2025학년도 대학수학능력시험 대비 응애 모의고사 1회 빠른 정답

공통 과목						선택 과목		
						미적분		
문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점
1	②	2	12	⑤	4	23	②	2
2	②	2	13	②	4	24	③	3
3	③	3	14	①	4	25	④	3
4	①	3	15	①	4	26	①	3
5	④	3	16	96	3	27	⑤	3
6	①	3	17	5	3	28	②	4
7	⑤	3	18	271	3	29	100	4
8	②	3	19	2	3	30	16	4
9	③	4	20	13	4			
10	③	4	21	60	4			
11	④	4	22	91	4			

<총평>

의도한 난이도는 다음과 같다.

공통 객관식 : 보통
공통 주관식 : 조금 어려움
미적분 : 보통

1컷은 88 정도가 될 것 같다.

4점 문제들의 난이도를 크게 튀지 않도록 냈다.
크게 어려운 문제는 딱히 없지만 연습이 안 되어있다면
13번, 29번 등에서 계산 때문에 턱턱 막히지 않았을까 싶다.

공통의 두 과목 간, 그리고 세 과목의 대단원 간 출제 균형을
맞추려 노력했다. 또한 모든 중단원에서 최소 한 문제씩
출제하면서 같은 대단원끼리 연속된 문제로 배치되지 않도록
했다.

대단원 별 출제된 번호와 배점은 다음과 같다.

과목	단원	문항 번호(배점)
수학I	I. 지수함수와 로그함수	1(2), 7(3), 13(4), 17(3)
	II. 삼각함수	3(3), 12(4), 21(4)
	III. 수열	5(3), 9(4), 15(4), 18(3)
	총 11문항 37점	
수학II	I. 함수의 극한과 연속	4(3), 11(4), 19(3)
	II. 다항함수의 미분법	2(2), 8(3), 14(4), 22(4)
	III. 다항함수의 적분법	6(3), 10(4), 16(3), 20(4)
	총 11문항 37점	
미적분	I. 수열의 극한	25(3), 29(4)
	II. 미분법	23(2), 26(3), 28(4)
	III. 적분법	24(3), 27(3), 30(4)
	총 8문항 26점	

24학년도 평가원의 기조를 반영한 점은 다음과 같다.

1. ‘킬러 문항’에 관한 교육부의 방침에 따라, 각 문제를 푸는 데 필요한 개념이 3개를 넘지 않도록 했다.
(교육부에서는 3개도 많다고 했지만...)

2. 문제 풀이에 필요한 계산의 양을 늘리면서, 사교육에서 접할 수 있는 스킬들(ex. 삼차함수의 비율관계) 없이도 풀 수 있게끔 노력했다.

3. 24학년도 수능을 반영하여, 찍으면 틀리게끔 객관식 선지를 5/6/4/3/3으로 배치했다. 대신, 각 선지에 배치된 점수를
10~18점으로 크게 벗어나지 않게끔 했다.

9. $(a_5)^2 = 25$는 한 번만 더해야 한다...
또한 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이 아님에 주의하자.

<15학년도 사관학교 A형 25번>

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=2n^2-n$$

을 만족시킨다. $a_{10}+a_{11}=20$일 때, a_9+a_{12}의 값을 구하시오. [3점]

10. 대입하고, 미분하고, 최고차항을 확인하자.

<22학년도 9월 모평 11번>

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)dt$일 때, $a+f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

<2025학년도 수능특강 수학II 부정적분과 정적분 Level 1 9번>

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = f(x) + x^3 + ax$$

를 만족시킬 때, $f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[ebsi 240090145]

11. 함수의 곱의 연속성에 관한 문제.
손풀이에서는 함수 $g(x)$가 연속일 때, 불연속일 때를 나눠서 따졌는데, 굳이 이렇게 나눌 필요는 없다.
또한, 함수 $f(x)$를 곱하여 함수 $f(x)g(x)$가 <u>정말로</u> 연속이 되도록 만들어 줄 수 있을까? 범위가 문제가 되지는 않는가?

<16학년도 수능 A형 27번>

두 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & (x \le a) \\ x^2 - x & (x > a) \end{cases}, \quad g(x) = x - (2a+7)$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. [4점]

<20학년도 6월 모평 나형 15번>

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+3 & (x<0) \\ -2x+2 & (x\ge 0) \end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x & (x<a) \\ 2x-1 & (x\ge a) \end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

12. 삼각함수의 각변환은 자유자재로 다룰 수 있어야 한다.

<24학년도 9월 모평 9번>

$0\le x\le 2\pi$일 때, 부등식

$$\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha\le x\le\beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$ ④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$

<22학년도 경찰대 19번> (도전!)

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & (\cos x \geq \sin x) \\ \sin x & (\cos x < \sin x)\end{cases},$$

$$g(x)=\cos ax \ \ (a\text{는 } a>0\text{인 상수})$$

이다. 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 a의 최솟값을 p라 하자. 닫힌구간 $\left[0, \frac{11}{12}\pi\right]$에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=\cos px$의 교점의 개수를 q라 할 때, $p+q$의 값은? [5점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

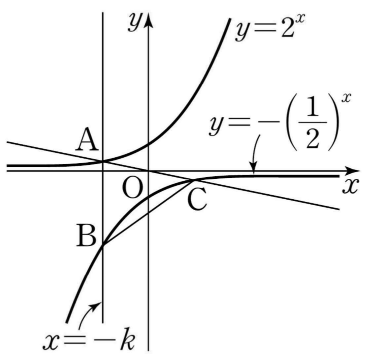
13. 무게중심 G의 x좌표, y좌표 각각이 세 점 A, B, P의 x좌표의 평균, y좌표의 평균이 됨을 이용해도 좋고, 선분 AB의 중점 M에 대하여 선분 PM을 $2:1$로 내분하는 점이 G임을 이용해도 좋다.

치환을 통해 방정식을 풀 때는 항상 범위를 주의하자.
또한, G의 y좌표를 t로 치환했을 때 P의 y좌표를 직접 세제곱해서 구할 필요가 없고 t에 대한 일차식으로 간단히 나타낼 수 있다. 손풀이를 잘 생각해보자.

다음의 수능특강 문제를 참고했다.

<2025학년도 수능특강 수학I 지수함수와 로그함수 예제 2번>

직선 $x=-k\,(k>0)$이 두 함수 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, O를 지나는 직선이 함수 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자.
삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-1,\,a)$일 때, 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $-\frac{5}{3}$ ② -2 ③ $-\frac{7}{3}$ ④ $-\frac{8}{3}$ ⑤ -3

<21년 고1 9월 학평 14번>

이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{1}{\alpha^2+3\alpha+3}+\frac{1}{\beta^2+3\beta+3}$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ -1

<22학년도 수능 13번>

두 상수 a, $b\,(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

<24학년도 사관학교 15번>

0이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \log_4(-x) & (x<0) \\ 2-\log_2 x & (x>0) \end{cases}$$

이 있다. 직선 $y=a$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, $x_2\,(x_1<x_2)$라 하고, 직선 $y=b$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 두 점 C, D의 x좌표를 각각 x_3, $x_4\,(x_3<x_4)$라 하자. $\left|\dfrac{x_2}{x_1}\right|=\dfrac{1}{2}$이고 두 직선 AC와 BD가 서로 평행할 때, $\left|\dfrac{x_4}{x_3}\right|$의 값은? (단, a, b는 $a\neq b$인 상수이다.) [4점]

① $3+3\sqrt{3}$ ② $5+2\sqrt{3}$ ③ $4+3\sqrt{3}$
④ $6+2\sqrt{3}$ ⑤ $5+3\sqrt{3}$

14. 정수 조건의 부정방정식은

(첫번째 변수에 대한 식)×(두번째 변수에 대한 식)=(정수)

와 같은 꼴로 변형한 후 정수를 대입해보자.

또한 각각의 식이 각 변수에 대한 일차식인 경우,
유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 위의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점으로 생각해볼 수 있겠다.
(풀이 아이디어 제공해준 aroo 님 감사합니다.)

<22학년도 9월 모평 13번>

첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

(가) $\lvert a_m \rvert = \lvert a_{m+3} \rvert$인 자연수 m이 존재한다. (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

<24학년도 수능 14번>

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-} g(t)+\lim_{t\to k+} g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

15. 무지성 역방향도 주의해야 할 부분이다.
어디서 출발할지, 어느 방향으로 진행할지 잘 생각하자.

<24학년도 6월 모평 15번>

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

<24학년도 9월 모평 12번>

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2 + a_4 = 40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

<22년 3월 학평 20번>

수열 $\{a_n\}$은 $1<a_1<2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n & (a_n<0) \\ a_n-2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

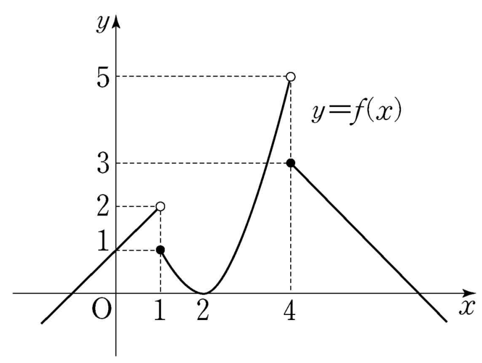
을 만족시킨다. $a_7=-1$일 때, $40\times a_1$의 값을 구하시오. [4점]

19. 함수 $g(f(x))$의 극한은 $f(x)$를 변수 t로 생각하고
함수 $g(t)$의 극한을 구하면 된다.
함수 $f(f(x))$의 연속성이 아니라 극한의 존재성에 대해 물어보고 있음에 주의하자.

그래프를 그려줄 지 고민을 좀 했는데,
출제의도가 '함수의 극한을 그래프를 이용해 이해하기'니까
그려주기로 했다.

<11학년도 6월 모평 가형 7번>

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

20. $f(x)=3x^2+ax+b$로 두고 부정적분을 구해서 미정계수법으로 풀어도 좋고, $F'(x)=G'(x)=f(x)$임을 이용하여 두 방정식 $F'(x)=0$과 $G'(x)=0$의 근이 일치하도록 인수를 적절히 쪼개도 좋다.

<20학년도 수능 나형 28번>

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x f(t)dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.
(나) $\int_0^2 f(x)dx=5\int_{-1}^1 xf(x)dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

<18학년도 9월 모평 나형 29번>

두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

<24학년도 9월 모평 22번>

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{1}^{x} f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

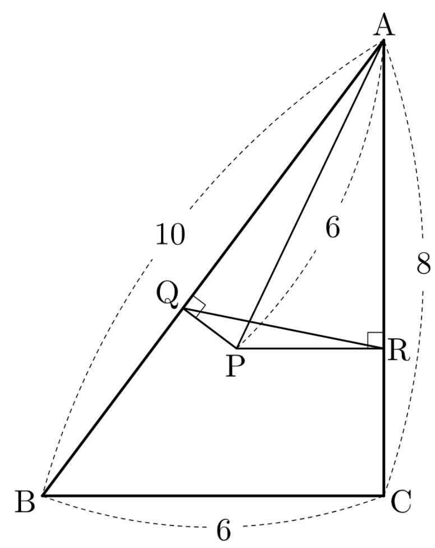
(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_{1}^{3} g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

21-1. 원의 성질을 이용하여 원을 발견할 수 있을까?

<09년 3월 고2 학평 19번>

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = 10$, $\overline{\mathrm{BC}} = 6$, $\overline{\mathrm{CA}} = 8$인 삼각형 ABC와 그 삼각형의 내부에 $\overline{\mathrm{AP}} = 6$인 점 P가 있다. 점 P에서 변 AB와 변 AC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 선분 QR의 길이는? [4점]

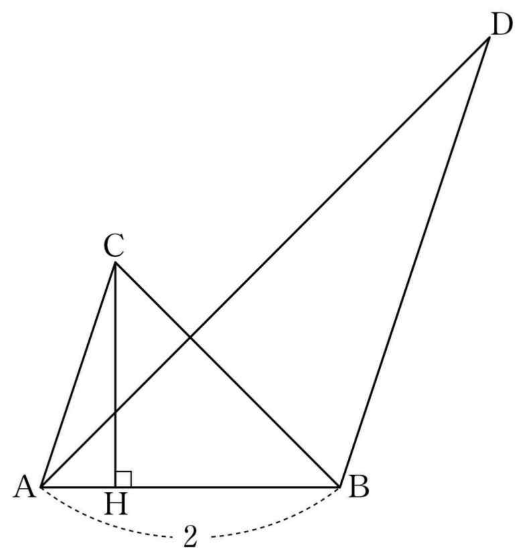


① $\frac{14}{5}$　② 3　③ $\frac{16}{5}$　④ $\frac{17}{5}$　⑤ $\frac{18}{5}$

21-2. 평행선을 이용하여 여각을 표시하자.
아이디어 제공해준 린들러 님 감사합니다.

<21년 3월 학평 21번>

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BD}}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle\mathrm{CAB})=51$이다. $\overline{\mathrm{AC}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle\mathrm{CAB}<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

22. $g(k)$의 최댓값을 구하고 있으니 $x=0$에서 극솟값을 갖는 경우는 생각할 필요가 없다.
물론 손풀이에서는 모든 케이스를 점검해 두었다.

경우함수 각각을 갈아타면서 함수의 미분가능성이 어떻게 될지 생각해보자.

<20학년도 사관학교 나형 20번>

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq a) \\ 2a-f(x) & (f(x)<a) \end{cases} \quad (a\text{는 상수})$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=4$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 함수 $g(x)-f(x)$는 $x=\dfrac{7}{2}$에서 최댓값 $2a$를 가진다.

$f\left(\dfrac{5}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{5}{4}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{9}{4}$

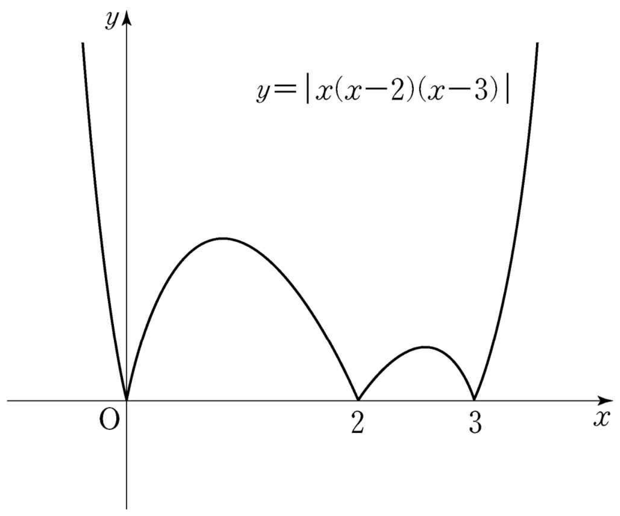
<17학년도 9월 모평 나형 21번> (도전!)

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $0,\ 2,\ 3$뿐이다.

(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



27. 결국은 적분을 잘 할 수 있어야 한다.

<20학년도 9월 모평 가형 17번>

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

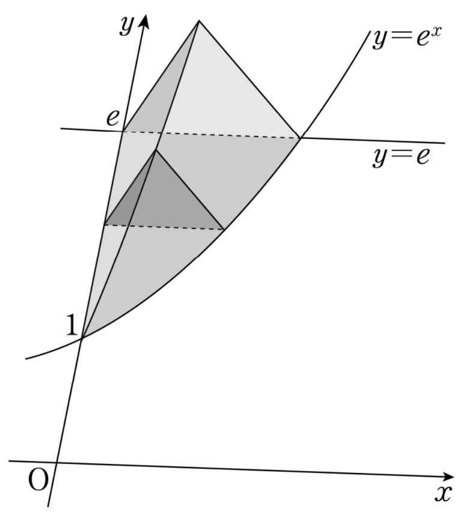
> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x^4-1$이다.
>
> (나) $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)dx=120$

$\int_{-1}^{1}x^3 f(x)dx$의 값은? [4점]

① 12　　② 15　　③ 18　　④ 21　　⑤ 24

<17년 3월 학평 가형 19번>

곡선 $y=e^x$과 y축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 y축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [4점]



① $\dfrac{\sqrt{3}(e+1)}{4}$　　② $\dfrac{\sqrt{3}(e-1)}{2}$　　③ $\dfrac{\sqrt{3}(e-1)}{4}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}(e-2)}{2}$　　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}(e-2)}{4}$

28. 두 함수 $f(x)-mx$와 $Mx-f(x)$가 모두 증가함수임을 이용하여 풀어도 좋고, 평균변화율과 도함수의 치역 사이의 관계를 이용해서 풀어도 좋다.

변곡접선 슥슥 그어서 푼 사람이 꽤 많을 듯 하다.
충분히 더 고민해 보고 손풀이와 상세해설을 읽어보자.

<12년 4월 학평 가형 21번>

함수 $f(x)=\ln(2x^2+1)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=-f'(x)$이다.

ㄴ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

ㄷ. 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $|f(x_1)-f(x_2)| \le \sqrt{2}\,|x_1-x_2|$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

<2025학년도 수능특강 미적분 도함수의 활용 Level 3 1번>

함수 $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$에 대하여 점 A에서의 접선을 l, 점 B에서의 접선을 m이라 하자. 다음 명제의 정오를 판단하시오. (단, $a<b$) [ebsi 240110117]

ㄴ. $a>1$이면 $0<$(직선 AB의 기울기)$\le \dfrac{1}{4}$이다.

<16학년도 9월 모평 B형 30번>

양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다. (나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\frac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오. [4점]

<22학년도 예시문항 12번>

$0<a<b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_a^b (x^3-3x+k)dx > 0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

29-1. 식을 정확히 쓸 수 있어야 한다.

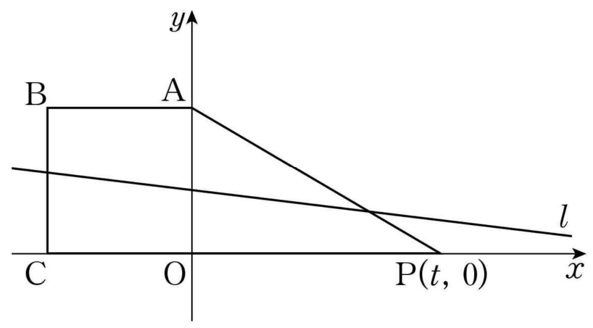
근사도 못 쓰게 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^3}-\frac{n^2+4n}{4}\right)=\frac{7}{8}$ 로 바꾸려다가 좀 아닌 듯 해서 그대로 뒀다.

<20년 4월 학평 가형 27번>

자연수 n에 대하여 점 $(1, 0)$을 지나고 점 (n, n)에서 직선 $y=x$와 접하는 원의 중심의 좌표를 (a_n, b_n)이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n^2}$의 값을 구하시오. [4점]

<20학년도 3월 학평 가형 20번>

그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(0, 2)$, $\mathrm{B}(-2, 2)$, $\mathrm{C}(-2, 0)$과 점 $\mathrm{P}(t, 0)\,(t>0)$에 대하여 직선 l이 정사각형 OABC의 넓이와 직각삼각형 AOP의 넓이를 각각 이등분한다. 양의 실수 t에 대하여 직선 l의 y절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}f(t)$의 값은? [4점]



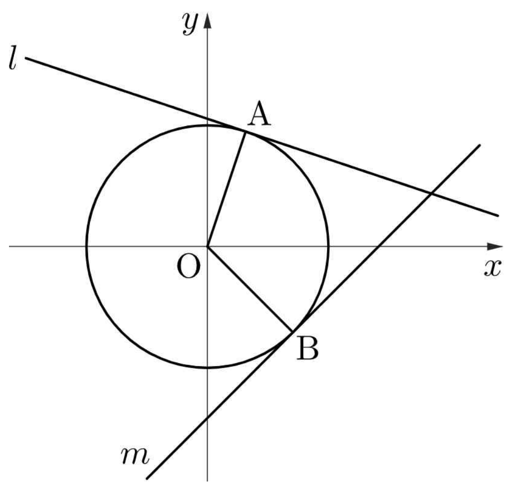
① $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$

29-2. 좌표평면 위의 교차하는 두 직선에 대해 자연스럽게 탄젠트의 덧셈정리를 떠올릴 수 있을 것이다.

<16년 3월 학평 가형 26번>

그림과 같이 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선 l이 원 $x^2+y^2=1$과 점 A에서 접하고, 기울기가 1인 직선 m이 원 $x^2+y^2=1$과 점 B에서 접한다. $100\cos^2(\angle \mathrm{AOB})$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



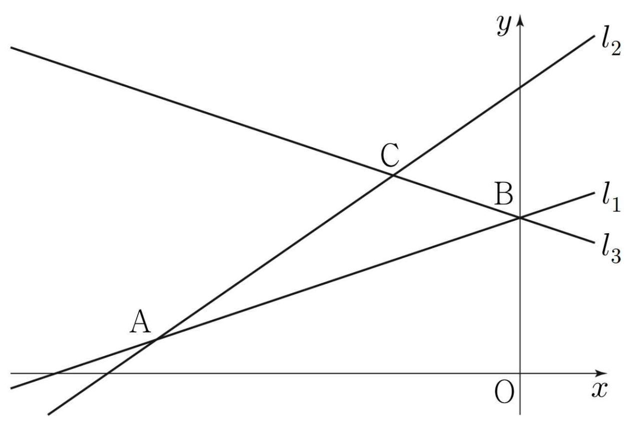
<22년 4월 학평 미적분 29번>

그림과 같이 좌표평면 위의 제2사분면에 있는 점 A를 지나고 기울기가 각각 m_1, $m_2\,(0<m_1<m_2<1)$인 두 직선을 l_1, l_2라 하고, 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_3이라 하자. 직선 l_3이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하면 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=12$, $\overline{\mathrm{AC}}=9$

(나) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{15}{2}$이다.

$78\times m_1\times m_2$의 값을 구하시오. [4점]



30. 대칭성을 간단하게 확인하고 잘린 구간 각각에서 함수를 잘 선택해주자.

<22년 10월 학평 미적분 28번>

닫힌구간 $[0, 4\pi]$에서 연속이고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^{4\pi}|f(x)|dx$의 최솟값은? [4점]

(가) $0 \le x \le \pi$일 때, $f(x) = 1 - \cos x$이다.
(나) $1 \le n \le 3$인 각각의 자연수 n에 대하여

$$f(n\pi + t) = f(n\pi) + f(t) \quad (0 < t \le \pi)$$

또는

$$f(n\pi + t) = f(n\pi) - f(t) \quad (0 < t \le \pi)$$

이다.
(다) $0 < x < 4\pi$에서 곡선 $y = f(x)$의 변곡점의 개수는 6이다.

① 4π ② 6π ③ 8π ④ 10π ⑤ 12π

<23학년도 수능 12번>

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1 \le x < n$일 때, $|f(x)| = |6(x-n+1)(x-n)|$이다.
(단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_x^4 f(t)dt$$

가 $x = 2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

<24학년도 6월 모평 미적분 28번> (도전!)

두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$

이다.

(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

<추가문제 빠른 정답>

15학년도 사관학교 A형 25번 - 18

22학년도 9월 모평 10번 - ④
2025학년도 수능특강 수학II 부정적분과 정적분 Level 1 9번 - 72

16학년도 수능 A형 27번 - 21
20학년도 6월 모평 나형 15번 - ④

24학년도 9월 모평 9번 - ③
22학년도 경찰대 19번 - ②

2025학년도 수능특강 수학I 지수함수와 로그함수 예제 2번 - ④
21년 고1 9월 학평 14번 - ③
22학년도 수능 13번 - ②
24학년도 사관학교 15번 - ⑤

22학년도 9월 모평 13번 - ②
24학년도 수능 14번 - ①

24학년도 6월 모평 15번 - ②
24학년도 9월 모평 12번 - ①
22년 3월 학평 20번 - 70

11학년도 6월 모평 가형 7번 - ③

20학년도 수능 나형 28번 - 7
18학년도 9월 모평 나형 29번 - 10
24학년도 9월 모평 22번 - 10

09년 고2 3월 학평 19번 - ⑤
21년 3월 학평 21번 - 15

20학년도 사관학교 나형 20번 - ②
17학년도 9월 모평 나형 21번 - ②

20학년도 9월 모평 가형 17번 - ②
17년 3월 학평 가형 19번 - ⑤

12년 4월 학평 가형 21번 - ⑤
2025학년도 수능특강 미적분 도함수의 활용 Level 3 1번 - ㄴ. ○
16학년도 9월 모평 B형 30번 - 15
22학년도 예시문항 12번 - ②

20년 4월 학평 가형 27번 - 2
20년 3월 학평 가형 20번 - ②
16년 3월 학평 가형 26번 - 20
22년 4월 학평 미적분 29번 - 18

22년 10월 학평 미적분 28번 - ②
23학년도 수능 12번 - ②
24학년도 6월 모평 미적분 28번 - ②

<28번 상세해설>

sol 1> 연립부등식은

$$\begin{cases} A < B \\ C < D \end{cases} \cdots\cdots ① \quad \text{또는} \quad A < B < C \ \cdots\cdots ②$$

의 형태로 제시된다. ②는 ①처럼

$$\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$$

의 형태로 고쳐서 두 부등식 $A < B$, $B < C$ 각각을 풀어주면 된다.
(두번째 부등식이 $A < C$가 아님에 주의하자.)

주어진 부등식을

$$\begin{cases} m(x-y) < f(x)-f(y) \\ f(x)-f(y) < M(x-y) \end{cases}$$

로 바꾸고 두 부등식 각각에 대해서 풀어보자.

첫번째 부등식에서 y가 포함된 항은 좌변으로,
x가 포함된 항은 우변으로 이항하면

$$f(y)-my < f(x)-mx$$

를 얻는다. 마찬가지로 두 번째 부등식에서 x가 포함된 항은 좌변으로, y가 포함된 항을 우변으로 이항하면

$$f(x)-Mx < f(y)-My$$

를 얻는다.

<u>정의 1</u>. 증가함수, 감소함수

$n(X) \geq 2$, $n(Y) \geq 2$인 두 집합 X, Y에 대하여 함수 f를 $f: X \rightarrow Y$라 하자.

(1) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$

를 만족하는 함수 f를 <u>증가함수</u>라 한다.

(2) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) > f(x_2)$

를 만족하는 함수 f를 <u>감소함수</u>라 한다.

※ 고등학교 교육과정에서는 위의 정의와 같이 함숫값의 대소에 등호가 빠진 "strictly increasing/decreasing function"만을 다룬다.

<u>정의 1</u>. (1)에 의해 함수 $f(x)-mx$는 <u>증가함수</u>이고,
<u>정의 1</u>. (2)에 의해 함수 $f(x)-Mx$는 <u>감소함수</u>이다.

<u>정리 1</u>.
함수 f를 구간 $I=(a, b)$에서 미분가능한 함수라 하자.

(1) $x \in I$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$이면 함수 f는 구간 I에서 증가한다.

(2) 함수 f가 구간 I에서 증가하면 $x \in I$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이다.

(3) $x \in I$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) < 0$이면 함수 f는 구간 I에서 감소한다.

(4) 함수 f가 구간 I에서 감소하면 $x \in I$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$이다.

<u>정리 1</u>. (2)에 의하여 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f'(x)-m \geq 0$이 성립함을 얻는다. m을 우변으로 이항하면

$$f'(x) \geq m$$

이다. 즉, 함수 $f'(x)$의 최솟값은 m보다 크거나 같다.

또한 <u>정리 1</u>. (4)에 의하여 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f'(x)-M \leq 0$이 성립함을 얻는다. M을 우변으로 이항하면

$$f'(x) \leq M$$

이다. 즉, 함수 $f'(x)$의 최댓값은 M보다 작거나 같다.

함수 $f(x)$를 미분하면

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-2x+2)-x^2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$= -\frac{2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

를 얻는다.

분모, 분자의 그래프가 모두 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 함수 $f'(x)$의 그래프 또한 직선 $x=1$에 대하여 대칭임을 생각해 볼 수 있다. 식으로 확인해보자.

$f_1(x)=(x^2-2x+2)^2$, $f_2(x)=2x(x-2)$로 두면

$f'(x) = -\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$이고,

$$f'(2-x) = -\frac{f_2(2-x)}{f_1(2-x)}$$

$$= -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$$

$$= f'(x)$$

이므로 함수 $f'(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭임을 식으로 확인할 수 있다. 또는 함수

$$f(x)-1=\frac{x^2}{x^2-2x+2}-1$$
$$=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}$$

의 그래프가 점 $(1,\,0)$에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(1,\,1)$에 대하여 대칭임을 이용해도 좋다.

계산을 편하게 하기 위해 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f'(x+1)=-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

이라 하고 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값을 구해보자.

함수 $g(x)$는 미분가능한 함수이므로 도함수를 이용하여 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다. 미분하면

$$g'(x)=-\frac{4x(x^2+1)^2-2(x^2-1)\times\{4x(x^2+1)\}}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

이고 $g'(-\sqrt{3})=g'(0)=g'(\sqrt{3})=0$이다.

<u>정리 2</u>. 극값의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여
$f'(a)=0$이라 하자.

(1) $x=a$의 좌우에서 함수 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

(2) $x=a$의 좌우에서 함수 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

$x<-\sqrt{3}$에서 $g'(x)<0$이고 $-\sqrt{3}<x<0$에서 $g'(x)>0$이므로 <u>정리 2</u>. (1)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=-\sqrt{3}$에서 극솟값

$$g(-\sqrt{3})=-\frac{2(3-1)}{(3+1)^2}=-\frac{1}{4}$$

을 갖는다. 마찬가지로 $0<x<\sqrt{3}$에서 $g'(x)<0$이므로 <u>정리 2</u>. (2)에 의하여 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값

$$g(0)=-\frac{-2}{1^2}=2$$

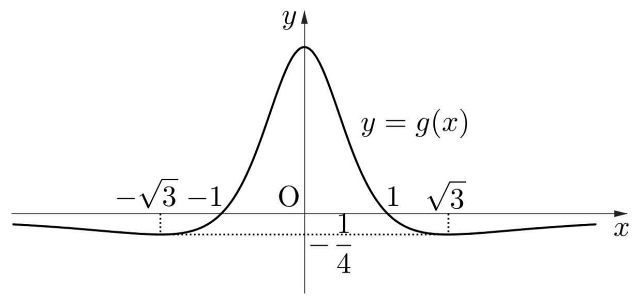
을 갖고, $x>\sqrt{3}$에서 $g'(x)>0$이므로 <u>정리 2</u>. (1)과 함수 $g(x)$의 대칭성에 의하여 $g(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{4}$을 갖는다.

cf) 함수 $g(x)$의 이계도함수가 존재하므로 이계도함수 판정법을 이용하여 함수 $g(x)$의 극대 및 극소를 판정할 수도 있다.
예를 들어 $x=0$에서

$$g''(0)=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4x(x^2-3)}{x(x^2+1)^3}$$
$$=-12<0$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

$x>\sqrt{3}$에서 $g(x)<0$이고 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 $g(x)$의 대칭성을 고려하여 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 함수 $g(x)$는 $x=-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$에서 최솟값 $-\dfrac{1}{4}$을 갖고, $x=0$에서 최댓값 2를 갖는다.

함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f'(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하여 얻은 곡선이므로 $f'(x)$는 $x=1\pm\sqrt{3}$에서 최솟값 $-\dfrac{1}{4}$을 갖고, $x=1$에서 최댓값 2를 갖는다.

$\therefore\ m\le-\dfrac{1}{4}$, $M\ge2$

m의 최댓값은 $-\dfrac{1}{4}$이고 M의 최솟값은 2이므로 구하는 값은

$\left(-\dfrac{1}{4}\right)+2=\dfrac{7}{4}$

sol 1-1> sol 1에서

$$m\le-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\le M,$$

$$m(x^4+2x^2+1)\le2-2x^2\le M(x^4+2x^2+1)$$

임을 알 수 있다. sol 1과 같이 두 부등식

$$\begin{cases} m(x^4+2x^2+1)\le2-2x^2 \\ 2-2x^2\le M(x^4+2x^2+1)\end{cases}$$

으로 나눠서 각각을 풀어보자.

i) 첫번째 부등식 $m(x^4+2x^2+1) \le 2-2x^2$;
모든 실수 x에 대하여 부등식

$$mx^4+2(m+1)x^2+m-2 \le 0$$

이 성립해야 한다.

$m=0$일 때, 부등식 $2x^2-2 \le 0$은 $x<-1$ 또는 $x>1$에서 성립하지 않는다.

$m \ne 0$일 때, $x^2=t$로 치환하면 부등식

$$mt^2+2(m+1)t+m-2 \le 0 \quad \cdots\cdots \text{ ㉠}$$

이 $t \ge 0$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 한다.

㉠을 t에 대한 이차부등식으로 보고, 다음 중에서 필요한 것만 확인하자.

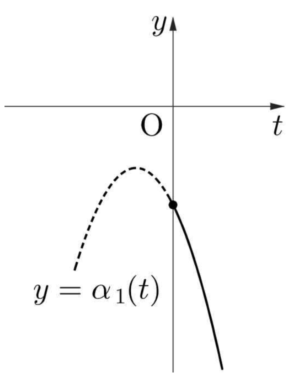
① 이차항의 계수의 부호
② 이차함수 $\alpha_1(t)=mt^2+2(m+1)t+m-2$의 축의 위치
③ 이차방정식 $mt^2+2(m+1)t+m-2=0$의 판별식
④ 주어진 범위 끝에서 이차함수의 함숫값

부등식 ㉠이 $t \ge 0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면
$m \le 0$이어야 한다.
$m=0$일 때 성립하지 않는 것을 이미 확인했으므로 $m<0$이다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c\,(a \ne 0)$의 축은 $x=-\dfrac{b}{2a}$이므로

이차함수 $y=\alpha_1(t)$의 축은 $t=-\dfrac{m+1}{m}$이다.

$m<-1$일 때, $-\dfrac{m+1}{m}<0$이므로 이차함수 $\alpha_1(t)$는 다음과 같이 그려진다.



이차함수 $\alpha_1(t)$는 $t \ge 0$에서 최댓값
$\alpha_1(0)=m-2$를 가진다.
이때 $m<-1$에서 $m-2<-3$이므로
$m<-1$인 모든 실수 m에 대하여
㉠이 성립한다.

$-1 \le m<0$일 때, $-\dfrac{m+1}{m} \ge 0$이므로
이차함수의 축이 주어진 범위인 $t \ge 0$에 포함된다.

따라서 이차함수 $\alpha_1(t)$가 t축과 만나지 않아야 하므로
이차방정식 $mt^2+2(m+1)t+m-2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(m+1)^2-m(m-2)$$

$$=4m+1 \le 0$$

$\therefore m \le -\dfrac{1}{4}$, m의 최댓값은 $-\dfrac{1}{4}$이다.

ii) 두번째 부등식 $2-2x^2 \le M(x^4+2x^2+1)$;
모든 실수 x에 대하여 부등식

$$Mx^4+2(M+1)x^2+M-2 \ge 0$$

이 성립해야 한다.

$M=0$일 때, 부등식 $2x^2-2 \ge 0$은 $-1<x<1$에서 성립하지 않는다.

$M \ne 0$일 때, $x^2=t$로 치환하면 부등식

$$Mt^2+2(M+1)t+M-2 \ge 0 \quad \cdots\cdots \text{ ㉡}$$

이 $t \ge 0$인 모든 실수 t에 대하여 성립해야 한다.

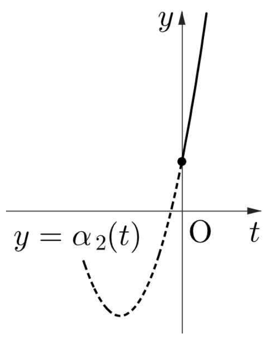
㉡을 t에 대한 이차부등식으로 보고, 다음 중에서 필요한 것만 확인하자.

① 이차항의 계수의 부호
② 이차함수 $\alpha_2(t)=Mt^2+2(M+1)t+M-2$의 축의 위치
③ 이차방정식 $Mt^2+2(M+1)t+M-2=0$의 판별식
④ 주어진 범위 끝에서 이차함수의 함숫값

부등식 ㉡이 $t \ge 0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면
$M \ge 0$이어야 한다.
$M=0$일 때 성립하지 않는 것을 이미 확인했으므로 $M>0$이다.

이차함수 $y=M(t)$의 축은 $t=-\dfrac{M+1}{M}$이다.

$M>0$에서 $-\dfrac{M+1}{M}<0$이므로 이차함수 $\alpha_2(t)$는 다음과 같이 그려진다.



이차함수 $\alpha_2(t)$는 $t \ge 0$에서 최솟값
$\alpha_2(0)=M-2$를 가진다.
$\therefore M-2 \ge 0,\ M \ge 2$
M의 최솟값은 2이다.
이차방정식 $Mt^2+2(M+1)t+M-2=0$의
판별식을 이용하지 않았음을 주목하자.

따라서 구하는 값은 $\left(-\dfrac{1}{4}\right)+2=\dfrac{7}{4}$

sol 2> $x-y>0$이므로 주어진 부등식을 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$m<\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<M$$

<u>정리 3</u>.

함수 $f(x)$가 이계도함수가 존재하고 직선인 구간이 존재하지 않는다(i.e., 임의의 열린구간에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=l(x)$인 직선 $l(x)$가 존재하지 않는다)고 가정하자.

서로 다른 두 실수 x_1, x_2와 두 실수 a, b에 대하여

(1) 함수 $f'(x)$가 $x=a$에서 최솟값 $f'(a)$를 가지면
$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>f'(a)$이고
$\lim_{x_1\to a,\, x_2\to a}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(a)$이다.

(2) 함수 $f'(x)$가 $x=b$에서 최댓값 $f'(b)$를 가지면
$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<f'(b)$이고
$\lim_{x_1\to b,\, x_2\to b}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(b)$이다.

※ 위 정리의 증명을 완전히 이해할 필요는 없고,
"평균변화율로 가능한 값의 집합은 도함수의 치역에서 최대/최소를 제외한 집합이다." 정도로만 이해해도 좋다.

증명)
(1) ; 함수 $f(x)$가 <u>정리 3</u>.의 가정을 만족하고 함수 $f'(x)$가 $x=a$에서 최솟값 $f'(a)$를 갖는다고 하자.

함수 $g(x)$를
$g(x)=f(x)-f'(a)(x-a)$
라 하면 임의의 서로 다른 실수 x_1, x_2에 대하여

i) $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}>0$이고
ii) $\lim_{x_1\to a,\, x_2\to a}\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=0$임을 보이면 충분하다.

i) 함수 $g(x)$는 미분가능하고 $g'(x)=f'(x)-f'(a)$에서 $g'(a)=f'(a)-f'(a)=0$이므로 함수 $g'(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $g'(a)=0$을 갖는다.

가정에 의해 $b>a$, $g'(b)\ge 0$이고 구간 (a, b) 내의 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$인 실수 b가 존재하고,
함수 $g'(x)$가 연속이므로 구간 (a, b) 내의 모든 실수 x에 대하여

$$\int_a^x g'(t)dt=g(x)-g(a)>0,\quad g(x)>g(a)\ \cdots\cdots\ (*)$$

이다.

마찬가지로 가정에 의해 $d<a$, $g'(d)\ge 0$이고 구간 (d, a) 내의 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$인 실수 d가 존재하고,
함수 $g'(x)$가 연속이므로 구간 (d, a) 내의 모든 실수 x에 대하여

$$\int_x^a g'(t)dt=g(a)-g(x)>0,\quad g(x)<g(a)\ \cdots\cdots\ (**)$$

이다.

일반성을 잃지 않고 두 실수 x_1, x_2를 $x_1<x_2$라 하자.
임의의 $d<x_1<x_2<b$인 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$x_1<x_2<a$ 또는 $a<x_1<x_2$일 때, 구간 $[x_1, x_2]$ 내의 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$이므로

$$g(x_2)-g(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}g'(x)dx>0,\quad g(x_2)>g(x_1)$$

에서

$$\{g(x_2)-g(x_1)\}\times\frac{1}{x_2-x_1}>0$$

이다.

$x_1<a<x_2$일 때, $(*)$과 $(**)$에 의하여 $g(x_2)>g(a)>g(x_1)$이므로

$$g(x_2)-g(x_1)>0,\quad \{g(x_2)-g(x_1)\}\times\frac{1}{x_2-x_1}>0$$

이다.

따라서 임의의 서로 다른 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}>0$이 성립한다.

ii) 함수 $g(x)$가 미분가능하므로 평균값 정리에 의해 임의의 $x_1<x_2$인 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=g'(c)$$

인 실수 c가 구간 (x_1, x_2)에 존재한다.

$|x_1-a|$와 $|x_2-a|$ 중 작지 않은 값을 X라 하면
$|c-a|<X$이고 $x_1\to a$, $x_2\to a$일 때 $X\to 0$이므로

정리 4. (조임 정리, 샌드위치 정리...)에 의해
$|c-a| \to 0$, $c \to a$이다.

정리 4. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 실수 a에 대하여 a에 가까운 모든 실수 x에서 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$ (L은 실수)이면 $\lim_{x \to a} h(x) = L$이다.

또한 함수 $g(x)$의 이계도함수가 존재하므로 함수 $g'(x)$는 연속이고

$$\lim_{x_1 \to a,\, x_2 \to a} \frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$= \lim_{c \to a} g'(c)$$

$$= g'(a) = 0$$

이다. ■

(2) ; 함수 $f(x)$가 정리 3.의 가정을 만족하고 함수 $f'(x)$가 $x=b$에서 최댓값 $f'(b)$를 갖는다고 하자.

함수 $h(x)$를

$$h(x) = f'(b)(x-b) - f(x)$$

라 하면 정리 3. (1)에 의해 정리 3. (2)는 참이다. ■

sol 1의 함수 $f'(x)$가 최솟값 $-\frac{1}{4}$, 최댓값 2를 가짐을 이용하자.

함수 $f'(x)$는 최솟값 $-\frac{1}{4}$을 가지므로 정리 3. (1)에 의해 $x > y$인 임의의 두 실수 x, y에 대하여

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} > -\frac{1}{4}$$

이 성립한다. $\therefore m \le -\frac{1}{4}$

또한 함수 $f'(x)$는 최댓값 2를 가지므로 정리 3. (2)에 의해 $x > y$인 임의의 두 실수 x, y에 대하여

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 2$$

이 성립한다. $\therefore M \ge 2$

따라서 m의 최댓값과 M의 최솟값의 합은 $\frac{7}{4}$이다.