=2\alpha$ 이고 높이는 $b=-(2-\alpha)^2+4(2-\alpha)=-\alpha^2+4$ 이므로

$$A(\alpha)=\frac{1}{2}\times 2\alpha\times b=\alpha(-\alpha^2+4)=-\alpha^3+4\alpha$$

이다. $0<\alpha<2$일 때, $A'(\alpha)=-3\alpha^2+4=0$에서 $\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 이다. $0<\alpha<2$에서 $A(\alpha)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

α	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\cdots$	2
$A'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$A(\alpha)$		증가		감소	

따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 일 때, $A(\alpha)$ 가 최대가 되고, 이때, 점 Q 의 x 좌표는

$$2+\alpha=2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

이다. 따라서 $uvw=2\times\frac{2}{3}\times 3=4$ 이다.

[별해]

점 P 와 Q 의 x 좌표를 각각 α 와 β 라고 하면, α 와 β 는 $-x^2+4x=b$ 의 두 근이다. 따라서 $\alpha+\beta=4$ 이므로 $\alpha=4-\beta$ 이다. 여기서 $0<\alpha<2$, $2<\beta<4$ 이다. 삼각형 OPQ 의 넓이를 $A(\beta)$ 라고 하면

$$A(\beta)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(-\beta^2+4\beta)=\frac{1}{2}(2\beta-4)(-\beta^2+4\beta)=-\beta^3+6\beta^2-8\beta$$

이다. $A'(\beta)=-3\beta^2+12\beta-8=0$ 에서 $\beta=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$ 이다. $2<\beta<4$ 에서 $A(\beta)$ 의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

β	2	$\cdots$	$\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	4
$A'(\beta)$		$+$	0	$-$	
$A(\beta)$		증가		감소	

따라서 $\beta=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 최대가 되므로 $uvw=2\times\frac{2}{3}\times 3=4$ 이다.

(2) 점 T 의 좌표는 $(3,3)$이고 직선 OT 의 방정식은 $y=x$ 이므로 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S=\int_0^3(-x^2+4x-x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

[별해]

0 에서 3 까지 곡선 아래의 넓이에서 점 O, 점 T, 점 (3, 0) 으로 이루어진 삼각형의 넓이를 빼면 된다. 따라서 구하는 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S=\int_0^3(-x^2+4x)dx-\frac{1}{2}\times3\times3=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^3-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$

(3) 점 S 에서 접선의 기울기가 1 일 때, 선분 SH 의 길이가 최대이다. $y'=-2x+4=1$ 로부터 $x=\frac{3}{2}$ 일 때, 접선의 기울기가 1 이고 점 S 의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{15}{4}\right)$ 이다. 따라서 이때 선분SH 의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{SH}=\frac{\frac{15}{4}-\frac{3}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{9}{8}\sqrt{2}$$

[별해]

직선 OT 의 방정식은 $x-y=0$ 이다. 점 S 의 좌표를 $(t,\ -t^2+4t)$ 라 하면 선분 SH 의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{SH}=\frac{|t+t^2-4t|}{\sqrt{2}}=\frac{|t^2-3t|}{\sqrt{2}}$$

그런데 $0<t<3$ 이므로

$$\overline{SH}=\frac{-t^2+3t}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right\}$$

이다. 따라서 선분 SH 길이의 최댓값은 $\frac{9}{4\sqrt{2}}=\frac{9}{8}\sqrt{2}$ 이다.

25번 문항 해설

(1) $-2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}$ (2) $\alpha-\beta=-\gamma-1$ (3) $\overline{\mathrm{PQ}}=\gamma-2$ (4) $b_1=2\gamma+2$, $b_0=2\gamma+1$

(1) $\alpha-\beta=\alpha-\dfrac{2\alpha+1}{2\alpha+2}$ 이므로 함수 $f(\alpha)=\alpha-\dfrac{2\alpha+1}{2\alpha+2}$ 로 정의하고, $f(\alpha)$ 의 미분을 계산하면

$f'(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+4\alpha+1}{2(\alpha+1)^2}$ 이 된다. 이로부터 다음과 같은 표를 얻는다.

x	$\cdots$	$-1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	정의되지 않음	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-2-\sqrt{2}$	$\searrow$	정의되지 않음	$\searrow$	$-2+\sqrt{2}$	$\nearrow$

따라서 $\alpha<-1$ 일 때, 최댓값 $f\left(-1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2-\sqrt{2}$ 를 얻고, $\alpha>-1$ 일 때, 최솟값 $f\left(-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2+\sqrt{2}$ 를 얻는다.

[별해]

$\beta=\dfrac{2\alpha+1}{2\alpha+2}$ 로부터 $2(\alpha+1)(\beta-1)=-1$ 을 얻고, $(\alpha+1)(1-\beta)=\dfrac{1}{2}$ 가 성립한다.

따라서 $\alpha>-1$ 이면, $\beta<1$ 이 되고, 산술-기하평균의 관계로부터 다음 부등식을 얻는다.

$\alpha-\beta=(\alpha+1)+(1-\beta)-2\geq 2\sqrt{(\alpha+1)(1-\beta)}-2=2\sqrt{\dfrac{1}{2}}-2=\sqrt{2}-2$

그러므로 α 가 -1 보다 큰 경우에 $\alpha-\beta$ 의 최솟값은 $\sqrt{2}-2$ 가 된다.

따라서 $\alpha<-1$ 이면, $\beta>1$ 이 되고, 산술-기하평균의 관계로부터 다음 부등식을 얻는다.

$-(\alpha-\beta)=(-\alpha-1)+(\beta-1)+2\geq 2\sqrt{(-\alpha-1)(\beta-1)}+2=2\sqrt{\dfrac{1}{2}}+2=\sqrt{2}+2$

그러므로 α 가 -1 보다 작은 경우에 $\alpha-\beta$ 의 최댓값은 $-\sqrt{2}-2$ 가 된다.

(2) $\beta=\dfrac{2\alpha+1}{2\alpha+2}$ 로부터 $2\alpha\beta+2\beta=2\alpha+1$ 을 얻고, 양변에 $\alpha^2+\beta^2$ 을 더하면,

$2\alpha\beta+2\beta+\alpha^2+\beta^2=2\alpha+1+\alpha^2+\beta^2$ 이 된다.

이제 좌변에 $\alpha^2+\beta^2$ 을 남겨놓고, 나머지 항들을 우변으로 이항하면,

$\alpha^2+\beta^2=2\alpha+1+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta-2\beta=(\alpha-\beta+1)^2$ 이 된다.

따라서 $(\alpha-\beta+1)^2=\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ 이 항상 성립한다.

(1)번의 풀이에서 α 가 -1 보다 작은 경우에 $\alpha-\beta$ 의 최댓값은 $-\sqrt{2}-2$ 이므로,

$\alpha-\beta+1$ 의 최댓값은 $-\sqrt{2}-1$ 이 되어 $\alpha-\beta+1$ 은 항상 음수가 된다.

따라서 α 가 -1 보다 작은 경우에 $\alpha-\beta+1=-\gamma$ 이 된다.

그러므로 $\alpha-\beta=-\gamma-1$ 과 같다.

(3) (2)번의 결과로부터 $\alpha-\beta=-\gamma-1$ 이므로, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = (\alpha+2)^2 + (\beta-2)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 4(\alpha-\beta) + 8 = \gamma^2 + 4(-\gamma-1) + 8 = (\gamma-2)^2$
(i)번의 결과로부터 $-\gamma-1 = \alpha-\beta \le -\sqrt{2}-2$ 이므로, $\gamma-2 \ge \sqrt{2}-1 > 0$ 이고,
위의 식에서 $\overline{\mathrm{PQ}} = \gamma-2$가 된다.

(4) (3)번의 결과로부터 $\alpha-\beta = -\gamma-1$ 이고 $\beta = \dfrac{2\alpha+1}{2\alpha+2}$ 이므로, $\alpha - \dfrac{2\alpha+1}{2\alpha+2} = -\gamma-1$ 이 되어 양변에 $2\alpha+2$ 를 곱해주고 정리하면, $2\alpha^2 + (2\gamma+2)\alpha + (2\gamma+1) = 0$ 이 된다.
따라서 $b_1 = 2\gamma+2$, $b_0 = 2\gamma+1$ 이 됨을 알 수 있다.

26번 문항 해설

삼각형 OAB, 삼각형 AOC, 사각형 ABOC의 넓이를 차례로, S_1, S_2, S_3이라 하자. 이때 $S_1=\frac{ab(a-b)}{2}$, $S_2=\frac{a-a^2}{2}$, $S_3=S_1+S_2$이다.

(a) $S_1=\frac{ab(a-b)}{2}=-\frac{a}{2}\left(b-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^3}{8}$이므로 S_1의 최댓값은 $\frac{a^3}{8}$이다.

(b) $S_3=S_1+S_2$, $S_1 \le \frac{a^3}{8}$, $S_2=\frac{a-a^2}{2}$이므로 $S_3 \le \frac{a^3}{8}+\frac{a-a^2}{2}=\frac{a^3-4a^2+4a}{8}$이다.

$f(x)=\frac{x^3-4x^2+4x}{8}$라 하면 $f'(x)=\frac{3x^2-8x+4}{8}=\frac{(3x-2)(x-2)}{8}$이다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	

그러므로 열린구간 $(0,\ 1)$에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{4}{27}$이다. $S_3 \le \frac{4}{27}$이고, $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$일 때 $S_3=\frac{4}{27}$이므로, S_3의 최댓값은 $\frac{4}{27}$이다.

27번 문항 해설

$\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(b, b^2+1)$에 대하여 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times a \times (b^2+1) = 4$이고, $b^2+1 = \frac{8}{a} \geq 1$에서 $1 \leq a \leq 8$임을 알 수 있다.

$t = 2a + b^2$로 놓으면, $t = 2a + \frac{8}{a} - 1$에서 $a=2$일 때 t는 최솟값 7을 갖고, $a=8$일 때 최댓값 16을 갖는다.

따라서 $f(t) = -t^2 + 20t \ (7 \leq t \leq 16)$의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.

$f'(t) = -2t + 20 = 0$에서 $t=10$에서 최댓값 $f(10)$을 가지고, $t=16$에서 최솟값을 가진다. 그러므로, 최댓값 $M = f(10) = 100$, 최솟값 $m = f(16) = 64$이다.

28번 문항 해설

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2+2x+3} = 4$ 로부터 다항함수 $f(x)$는 $f(x) = 4x^2+ax+b$라 할 수 있고,

$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{f(x)} = -\frac{1}{7}$ 로부터 $f(x)$는 $(x+1)$을 인수로 갖는 것을 알 수 있다.

$f(x) = 4(x+1)(x+c)$라 할 때, $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{f(x)} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{4(x+c)} = \frac{1}{4(c-1)} = -\frac{1}{7}$ 이므로

$c = -\frac{3}{4}$ 가 되어 $f(x) = 4x^2+x-3$ 이다.

따라서 $g(t) = \int_{-t}^{t} f(x)dx = \int_{-t}^{t} (4x^2+x-3)dx = \frac{8}{3}t^3 - 6t$ 이다.

$g'(t) = 8t^2 - 6 = 8\left(t^2 - \frac{3}{4}\right)$ 이므로 $g(t)$는 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 에서 극솟값을 갖는다.

$g(-2) = -\frac{28}{3} < -2\sqrt{3} = g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이므로 $g(t)$는 $t = -2$ 에서 최솟값 $g(-2) = -\frac{28}{3}$ 을 갖는다.

29번 문항 해설

(1) 점 (a,b)를 지나고 기울기가 m인 직선은 $y=m(x-a)+b$이다.

직선이 포물선과 접할 조건은 $x^2-mx+(ma-b)=0$이 중근을 가질 때이므로

$$D=m^2-4ma+4b=0$$

서로 다른 접선이 존재한다는 것과 $D=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 것은 같은 말이므로 D의 판별식 $D_D=4a^2-4b>0$이다.

따라서 $a^2>b$가 필요충분조건이 된다.

(2)

(a) (x_1,y_1)과 (x_2,y_2)를 두 접점이라 하자. 제시문 (가)에 의하면, 각 접점에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{y+y_1}{2}=x_1x$, $\dfrac{y+y_2}{2}=x_2x$가 된다.

두 방정식이 (a,b)를 지나므로 (x_1,y_1)과 (x_2,y_2)가 모두 $\dfrac{y+b}{2}=ax$를 만족시킨다.

두 점을 지나는 직선이 유일하게 결정되므로 $\dfrac{y+b}{2}=ax$가 구하고자 하는 직선의 방정식이 된다.

(b) 두 교점의 x좌표는 (a)의 방정식과 $y=x^2$의 연립방정식의 근이므로 $x^2-2ax+b=0$을 만족한다. 따라서 근과 계수의 관계에 의해서 $|x_1-x_2|=\sqrt{4a^2-4b}$가 되고, (a)의 직선의 기울기가 $2a$이므로 피타고라스 정리에 의해서 두 교점사이의 거리는 $\sqrt{4a^2-4b}\sqrt{1+4a^2}$이 된다.

제시문 (나)에 의해서, (a,b)에서 (a)의 직선까지의 거리는 $\dfrac{|2b-2a^2|}{\sqrt{1+4a^2}}$이므로 삼각형의 넓이는 $2\left(\sqrt{a^2-b}\right)^3$이 된다. $b=-(a+2)^2$을 만족하므로 삼각형의 넓이의 최솟값은

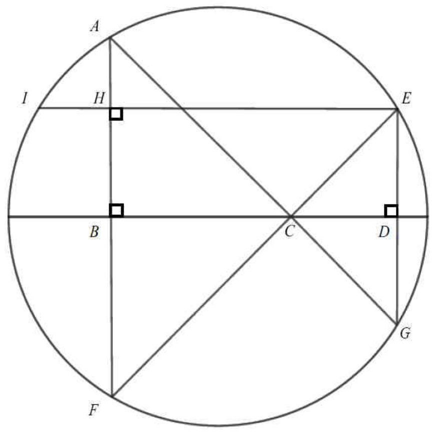
$$2\left(\sqrt{a^2+(a+2)^2}\right)^3=2\left(\sqrt{2a^2+4a+2+2}\right)^3\ge 4\sqrt{2}$$

가 된다.

30번 문항 해설

(1)

대칭성에 의해 $\overline{AB} \geq \overline{DE}$일 때를 생각하면 충분하다. 오른쪽 그림과 같이 반원의 호를 연장하여 얻은 원에 대하여, 선분 AC의 연장선이 원과 만나는 점을 G, 선분 CE의 연장선이 원과 만나는 점을 F라 하자. 점 E를 지나고 선분 CD에 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 H, 이 직선이 원과 만나는 또 하나의 점을 I라 하자.



삼각형 AFI와 삼각형 EFI는 원에 내접하고 변 FI를 공통으로 가지고 있으므로 $\angle \mathrm{IAF} = \angle \mathrm{IEF} = \frac{\pi}{4}$이다. 따라서

삼각형 AHI는 $\angle \mathrm{AHI} = \frac{\pi}{2}$이고 $\angle \mathrm{IAH} = \frac{\pi}{4}$인

직각이등변삼각형이므로 $\overline{AH} = \overline{HI}$이다.

$\overline{AB} = \overline{BC} = a$, $\overline{CD} = \overline{DE} = b$라 하면, $\overline{HI} = \overline{AH} = a-b$, $\overline{EH} = a+b$이므로 $\overline{EI} = 2a$이고,

$\overline{EG} = 2b$이다. 또한 $\angle \mathrm{IEG} = \frac{\pi}{2}$이므로, 삼각형 IEG는 원에 내접하는 직각삼각형이다.

따라서 선분 GI는 원의 중심을 지나므로 $\overline{GI} = 2r$이며, $(\overline{EI})^2 + (\overline{EG})^2 = (\overline{GI})^2$이다.

따라서 $a^2 + b^2 = r^2$이고, 두 삼각형의 넓이의 합은 $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{r^2}{2}$으로 항상

일정하므로, 두 삼각형의 넓이의 합의 최댓값은 $\frac{r^2}{2}$이다.

(2)

(1)에서 $a^2 + b^2 = r^2$이고 $a,\ b \geq 0$이므로 $a = \sqrt{r^2 - b^2}$이다. 따라서 두 삼각형의 둘레의 길이의 합을 b로 표현하면 $f(b) = (2 + \sqrt{2})(b + \sqrt{r^2 - b^2})$이다. 한편 $\overline{CD} = b$일 때, $0 \leq \sqrt{2}b \leq r$이므로, $0 \leq b \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$이다.

$0 < b < \frac{r}{\sqrt{2}}$인 경우 $f'(b) = (2 + \sqrt{2})\left(1 - \frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}}\right) > 0$이므로 $f(b)$는 $0 \leq b \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$에서 증가함수이다. 따라서 $f\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = (2 + 2\sqrt{2})r$이 최대이고, 두 삼각형의 둘레의 길이의 합의 최댓값은 $(2 + 2\sqrt{2})r$이다.

31번 문항 해설

곡선 $f(x)=x+\frac{1}{2(x+1)^2}$ 위의 점 $\mathrm{A}\left(a, a+\frac{1}{2(a+1)^2}\right)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $y=-(x-a)+a+\frac{1}{2(a+1)^2}$이다. 이 직선과 원점 사이의 거리는 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2a+\frac{1}{2(a+1)^2}\right)$이고 선분 AB의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{2}(a+1)^2}$이다. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(a)$라고 하면, $S(a)=\frac{1}{4}\left(2a+\frac{1}{2(a+1)^2}\right)\frac{1}{(a+1)^2}$이다.

$S(a)$의 최댓값을 구하기 위해 도함수 $S'(a)=\frac{-a^3-a^2+a}{2(a+1)^5}$를 찾고, 넓이 $S(a)$는 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$에서 최댓값을 가진다. 즉, 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$에서 최댓값을 갖는다.

32번 문항 해설

$h'(x)=3x^2\int_0^x f(t)dt=\frac{3}{2}x\frac{d}{dx}(x\sin^2 x)=\frac{3}{2}x\sin x(\sin x+2x\cos x)$ 이다.

$h'(x)$는 $\sin x=0$이거나 $\tan x=-2x$일 때 $h'(x)$의 부호가 바뀌고 극값을 갖는다.
곡선 $y=\tan x$와 직선 $y=-2x$를 그려보면 $0<x<\pi$, $\pi<x<2\pi$, $2\pi<x<3\pi$일 때 각각 1개씩, 모두 3개의 교점을 갖는다.
그러므로 함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	a_1	$\cdots$	π	$\cdots$	a_2	$\cdots$	2π	$\cdots$	a_3	$\cdots$	3π	$\cdots$	10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

$$h(n\pi)=\int_0^{n\pi}\frac{3}{2}x\frac{d}{dx}(x\sin^2 x)dx=\left[\frac{3}{2}x^2\sin^2 x\right]_0^{n\pi}-\int_0^{n\pi}\frac{3}{2}x\sin^2 x\,dx$$

$$=-\int_0^{n\pi}\frac{3}{2}x\sin^2 x\,dx$$

$$=-\frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}\right]_0^{n\pi}=-\frac{3n^2\pi^2}{8}$$

이므로, $h(x)$는 구간 $[0, 10]$에서 최솟값 $h(3\pi)=-\frac{27}{8}\pi^2$을 가진다.

33번 문항 해설

양의 실수 x에 대하여 $f(x)=\dfrac{(x^2-12x+37)^2}{(2x+1)^2}$ 이라고 하자. 이 때, 도함수 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\frac{2(x^2-12x+37)(2x-12)(2x+1)^2-4(x^2-12x+37)^2\,2\,(2x+1)\,2}{(2x+1)^4}$$

$$=\frac{4(x^2-12x+37)\{(x-6)(2x+1)-(x^2-12x+37)\}}{(2x+1)^3}=\frac{4(x^2-12x+37)(x^2+x-43)}{(2x+1)^3}$$

이 때, $x^2-12x+37=(x-6)^2+1>0$이고, $x>0$일 때 $(2x+1)^3>0$이므로 도함수 $f'(x)$의 부호는 x^2+x-43에 의해 결정된다. $x^2+x-43=0$의 $x>0$의 근을 구하면 $x=\dfrac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 이다. $0<x<\dfrac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 일 때 $f'(x)<0$이고 $x>\dfrac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 일 때 $f'(x)>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 에서 $f(x)$가 최소가 되는 것을 알 수 있다.

$13<\sqrt{173}<14$를 이용하면 $6<\dfrac{-1+\sqrt{173}}{2}<\dfrac{13}{2}<7$임을 알 수 있다.

따라서 $n=6$ 또는 $n=7$인 경우 $\dfrac{a_n}{b_n}$가 최소가 된다. $\dfrac{a_6}{b_6}=\dfrac{1}{13^2}<\dfrac{4}{15^2}=\dfrac{a_7}{b_7}$ 이므로

$n=6$일 때 최솟값 $\dfrac{a_6}{b_6}=\dfrac{1}{13^2}$ 을 갖는다.

(참고) $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{(n^2-12n+37)^2}{(2n+1)^2}=\left(\dfrac{n^2-12n+37}{2n+1}\right)^2$ 이므로 $\dfrac{a_n}{b_n}$이 최소가 되려면

$\dfrac{n^2-2n+37}{2n+1}$ 이 최소가 되어야 한다. $f(x)=\dfrac{x^2-12x+37}{2x+1}$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{(2x-12)(2x+1)-(x^2-12x+37)\times 2}{(2x+1)^2}=\frac{2(x^2+x-43)}{(2x+1)^2}=0$$

을 만족하는 $x>0$의 근 $x=\dfrac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 에서 극소이면서 최솟값을 갖는다.

34번 문항 해설

[예시답안1]

시각 t 일 때 삼각형 OPQ 의 넓이는 $\frac{1}{2}|\sin(4\cos 4t - 8\cos 2t)|$ 이다.

$f(t) = 4\cos 4t - 8\cos 2t$ 라 하면

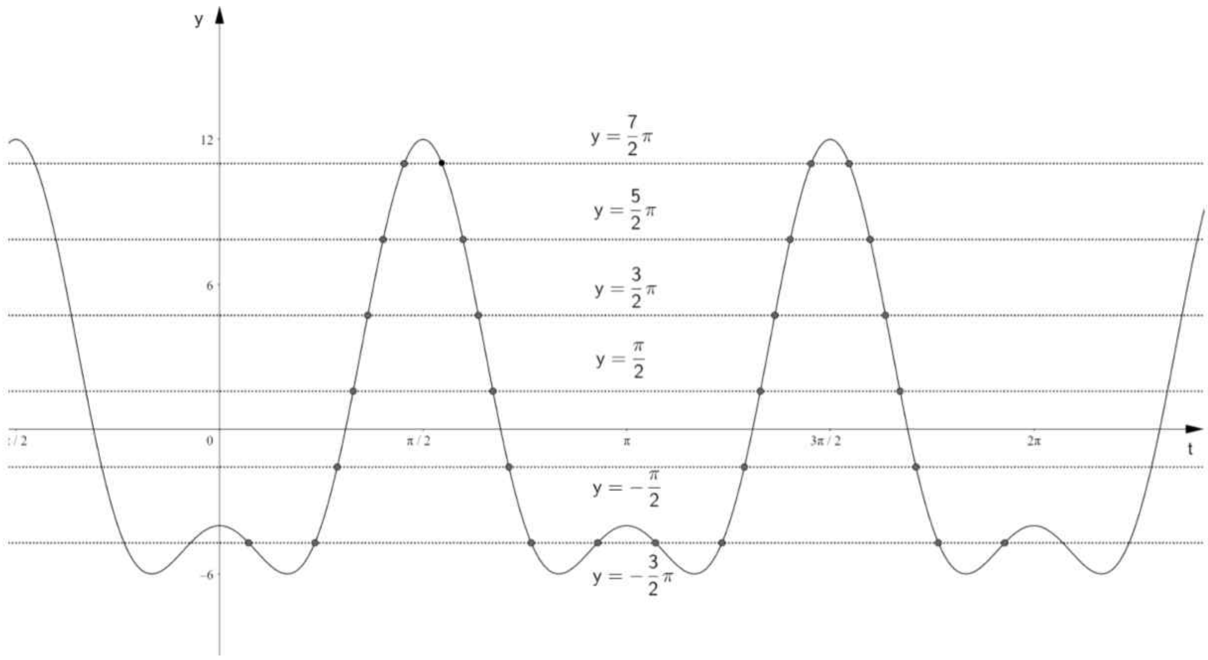
$f'(t) = -16\sin 4t + 16\sin 2t = -32\sin 2t\cos 2t + 16\sin 2t = -16\sin 2t(2\cos 2t - 1)$ 이다.

$f'(t) = 0$ 이면 $\sin 2t = 0$ 또는 $\cos 2t = \frac{1}{2}$ 이다.

$\sin 2t = 0$ 에서 $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ 이고 $\cos 2t = \frac{1}{2}$ 에서 $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ 이다.

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(t)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$f(t)$	-4	↘	-6	↗	12	↘	-6	↗	-4	↘	-6	↗	12	↘	-6	↗	-4

$y = f(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



삼각형 OPQ 의 넓이는 $f(t) = \frac{(2n+1)}{2}\pi\,(n = -2, -1, 0, 1, 2, 3)$을 만족하는 t 에서 최댓값을 갖는다. 그래프 개형에서 교점의 개수를 세면 총 28개 이다.

[예시답안2]

시각 t 일 때 삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\left|\sin(4\cos 4t - 8\cos 2t)\right|$ 이다.

$x = \cos 2t$ 라 하면 $\cos 4t = 2x^2 - 1$ 이므로 $4\cos 4t - 8\cos 2t = 8x^2 - 8x - 4$ 이다.

$f(x) = 8x^2 - 8x - 4 = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 6$ 라 하면 $f(-1) = 12$, $f(1) = -4$ 이고

$\frac{7}{2}\pi < 12 < \frac{9}{2}\pi$,

$4 < \frac{3}{2}\pi < 5$, $7 < \frac{5}{2}\pi < 8$ 이므로 $[-1, 1]$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = \frac{(2n+1)}{2}\pi$ 가 만나도록 하는 정수 n 의 값과 교점의 개수는 $n = -2$ 일 때 2이고 $n = -1, 0, 1, 2, 3$ 일 때 각각 1로 교점은 모두 7개이고 교점의 x 좌표의 절댓값은 1보다 작다.

또 $0 \le t \le 2\pi$ 에서 $|a| < 1$ 에 대하여 $\cos 2t = a$ 인 t 는 모두 4개다.

따라서 구하는 값은 $7 \times 4 = 28$ 이다

35번 문항 해설

(1) 정의에 의하여 $S(t)=\int_0^2 |x-t| xe^{x^3}dx$ 이다. $t \geq 2$ 이면

$$S(t)=\int_0^2 (t-x)xe^{x^3}dx = t\int_0^2 xe^{x^3}dx - \int_0^2 x^2e^{x^3}dx$$

이므로, $S(t)$ 는 증가한다.

(2) 마찬가지로 $t<0$ 일 때,

$$S(t)=\int_0^2 (x-t)xe^{x^3}dx = \int_0^2 x^2e^{x^3}dx - t\int_0^2 xe^{x^3}dx$$

이므로 $S'(0)=-\int_0^2 xe^{x^3}dx$ 이다. $y=xe^{x^3}$ 은

$$y'=(1+3x^3)e^{x^3},\ y''=(12x^2+9x^5)e^{x^3}$$

이므로, $x>0$ 일 때 곡선 $y=xe^{x^3}$ 은 아래로 볼록하다. 곡선 $y=xe^{x^3}$ 의 $x=2$ 에서 접선을 구해보면 $y-2e^8=25e^8(x-2)$ 이다. 곡선이 아래로 볼록하므로

$$\int_0^2 xe^{x^3}dx = \int_0^{\frac{48}{25}} xe^{x^3}dx + \int_{\frac{48}{25}}^2 xe^{x^3}dx > \int_{\frac{48}{25}}^2 \left[25e^8(x-2)+2e^8\right]dx = \frac{2e^8}{25}$$

이다. 따라서 $S'(0)<-\frac{2e^8}{25}$ 이다.

(3) $0<t<2$ 일 때, $S(t)=\int_0^2 |x-t|xe^{x^3}dx = \int_0^t (t-x)xe^{x^3}dx + \int_t^2 (x-t)xe^{x^3}dx$ 이므로 $S'(t)=\int_0^t xe^{x^3}dx - \int_t^2 xe^{x^3}dx$ 이고 $S''(t)=2te^{t^3}>0$ 이다. (2-2)의 결과를 이용하면

$$S'\left(\frac{3}{2}\right)=\int_0^{\frac{3}{2}} xe^{x^3}dx - \int_{\frac{3}{2}}^2 xe^{x^3}dx < \frac{3}{2}\times\frac{3}{2}e^{\frac{27}{8}} - \frac{2}{25}e^8 < \frac{9}{4}e^4 - \frac{2}{25}e^8 < 0$$

이므로 $0<t<\frac{3}{2}$ 일 때 $S'(t)<0$ 이다. 또한 $t \leq 0$ 일 때 $S(t)=\int_0^2 x^2e^{x^3}dx - t\int_0^2 xe^{x^3}dx$ 이므로 $t<\frac{3}{2}$ 일 때, $S(t)$ 는 감소한다. 따라서 $S(t)$ 는 $t=a>\frac{3}{2}$ 에서 최솟값을 갖는다.

36번 문항 해설

$-\int_1^x \frac{g'(t)}{g(t)}dt = -\int_1^x (\ln g(t))' dt = \ln\frac{g(1)}{g(x)}$ 이므로 $f(x) = \frac{g(1)}{g(x)}$ 이다.

그리고 $h(x) = \int_1^x f(t)f'(t)\sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt = \int_1^x \left(\frac{1}{3}(\{f(t)\}^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)' dt$ 이므로

$h(x) = \frac{1}{3}(\{f(x)\}^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(\{f(1)\}^2+1)^{\frac{3}{2}}$ 이고 h 의 최댓값은 f 의 최댓값에서 나온다. 그리고 $f(x)$ 의 최댓값은 $g(x)$ 의 최솟값에서 얻어진다. 미분하여 정리하면

$$g'(x) = e^{x^2}(2x^3+6x^2+7x+3) = e^{x^2}(x+1)(2x^2+4x+3)$$

이므로 $g(-1)$ 에서 최솟값을 갖는다. 따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{g(1)}{g(-1)} = 13$ 이다.

h 의 최댓값은 $h(-1) = \frac{1}{3}(\{f(-1)\}^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(\{f(1)\}^2+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{170^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{3}$ 이다.