목록

깨단수학 실력진단 테스트

약점보완 테스트 5회

학 교 : ______________ 학 년 : ________ 이 름 : ______________

1. 실수 x의 값에 관계없이 $\dfrac{x^2+2ax+1}{bx^2-4x-1}$의 값이 일정할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

④

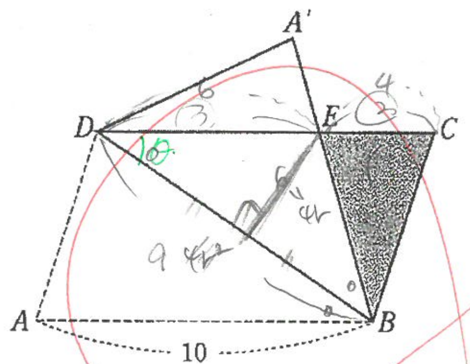
$\dfrac{x^2+2ax+1}{bx^2-4x-1}=k$ (k: 상수)

$\therefore x^2+2ax+1=bkx^2-4kx-k$

$\begin{cases} 1=bk \\ 2a=-4k \\ 1=-k \end{cases}$ $\therefore k=-1$, $a=2$, $b=-1$ $\therefore a+b=1$

2. 그림과 같이 $\overline{AB}=10$인 평행사변형 ABCD가 있다. 이 도형을 대각선 BD를 따라 접어서 생기는 삼각형 EBC의 넓이가 평행사변형 ABCD의 넓이의 $\dfrac{1}{5}$이고, $\overline{CE}$, $\overline{EB}$, $\overline{BD}$의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 평행사변형 ABCD의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{7}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 두 자연수이다.)



$r=\frac{3}{2}$

$4r^2=4\times\frac{9}{4}=9$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\frac{9}{2}}{6}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\square ABCD=2\times\frac{1}{2}\times10\times9\times\sin\theta$

$=90\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{45}{2}\sqrt{7}$

47

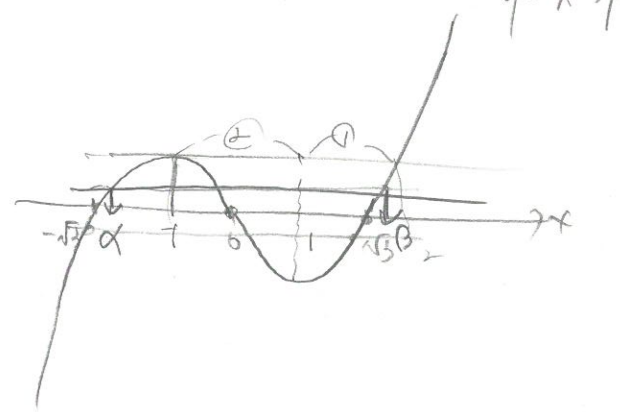
3. 실수 p에 대하여 삼차방정식 $x^3-3x-p=0$의 실근 중에서 최대인 것과 최소인 것의 곱을 $f(p)$라 하고, 실근이 한 개일때는 그 근의 제곱을 $f(p)$라 하자. 이때 $f(p)$의 최솟값을 구하시오.

$\therefore -3$

$x^3-3x=p$

$y=x(x^2-3)=(x-\sqrt{3})x(x+\sqrt{3})$

$y=x^3-3x$



$\therefore x^3-3x-p=0$ 세근 $\alpha, \beta, -\alpha-\beta$

$\alpha\beta+\alpha(-\alpha-\beta)+\beta(-\alpha-\beta)=-3$

$-\alpha^2-\beta^2-\alpha\beta=-3$

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=3$

$\alpha^2+\beta^2=3-\alpha\beta\ge2|\alpha\beta|$ (산술기하평균)

$3-\alpha\beta\ge-2\alpha\beta$

$\therefore \alpha\beta\ge-3$

답지풀이 참조

4. 양수 t에 대하여 $\log t$의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

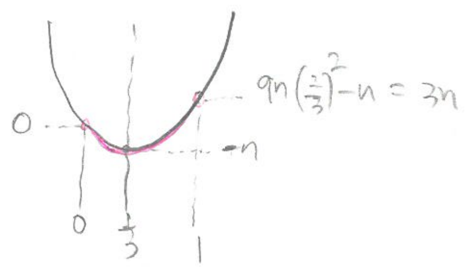
를 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 2

①

$0 \le g(t) < 1$

$f(t)=9n(x-\frac{1}{3})^2-n$



$-n \le f(t) < 3n$

$-n, -n+1, \cdots 0, 1, 2, \cdots n$

$n+1, n+2, \cdots, 3n-1$

$\therefore a_n=\frac{(-n+3n-1)}{2}\times(2n-1)$

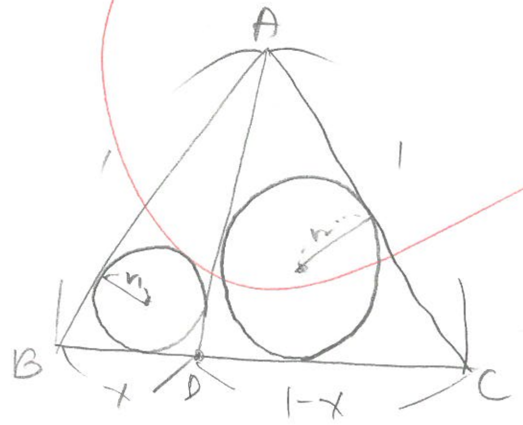
$=2n(2n-1)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n-1)}{n^2}=4$

5. 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC의 변 BC 위에 임의의 점 D를 잡고 두 삼각형 ABD, ADC의 내접원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하자. 이때 두 반지름의 길이의 곱 r_1r_2의 최댓값은?

① $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2-\sqrt{3}}{8}$ ④ $\frac{2+\sqrt{3}}{8}$ ⑤ $\frac{2-\sqrt{3}}{12}$

③



$\therefore \overline{AD}^2=1^2+x^2-2\cdot1\cdot x\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=x^2+1-2x\times\frac{1}{2}=x^2-x+1$

$\overline{AD}=\sqrt{x^2-x+1}$

$\frac{1}{2}\times r_1\times(x+1+\sqrt{x^2-x+1})=\frac{1}{2}\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$r_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{x}{x+1+\sqrt{x^2-x+1}}$

$\frac{1}{2}\times r_2\times(2-x+\sqrt{x^2-x+1})=\frac{1}{2}\times(1-x)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

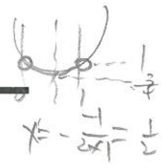
$r_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1-x}{2-x+\sqrt{x^2-x+1}}$

$\therefore r_1r_2=\frac{3}{4}\times\frac{x(1-x)}{(x+1)(2-x)+x^2-x+1+3\sqrt{x^2-x+1}}$

$=\frac{3}{4}\times\frac{-x(x-1)}{3+3\sqrt{x^2-x+1}}$

$=-\frac{1}{4}\times\frac{x(x-1)}{1+\sqrt{x^2-x+1}}$ $=m$ 치환

$m^2=x^2-x+1$



$x=-\frac{-1}{2\times1}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1$

$=-\frac{1}{4}\times\frac{m^2-1}{m+1}=-\frac{1}{4}(m-1)$ $(\frac{\sqrt{3}}{2}\le m<1)$

최대: $-\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)=-\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}-2}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{8}$

유리화

$r_1r_2=-\frac{1}{4}(\sqrt{x^2-x+1}-1)$