
枝葉

안녕하세요, 수능을 준비하는 학생 여러분.

여러분은 '지엽'이라는 말을 들어보셨을 겁니다. 식물의 가지와 잎을 뜻하는 이 말은 이제 "본질적이거나 중요하지 아니하고 부차적인 부분"을 가리키는 말이 되었습니다.

최근 수능에서 소위 '킬러 문항'을 배제하는 정책이 시행되고 있습니다. 이로 인해 많은 학생들이 지엽적인 부분에서 더 많은 문제가 출제되지 않을까 걱정하고 있습니다. 그 걱정, 충분히 이해합니다.

이 책은 그런 여러분의 걱정을 덜어드리고자 준비했습니다. 177페이지에 걸쳐 우리는 흔히 간과되기 쉬운 수학의 구석구석을 살펴볼 것입니다. 얼핏 보기에 사소해 보이는 개념들이 어떻게 문제 해결의 결정적인 단서가 되는지를 발견하게 될 것입니다.

여러분에게 항상 도움이 되고 싶습니다.

감사합니다.

- 김지헌T

목차 :

개념편

다항식의 덧셈

일반적으로 다항식은 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮은 항의 순서로 정리하여 나타내는데, 이를 내림차순이라고 한다. 두 다항식의 덧셈과 뺄셈에서는 각 항을 동류항끼리 모아서 계산한다. 이때 두 다항식을 내림차순으로 정리하면 동류항을 쉽게 찾을 수 있다. 특정한 문자에 대하여 정리하는 경우 나머지 문자는 모두 상수로 취급하여 정리한다. 일반적으로 수의 덧셈에서와 같이 다항식의 덧셈에서도 다음 성질이 성립한다.

세 다항식 A, B, C에 대하여 교환법칙과 결합법칙이 성립한다.

① 교환법칙 $A+B=B+A$

② 결합법칙 $(A+B)+C=A+(B+C)$

한편, 교환법칙과 결합법칙은 다항식의 뺄셈에 대하여 성립하지 않는다.

다항식의 곱셈

두 다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 식을 전개한 다음 동류항끼리 모아서 내림차순으로

정리한다. 일반적으로 수의 곱셈에서와 같이 다항식의 곱셈에서도 다음 성질이 성립한다.

세 다항식 A, B, C에 대하여 교환법칙, 결합법칙, 그리고 분배법칙이 성립한다.

① 교환법칙 $AB=BA$

② 결합법칙 $(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙 $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

곱셈 공식

① $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b)^3+a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

③ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

다항식의 나눗셈

다항식의 나눗셈은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로

계산한다. 일반적으로 다항식 A를 다항식 $B(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R이라 하면

$A=BQ+R$가 성립한다. 이때 R의 차수는 B의 차수보다 낮다. 특히 $R=0$이면 A는 B로

나누어떨어진다고 한다.

항등식의 성질

등식에는 등식에 특정한 값을 대입하였을 때만 성립하는 등식인 방정식과, 등식에 어떤 값에 대입하여도 항상 성립하는 등식이 있다. 항등식을 생각할 때는 어떤 문자에 대한 항등식인지 확인해야한다. 문자 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입하여도 등식이 성립한다.

일반적으로 항등식에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

> ① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$이다.
>
> 또 $a=b=c=0$이면 $ax^2+bx+c=0$은 x에 대한 항등식이다.
>
> ② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a',\ b=b',\ c=c'$이다.
>
> 또 $a=a',\ b=b',\ c=c'$이면 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$은 x에 대한 항등식이다.

미정계수법

항등식의 성질을 이용하여 등식에서 미지의 계수를 정하는 방법을 미정계수법이라고 한다.

미정계수법에는 양변의 문자에 적당한 수를 대입하여 미지의 계수를 정하는 방법과 양변의 계수를 비교하여 미지의 계수를 정하는 방법이 있다. 각각을 수치대입법과 계수비교법이라 한다.

식의 형태에 따라 수를 대입하여 미지의 계수가 간단히 구해지는 경우는 수치대입법을, 다항식을 전개하기 쉬운 경우는 계수비교법이 편리할 수 있다.

근과 계수의 관계

다항식 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$의 모든 근을 중복을 포함하여 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n$으로 나타낼 때, 식 $f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n)$이 항등식이므로 계수비교법을 통하여 근과 계수의 관계를 확인할 수 있다. 가령 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면 식 $a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}\right)=a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}$은 항등식이다.

따라서 $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$가 성립한다. (이는 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$가 실수임을 보장하지 않는 다는 점에서 주의해야하며, $f(x)$가 삼차함수라 하였으므로 $a\neq0$임이 보장된다.)

특히, 다항식 $f(x)$의 차수가 n일 때, $f(x)$의 $(n-1)$차항의 계수를 $f(x)$의 최고차항의 계수로 나눈 값은 그 방정식의 모든 근의 합에 -1을 곱한 값과 같으며 $f(x)$의 상수항을 최고차항의 계수로 나눈 값의 절댓값은 그 방정식의 모든 근의 곱의 절댓값과 같다.

나머지정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하면 $R=P(\alpha)$이다.

나머지정리와 항등식의 성질

다항식 $P(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면 등식

$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$은 항등식이다. 이 식의 양변에 $ax+b=0$으로 만드는 x의 값 $x=-\dfrac{b}{a}$를

대입하면 $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)=R$이므로 $P(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$이다. 즉,

다항식을 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $x+\dfrac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫의 $\dfrac{1}{a}$이지만, 각각의 경우에

대하여 나머지는 같다.

다항식을 이차식으로 나눌 때의 나머지는 일차 이하의 다항식, 즉 일차식 또는 상수가 되므로

R가 아닌 $ax+b$의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때 이차식이 두 일차식의 곱의 형태로 표현할 수 있다면

각각의 일차식에 대하여 나머지정리를 이용하여 a와 b에 대한 연립방정식을 풀어낼 수 있다.

인수정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$이다. 또 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$가 $x-\alpha$로

나누어떨어진다. 인수정리를 이용하여 다항식 $P(x)$의 계수가 정수인 일차식의 인수를 찾을 수 있다.

조립제법

다항식을 일차식으로 나눌 때, 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 조립제법이라고 한다. 조립제법을 이용할 때는 계수가 0인 항도 표시해야 한다.

나머지정리와 조립제법은 다항식을 일차식으로 나눌 때에 한하여 사용하는 것이고, 다항식을 이차 이상의 다항식으로 나눌 때는 직접 나눗셈을 하는 방법을 사용해야한다.

인수분해 공식

인수분해는 다항식의 전개를 거꾸로 생각한 것이다. 따라서 곱셈공식의 좌변과 우변을 바꾸면

다음과 같은 인수분해 공식을 얻을 수 있다.

① $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

② $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

③ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

인수분해 공식을 직접 이용하기 어려운 경우에는 주어진 식을 여러 가지 방법으로 변형하여

인수분해한다. 예를 들어 공통부분이 있는 다항식의 경우에는 그 공통부분을 하나의 문자로 바꾸어

인수분해하면 편리하고, 인수분해 공식을 바로 이용할 수 없는 다항식의 경우에는 그 형태를

변형하여 인수분해 공식을 이용한다. 공통부분을 하나의 문자로 바꾸는 행위를 치환이라 한다.

한편, 인수분해 공식을 바로 이용하기 어려울 때 인수정리를 이용하여 인수를 찾을 수 있다.

인수정리를 이용한 인수분해

다항식 $P(x)$에서 $P(a)=0$이면 인수정리에 의하여 $P(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다. 그러므로 $P(x)$를

$x-a$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면 $P(x)$는 $P(x)=(x-a)Q(x)$와 같이 인수분해된다.

계수가 정수인 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=0$인 a를 찾을 때, 근과 계수의 관계에 따라 상수항을

최고차항의 계수로 나눈 값의 절댓값은 방정식 $P(x)=0$의 모든 근의 곱의 절댓값과 동일하다.

따라서 인수정리를 이용하여 삼차 이상의 다항식 $P(x)$를 인수분해할 때, $P(a)=0$을 만족시키는 a의

값은 $\pm\dfrac{(P(x)\text{의 상수항의 약수})}{(P(x)\text{의 최고차항의 계수의 약수})}$중에서 찾을 수 있다.

복소수의 뜻

방정식 $x^2=-1$을 만족시키는 수 x를 하나 생각할 때, 그 수를 기호 i로 나타낸다. 즉, $i^2=-1$이며

이때 i를 허수단위라고 한다. 제곱하여 -1이 된다는 뜻에서 $i=\sqrt{-1}$과 같이 나타낸다. 이때

$x^2=-1$의 해는 $x=\sqrt{-1}=i$ 또는 $x=-\sqrt{-1}=-i$이다.

두 실수 a, b에 대하여 $a+bi$의 꼴로 나타내어지는 수를 복소수라고 하며, a를 실수부분, b를

허수부분이라고 한다. 복소수 $a+bi$에서의 '+'는 덧셈에 해당하는 연산 기호가 아닌 복소수의 기호에

포함되어 있는 부호이다.

복소수 $a+bi$에서 $a=0$이면 간단히 bi로 나타낸다. 또한 $0i=0$으로 놓으면 실수 a에 대하여

$a=a+0=a+=i$이므로 실수도 복소수이다. 한편 실수가 아닌 복소수 $a+bi(b\neq 0)$를 허수라고 한다.

이상으로부터 복소수 $a+bi\begin{cases}\text{실수}\ (b=0)\\ \text{허수}\ (b\neq 0)\end{cases}$ (단, a, b는 실수)와 같이 분류할 수 있다.

복소수가 서로 같을 조건

a, b, c, d가 실수일 때 두 복소수가 서로 같을 조건은 다음과 같다.

① $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.

② $a=c$, $b=d$이면 $a+bi=c+di$이다.

복소수의 사칙연산

복소수의 덧셈과 뺄셈은 다음과 같이 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

즉, 복소수의 덧셈과 뺄셈에서는 허수단위 i를 하나의 문자처럼 생각하여 계산한다.

마찬가지로 복소수의 곱셈도 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 전개하고 $i^2=-1$로 계산한다.

$a,\ b,\ c,\ d$가 실수일 때 두 복소수 $a+bi,\ c+di$에 대하여 곱셈의 결과는

$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2+ac+adi+bci-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i$이다.

복소수 $a+bi$에서 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 복소수 $a+bi$의 켤레복소수라 하자.

이것을 기호로 $\overline{a+bi}$와 같이 나타낸다. 즉, $\overline{a+bi}=a-bi$이다. 한편 $\overline{a-bi}=a+bi$이므로 복소수

$a+bi$와 $a-bi$는 서로 켤레복소수이다.

복소수의 나눗셈에서는 허수인 분모를 실수로 만들기 위해 분자, 분모에 분모의 켤레복소수를 각각

곱하여 계산한다. 즉, $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$이다.

(이때 $c+di\neq 0$이다.) 따라서 복소수의 사칙연산의 결과는 다음과 같다.

① $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

② $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

③ $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

④ $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq 0$)

복소수의 연산 결과는 모두 $a+bi$($a,\ b$는 실수)의 꼴로 표현되므로 0으로 나누는 경우를 제외하면

복소수의 사칙연산 결과는 모두 복소수이다.

복소수의 덧셈과 곱셈에 대한 성질

세 복소수 A, B, C에 대하여 복소수의 덧셈에서는 아래와 같은 성질이 성립한다.

① 교환법칙 $A+B=B+A$

② 결합법칙 $(A+B)+C=A+(B+C)$

또한 복소수의 곱셈에서는 아래와 같은 성질이 성립한다.

① 교환법칙 $AB=BA$

② 결합법칙 $(AB)C=A(BC)$

③ 분배법칙 $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

허수단위 i의 거듭제곱

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$일 때 i^n의 값을 나열한 것은 i, -1, $-i$, 1이 반복적으로 나타난다.

따라서 임의의 음이 아닌 정수 n에 대하여 $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $i^{4n+4}=1$이다.

음수의 제곱근

양수 a에 대하여 음수의 제곱근의 성질은 다음과 같다.

① $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$이다.

② $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$, $-\sqrt{-a}=-\sqrt{a}i$

음수의 제곱근의 연산

$\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$가 실수일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\,(b\neq 0)$가 성립한다.

한편, 음수의 제곱근을 고려할 때 다음과 같은 성질이 성립한다.

① 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $a<0$, $b<0$는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$가 성립하기 위한

필요충분조건이다.

② 두 실수 a, b에 대하여 $a\geq 0$, $b<0$는 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$가 성립하기 위한 필요충분조건이다.

이차방정식의 실근과 허근

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 근의 공식에 의하여 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이다.

이때 $b^2-4ac<0$이면 x의 값은 실수가 아니므로 실수의 범위에서는 주어진 이차방정식의 근을 구할 수 없다. 그러나 복소수의 범위에서는 $b^2-4ac\geq 0$이면 x의 값은 실수, $b^2-4ac<0$이면 x의 값은 허수이므로 주어진 이차방정식의 근은 복소수 범위에서는 모두 구할 수 있다.

따라서 계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 반드시 근을 갖는다. 이때 실수인 근을 실근이라 하고, 허수인 근을 허근이라고 한다.

이차방정식의 판별식

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라고 할 때 다음이 성립한다.

① $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=0$이면 실수인 중근을 갖는다.

③ $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

즉, 이차방정식이 실근을 가질 조건은 $D\geq 0$이다. 거꾸로 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$, 실수인 중근을 가지면 $D=0$, 허근을 가지면 $D<0$이다.

한편, $D<0$인 경우 a, b, c가 모두 실수이므로 두 허근은 서로 켤레복소수이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$이다.

이차방정식의 두 근의 제곱의 합과 두 근의 역수의 합, 그리고 두 근의 차의 제곱

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 근을 직접 구하지 않고도 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다. 또한 두 근의 합과 곱을 통하여 두 근의 제곱의 합과 두 근의 역수의 합, 그리고 두 근의 차의 제곱을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta,\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta},\ (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$이므로, 이를 전개하면 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이다.

두 근의 합과 곱이 주어진 이차방정식

x^2의 계수가 1인 이차방정식의 두 근을 α, β라 할 때, 이차방정식의 일차항의 계수와 상수항의 계수가 변하면 α, β의 값이 변하게 된다. 즉, $\alpha+\beta$와 $\alpha\beta$의 값이 정해지면 α, β의 쌍이 정해진다. 이때, α와 β의 대소 관계는 알 수 없으므로 각각의 α, β는 정해지지 않는다.

이차식의 인수분해

이차방정식의 두 근을 이용하면 이차식 ax^2+bx+c는 복소수의 범위에서 항상 두 일차식의 곱으로 인수분해된다. 이때 두 근을 α, β라고 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축이 만나는 교점의 x좌표는 $y=0$일 때의 x의 값이므로, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같으며, 이는 판별식의 부호에 따라 결정된다.

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식을 D라고 할 때 다음과 같다.

① $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$이면 한 점에서 만난다(접한다).

③ $D<0$이면 만나지 않는다.

특히 이차함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만날 때 직선은 이차함수의 그래프에 접한다고 하며, 이 직선을 이차함수의 그래프의 접선, 그 교점을 접점이라 한다.

한편, 이차함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때 각각의 교점의 x좌표는 이차방정식의 서로 다른 두 실근이 되므로 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.

이차함수의 최댓값과 최솟값

어떤 함수의 모든 함숫값 중에서 가장 큰 값을 그 함수의 최댓값이라 하고, 가장 작은 값을 그 함수의 최솟값이라고 한다. 일반적으로 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

① $a>0$이면 $x=p$에서 최솟값 q를 갖고 최댓값은 없다.

② $a<0$이면 $x=p$에서 최댓값 q를 갖고 최솟값은 없다.

실수 전체의 범위에서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값은 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 구할 수 있다.

제한된 범위 $\alpha \le x \le \beta$에서 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값을 구하는 경우는 다음과 같다.

① 꼭짓점의 x좌표 p가 제한된 범위에 속하면, 즉 $\alpha \le p \le \beta$이면 $f(\alpha)$, $f(p)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② 꼭짓점의 x좌표 p가 제한된 범위에 속하지 않으면, 즉 $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$이면 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

삼차방정식과 사차방정식

삼차방정식과 사차방정식을 인수분해를 이용하여 풀 때, 인수정리와 조립제법을 이용하는 경우가 일반적이며, 방정식의 형태에 따라 치환을 사용할 수 있다. 계수가 실수인 삼차방정식과 사차방정식의 한 근이 허근일 경우 그 켤레복소수도 방정식의 근이 된다.

미지수가 2개인 연립이차방정식의 풀이

$\begin{cases}(\text{일차식})=0\\(\text{이차식})=0\end{cases}$의 꼴인 연립이차방정식의 풀이는 다음과 같이 풀어낸다.

① 일차방정식을 어느 한 미지수에 관한 식으로 나타낸다.

② ①에서 구한 식을 이차방정식에 대입하여 1개의 미지수를 없애고 이차방정식으로 나타내어 이를 푼다.

③ ②에서 구한 근을 일차방정식에 대입하여 다른 1개의 미지수의 값을 구한다.

$\begin{cases}(\text{이차식})=0\\(\text{이차식})=0\end{cases}$의 꼴인 연립이차방정식의 풀이는 다음과 같이 풀어낸다.

① 인수분해 되는 이차방정식을 인수분해한다.

② ①에서 구한 두 개의 일차방정식을 다른 이차방정식에 대입하여 이차식, 일차식의 연립이차방정식을 구하는 방법으로 푼다.

연립이차방정식을 풀 때 x와 y의 변수를 바꾸어도 같아지는 대칭형의 문제는 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 풀 수 있다.

연립방정식화

방정식 $A=B=C$는 연립방정식 $\begin{cases}A=B\\A=C\end{cases}$, $\begin{cases}A=B\\B=C\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}A=C\\B=C\end{cases}$의 꼴로 바꾸어 푼다. 또한, 실수 전체의 범위 안에서 방정식 $A=B$의 해가 존재하면 어떤 실수 k에 대하여 $A=B=k$를 만족하는 k가 반드시 존재한다. 다시 말해 연립방정식 $\begin{cases}A=k\\B=k\end{cases}$을 만족하는 k가 적어도 하나 존재한다.

연립부등식

두 개 이상의 부등식을 한 쌍으로 묶어서 나타낸 것을 연립부등식이라고 하며, 각각의 부등식이 일차부등식인 연립부등식을 연립일차부등식이라고 한다. 이때 두 일차부등식을 동시에 만족시키는 해를 연립부등식의 해라고 하며, 연립부등식의 해를 구하는 것을 연립부등식을 푼다고 한다.

연립부등식을 풀 때는 각 일차부등식의 해를 구하고, 수직선 위에 나타내어 그 공통부분을 구하면 된다. 연립부등식에서 두 부등식을 동시에 만족시키는 해가 없으면 연립부등식의 해는 없다고 한다.

또 두 부등식을 동시에 만족시키는 해가 한 개이면 연립부등식의 해는 등호를 사용하여 나타낸다.

부등식 $A<B<C$는 두 부등식 $A<B$와 $B<C$를 하나로 나타낸 것이다. 따라서 $A<B<C$의 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$의 꼴로 바꾸어 푼다.

절댓값을 포함한 일차부등식

일반적으로 양수 a와 절댓값을 포함한 부등식에 대하여 다음이 성립한다.

① $|x|< a$이면 $-a< x< a$이다.

② $|x|> a$이면 $x<-a$ 또는 $x> a$이다.

절댓값을 포함한 부등식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0 이상인 경우와 0 미만인 경우로 범위를 나누어 절댓값 기호를 없애고 푼다. 절댓값 기호 안의 식이 모두 일차식이고 절댓값 기호를 2개 포함하고 있을 때, x의 값의 범위는 3가지로 나누어 푼다.

이차부등식과 이차함수 사이의 관계

① 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $y>0$인 x의 값의 범위, 즉 이차함수의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다. 또한 이차부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해는 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해와 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해를 합쳐 놓은 것과 같다.

② 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $y<0$인 x의 값의 범위, 즉 이차함수의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다. 또한 이차부등식 $ax^2+bx+c \leq 0$의 해는 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해와 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해를 합쳐 놓은 것과 같다.

이차부등식의 풀이

양수 a에 대하여 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수에 따라 분류하자.

$i)$ 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때,

서로 다른 두 점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라고 하면 다음이 성립한다.

① $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이며 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해는 $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$이다.

② $ax^2+bx+c<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$이며 $ax^2+bx+c\leq 0$의 해는 $\alpha\leq x\leq\beta$이다.

$ii)$ 이차함수의 그래프가 x축과 한 점에서 만날 때,

x축과 만나는 점의 x좌표를 α라고 하면

① $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x\neq\alpha$인 모든 실수이며 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해는 모든 실수이다.

② $ax^2+bx+c<0$의 해는 없으며 $ax^2+bx+c\leq 0$의 해는 $x=\alpha$이다.

$iii)$ 이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않을 때,

① $ax^2+bx+c>0$의 해는 모든 실수이며 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해도 모든 실수이다.

② $ax^2+bx+c<0$의 해는 없으며 $ax^2+bx+c\leq 0$의 해도 없다.

한편, 연립부등식에서 각 부등식의 차수를 비교하여 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식일 때, 이 연립부등식을 연립이차부등식이라고 한다. 연립일차부등식과 같이 연립이차부등식의 해는 각 부등식의 해를 구하여 이들의 공통부분을 구한다.

수직선 위의 두 점 사이의 거리

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$ 사이의 거리는 x_1, x_2의 대소에 관계없이 한 수에서 다른 수를 뺀 후, 그 절댓값으로 구할 수 있다. 즉, $\overline{\mathrm{AB}}=|x_2-x_1|=|x_1-x_2|$이다. 특히 수직선 위의 원점 $\mathrm{O}(0)$와 점 $\mathrm{A}(x_1)$ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{OA}}=|x_1|$이다.

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리를 구하기 위해 피타고라스 정리를 이용하자.

점 A를 지나고 y축에 수직인 직선과 점 B를 지나고 x축에 수직인 직선의 교점을 C라고 하면

점 C의 좌표는 $(x_2,\ y_1)$이다. 이때 $\overline{\mathrm{AC}}=|x_2-x_1|$, $\overline{\mathrm{BC}}=|y_2-y_1|$이고 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{C}=90^\circ$인

직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$이다.

따라서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이다.

특히 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$이다.

선분을 내분하는 점의 좌표

선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n$ $(m>0,\ n>0)$일 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분한다고 하며, 점 P를 선분 AB의 내분점이라고 한다. 또 $m \neq n$일 때, 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점은 선분 BA를 $m:n$으로 내분하는 점과 서로 다르다. 실제로 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점은 선분 BA를 $n:m$으로 내분하는 점이다.

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 $\mathrm{P}(x)$의 좌표를 구해보자.

$\overline{\mathrm{AP}}=|x-x_1|$, $\overline{\mathrm{PB}}=|x-x_2|$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n$에서 $|x-x_1|:|x-x_2|=m:n$이므로

$n|x-x_1|=m|x-x_2|$이다. 한편, $(x-x_1)(x-x_2)<0$이므로 $n(x-x_1)=-m(x-x_2)$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(x)$의 좌표는 $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$이다.

특히 $m=n$일 때 점 P는 선분 AB의 중점이 되며, 그 점의 좌표는 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$이다.

동일하게 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$이다.

특히 $m=n$일 때 점 P는 선분 AB의 중점이 되며, 그 점의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$이다.

삼각형의 무게중심의 좌표

세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M

이라고 하면 무게중심 G는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이다. 점 M의 좌표는 $\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$

이므로 점 G의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

스튜어트 정리

삼각형 ABC의 꼭짓점 A, B, C의 대변의 길이를 각각 a, b, c라고 할 때, 적당한 두 양수 m, n에

대하여 $a=m+n$으로 표현할 수 있다. 즉, $\overline{\mathrm{BP}}=m$, $\overline{\mathrm{PC}}=n$인 선분 BC 위의 점 P가 존재하며,

이때 점 P는 선분 BC를 $m:n$으로 내분하는 점이다. $\overline{\mathrm{AP}}=d$라 하면 다음이 성립한다.

$$b^2m+c^2n=a(d^2+mn)$$

스튜어트 정리는 코사인 법칙에 따라 다음과 같이 증명할 수 있다.

$\angle \mathrm{APB}=\theta_1$, $\angle \mathrm{APC}=\theta_2$라 할 때, $c^2=m^2+d^2-2dm\cos\theta_1$, $b^2=n^2+d^2-2dn\cos\theta_2$가 성립한다.

한편 $\cos\theta_2=\cos(\pi-\theta_1)=-\cos\theta_1$이므로 $b^2=n^2+d^2+2dn\cos\theta_1$이 성립한다.

따라서 $b^2m+c^2n=nm^2+n^2m+(m+n)d^2=(m+n)(mn+d^2)=a(mn+d^2)$이 성립한다.

혹은 스튜어트 정리는 피타고라스 정리를 이용하여 다음과 같이 증명할 수 있다.

꼭짓점 A로부터 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=h$, $\overline{\mathrm{PH}}=x$라 할 수 있다.

$\triangle \mathrm{ADH}$, $\triangle \mathrm{ABH}$, $\triangle \mathrm{AHC}$ 각각의 삼각형에 피타고라스 정리를 이용하면, $h^2+x^2=d^2 \cdots$ ①

$h^2+(m+x)^2=c^2 \cdots$ ②, $h^2+(n-x)^2=b^2 \cdots$ ③이 성립한다. ②, ③을 전개하고 ①을 대입하자.

$d^2+m^2+2mx=c^2 \cdots$ ④, $d^2+n^2-2nx=b^2 \cdots$ ⑤에서 ($n\times$④)의 양변과 ($m\times$⑤)의 양변을 더하면

$(m+n)(d^2+mn)=b^2m+c^2n$이다. 즉, $m+n=a$에서 $b^2m+c^2n=a(d^2+mn)$이 성립한다.

특히 $m=n$일 때 다음이 성립하며, 이를 중선정리라 한다.

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\left(\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2\right)$$

선분을 외분하는 점의 좌표

선분 AB의 연장선 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{BQ}}=m:n\ (m>0,\ n>0)$일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m:n$으로 외분한다고 하며, 점 Q를 선분 AB의 외분점이라고 한다. 특히 $m=n$이면 선분 AB의 연장선 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{BQ}}=1:1$이므로 두 점 A, B는 같은 점이 되어 선분의 외분점이 존재하지 않는다. 따라서 $m\neq n$이며, $m>n$일 때 점 Q는 선분 AB의 연장선 중 B쪽, $m<n$일 때 점 Q는 선분 AB의 연장선 중 A쪽에 있다. 한편, $m>n$일 때 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q에 대하여 점 B는 선분 AQ를 $(m-n):n$으로 내분하는 점이다.

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 $\mathrm{Q}(x)$의 좌표를 구해보자.

$\overline{\mathrm{AQ}}=|x-x_1|$, $\overline{\mathrm{BQ}}=|x-x_2|$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{BQ}}=m:n$에서 $|x-x_1|:|x-x_2|=m:n$이므로

$n|x-x_1|=m|x-x_2|$이다. 한편, $(x-x_1)(x-x_2)>0$이므로 $n(x-x_1)=m(x-x_2)$이다.

따라서 점 $\mathrm{Q}(x)$의 좌표는 $x=\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$이다.

동일하게 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$

$(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$이다.

외분하는 점의 좌표를 구하는 공식은 내분하는 점의 좌표를 구하는 공식에 n 대신 $-n$을 대입하면 얻을 수 있으며, 이것은 방향의 개념을 생각하면 이해할 수 있다.

한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$이다.

한편, 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 y축에 수직인 직선의 방정식은 $y=y_1$이다.

서로 다른 두 점을 지나는 직선의 방정식

서로 다른 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$이다.

따라서 $x_1 \neq x_2$일 때, $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$이고 $x_1=x_2$일 때, $x=x_1$이다.

일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형

$x,\ y$에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$의 꼴로 나타낼 수 있다. 한편 $x,\ y$에 대한 일차방정식

$ax+by+c=0$은 $b \neq 0$일 때, $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$이므로 기울기가 $-\dfrac{a}{b}$, y절편이 $-\dfrac{c}{b}$인 직선을 나타내고

$b=0,\ a \neq 0$일 때, $x=-\dfrac{c}{a}$이므로 x절편이 $-\dfrac{c}{a}$이고 x축에 수직인 직선을 나타낸다.

일반적으로 좌표평면 위의 직선의 방정식은 모두 $x,\ y$에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$의 꼴로

나타낼 수 있고, $x,\ y$에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형은 항상 직선이 된다.

역으로 $a \neq 0,\ b \neq 0$일 때, x절편이 a이고 y절편이 b인 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$이다.

한편 일차방정식 $ax+by+c=0$이 도형을 나타내려면 이 식은 $x,\ y$에 대하여 일차방정식이어야 한다.

따라서 a와 b 중 적어도 하나는 0이 아니어야 한다. 즉 $a^2+b^2 \neq 0$이다.

두 직선의 평행 조건

두 직선의 기울기가 같으면 두 직선이 x축과 만나서 생기는 두 동위각의 크기가 같으므로 두 직선은 서로 평행하다. 거꾸로 두 직선이 평행하면 x축과 만나서 생기는 두 동위각의 크기가 같으므로 두 직선의 기울기가 같다. 따라서 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에 대하여 두 직선의 평행 조건은 다음과 같다. (단, $m=m'$, $n=n'$이면 두 직선은 일치한다.)

① $m=m'$, $n\neq n'$이면 두 직선은 서로 평행하다.

② 두 직선이 서로 평행하면 $m=m'$, $n\neq n'$이다.

또한, 두 직선 l, l'이 서로 평행한 것을 기호로 $l \mathbin{/\!/} l'$과 같이 나타낸다.

두 직선의 수직 조건

두 직선이 수직이면 두 직선의 교점과 각각의 직선 위의 특정한 점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형은 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 이용할 수 있다. 거꾸로 피타고라스 정리가 성립하는 삼각형은 직각삼각형이다. 따라서 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에 대하여 두 직선의 수직 조건은 다음과 같다.

① 두 직선이 서로 수직이면 $mm'=-1$이다.

② $mm'=-1$이면 두 직선은 서로 수직이다.

두 직선 l, l'이 서로 수직인 것을 기호로 $l \perp l'$과 같이 나타낸다. 한편 두 직선이 수직일 때, 한 직선의 기울기가 0이면 이 직선은 y축에 수직이므로 다른 한 직선은 x축에 수직이다.

점과 직선 사이의 거리

평면 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 P를 지나지 않는 직선 $l : ax+by+c=0$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$라고 하면 선분 PH의 길이가 점 P와 직선 l 위의 임의의 점 사이의 거리의 최솟값이고 이를 점 P와 직선 l 사이의 거리라고 한다. $a \neq 0,\ b \neq 0$일 때, 직선 l의 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$이고 직선 PH는 직선 l에 수직이므로 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-1$에서 $\dfrac{x_2-x_1}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{b}$이다. 이 식의 값을 k로 놓으면 $x_2-x_1=ak,\ y_2-y_1=bk$이므로 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{k^2(a^2+b^2)}=|k|\sqrt{a^2+b^2}$ 이다. 이때 점 $\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$는 직선 $l : ax+by+c=0$위의 점이고 $x_2-x_1=ak,\ y_2-y_1=bk$이므로 $a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0$이다. 따라서 $k=-\dfrac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$이므로 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

> 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

한편 직선 l은 $a=0,\ b \neq 0$일 때 y축에 수직이고 $a \neq 0,\ b=0$일 때 x축에 수직이며 이 경우에도 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

또한 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 $d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

두 직선 $l,\ l'$이 한 점에서 만날 때, 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점에서 두 직선 $l,\ l'$에 이르는 거리가 같음을 이용하여 각의 이등분선의 방정식을 구할 수 있다.

정삼각형의 높이

정삼각형 ABC의 내부에 한 점 P를 잡고 점 P를 지나고 세 변 AB, BC, CA에 수직인 직선을 작도한 후, 그 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 점 A를 지나고 선분 BC에 수직인 직선을 그린 후 그 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{PD}}+\overline{\mathrm{PE}}+\overline{\mathrm{PF}}$가 성립한다.

원의 방정식

좌표평면 위의 임의의 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$이고, 이 식의 양변을 제곱하면 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이다. 거꾸로 이 방정식을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 모두 이 원 위에 있다. 따라서 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식이라고 한다. 특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$이다. 즉, 원의 방정식은 원의 둘레를 나타내며 원의 넓이는 원의 둘레로 둘러싸인 내부의 넓이이다.

이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형

좌표평면에서방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 전개하여 정리하면 $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$ 이다. 이때 $-2a=A$, $-2b=B$, $a^2+b^2-r^2=C$라고 하면 식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0 \ \cdots$ ①의 꼴로 나타낼 수 있다. 한편 ①을 변형하면 $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$이므로

$A^2+B^2-4C>0$이면 방정식 ①은 중심이 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$ 인 원을 나타낸다. 또한 원의 방정식은 x^2항과 y^2항을 포함하며 xy항이 없는 이차방정식이다.

좌표축에 접하는 원

x축에 접하는 원의 중심의 y좌표의 절댓값이 원의 반지름의 길이와 같다. 또한 y축에 접하는 원의 중심의 x좌표의 절댓값이 원의 반지름의 길이와 같다.

원과 직선의 위치 관계

원의 방정식은 미지수 x, y에 대한 이차방정식이고 직선의 방정식은 미지수 x, y에 대한 일차방정식이다. 따라서 원과 직선의 교점은 두 방정식을 동시에 만족시키는 x, y의 값을 좌표로 갖는다.

y를 소거하여 얻는 x에 대한 이차방정식의 근은 교점의 좌표이므로 이차방정식의 근의 개수와 교점의 개수는 같다. 그러므로 이차방정식의 판별식을 이용하면 직접 근을 구하지 않고 교점의 개수를 파악할 수 있으며 이로부터 원과 직선의 위치관계를 파악할 수 있다.

일반적으로 원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2+(mx+n)^2=r^2$, 즉 $(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$ $\cdots$ ①의 실근의 개수와 같다. 따라서 이차방정식 ①의 판별식을 D라고 하면 D의 부호에 따라 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

판별식 D의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
원과 직선의 교점의 개수	2	1	0
원과 직선의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.

혹은 원의 중심에서 직선까지의 거리 d와 원의 반지름의 길이 r의 크기를 비교한 후, 그에 따른 원과 직선의 위치 관계를 찾을 수 있다.

d와 r의 대소 관계	$d<r$	$d=r$	$d>r$
원과 직선의 교점의 개수	2	1	0
원과 직선의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.

기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$에 기울기가 m인 직선 $y=mx+k$가 접할 때, k의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

i) 판별식을 이용하는 경우,

직선의 방정식을 원의 방정식에 대입하여 얻은 이차방정식 $x^2+(mx+k)^2=r^2$이 중근을 갖는다.

따라서 이차방정식 $(m^2+1)x^2+2mkx+k^2-r^2=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=0$이어야 한다. 즉,

$D=-4k^2+4(m^2+1)r^2=0$이므로 $k=\pm r\sqrt{m^2+1}$ 이다.

ii) 점과 직선 사이의 거리를 이용하는 경우

직선 $mx-y+k$와 원점 사이의 거리가 반지름 r과 같다. 즉, $\dfrac{|k|}{\sqrt{m^2+1}}=r$에서 $k=\pm r\sqrt{m^2+1}$ 이다.

따라서 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$ 이다.

원 위의 한 점에서 그은 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에 대해 $x_1\neq 0,\ y_1\neq 0$일 때 점 P에서 그은 접선은 원의 중심과

접점을 연결하는 직선 $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$와 수직이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{y_1}{x_1}$이다. 즉, $y-y_1=-\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

이므로 $x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2=r^2$ $\cdots$ ①이다. 또한 $x_1=0$일 때와 $y_1=0$일 때 각각 ①이 성립한다.

따라서 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 그은 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

점의 평행이동

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 P'의 좌표는 $(x+a,\ y+b)$이다. 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하는 것을 $(x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$와 같이 나타내기도 한다.

도형의 평행이동

방정식 $f(x,\ y)=0$은 일반적으로 좌표평면 위의 도형을 나타낸다. 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라고 하면 $x'=x+a,\ y'=y+b$이므로 $x=x'-a,\ y=y'-b$이다. 이것을 $f(x,\ y)=0$에 대입하면 $f(x'-a,\ y'-b)=0$을 얻는다. (이때 $x',\ y'$을 특정한 상수로, $x,\ y$는 변수로 간주하자.)

따라서 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 방정식 $f(x-a,\ y-b)=0$이 나타내는 도형 위의 점이다.

즉, 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a,\ y-b)=0$이다.

x축, y축, 원점에 대한 점의 대칭이동

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_1의 좌표는 $(x,\ -y)$, y축에 대하여 대칭이동한 점 P_2의 좌표는 $(-x,\ y)$, 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_3의 좌표는 $(-x,\ -y)$이다.

x축, y축, 원점에 대한 도형의 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

① x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x,\ y)=0$이다.

② y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ y)=0$이다.

③ 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ -y)=0$이다.

직선 $y=x$에 대한 점의 대칭이동

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라고 하면 직선 $y=x$는 선분 PP'의 수직이등분선이다. 따라서 선분 PP'의 중점 $\mathrm{M}\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\frac{x+x'}{2}=\frac{y+y'}{2}$으로부터 $x+x'=y+y'$ $\cdots$ ①이다. 또 직선 PP'과 직선 $y=x$는 서로 수직이므로 직선 PP'의 기울기는 -1이다. 즉 $\frac{y'-y}{x'-x}=-1$로부터 $x-x'=y'-y$ $\cdots$ ②이다. ①, ②를 연립하면 $x'=y,\ y'=x$이므로 점 P'의 좌표는 $(y,\ x)$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P'의 좌표는 $(y,\ x)$이다.

직선 $y=x$에 대한 도형의 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라고 하면 $x'=y,\ y'=x$이므로 $x=y',\ y=x'$이다. 이것을 $f(x,\ y)=0$에 대입하면 $f(y',\ x')=0$이므로 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형 위의 점이다.

따라서 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,\ x)=0$이다.

대칭이동을 활용한 거리의 합의 최솟값

두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 $(x_1-y_1)(x_2-y_2)>0$일 때, 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 A'이라고 하자. 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값을 가질 때 점 P는 선분 $\mathrm{A'B}$와 직선 $y=x$의 교점이 된다.

집합과 원소

어떤 조건에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것의 모임을 집합이라고 한다.

또 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 원소라고 한다.

a가 집합 A의 원소일 때, a는 집합 A에 속한다고 하며, 이것을 기호로 $a \in A$와 같이 나타낸다.

b가 집합 B의 원소가 아닐 때, b는 집합 B에 속하지 않는다고 하며, 이것을 기호로 $b \notin B$와 같이 나타낸다.

집합의 표현

집합에 속하는 모든 원소를 $\{\ \}$안에 모두 나열하여 집합을 표현하는 방법을 원소나열법이라고 한다.

집합을 원소나열법으로 나타낼 때는 같은 원소를 중복하여 쓰지 않으며 원소를 나열하는 순서는 생각하지 않는다.

원소나열법은 원소를 알아보기에는 편리하지만, 원소의 개수가 많은 경우에는 모두 나열하기가 불편하다. 원소가 많고 원소 사이에 일정한 규칙이 있을 때는 '$\cdots$'을 사용하여 원소 중 일부를 생략하여 나타낸다.

한편 원소들이 가지는 공통된 성질을 조건으로 제시하여 집합을 나타내는 방법을 조건제시법이라고 한다. 조건제시법은 원소의 개수가 많을 때에 집합을 쉽게 표현할 수 있지만, 어떤 원소가 있는지를 쉽게 판단할 수 가 없다.

한편 집합을 나타낼 때 그림을 이용하기도 하는데, 이를 벤다이어그램이라고 한다.

원소의 개수에 따른 집합의 분류

원소가 유한개인 집합을 유한집합이라 하고, 원소가 무수히 많은 집합을 무한집합이라고 한다.

한편 원소가 하나도 없는 집합을 공집합이라고 하며, 이것을 기호로 $\varnothing$와 같이 나타낸다.

특히 집합 A가 유한집합일 때, 집합 A의 원소의 개수를 기호로 $n(A)$와 같이 나타낸다.

집합 사이의 포함 관계

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, 집합 A를 집합 B의 부분집합이라고 하며, 이것을 기호로 $A \subset B$와 같이 나타낸다. 이때 'A는 B에 포함된다.' 또는 'B는 A를 포함한다.'고 한다.

한편, 집합 A가 집합 B의 부분집합이 아닐 때, 이것을 기호로 $A \not\subset B$와 같이 나타낸다.

한편 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이며, 공집합은 모든 집합의 부분집합으로 생각한다.

즉 집합 A에 대하여 $A \subset A$, $\varnothing \subset A$이다.

두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$이고 $B \subset A$일 때, A와 B는 서로 같다고 하며, 이것을 기호로 $A = B$와 같이 나타낸다. 한편 두 집합 A, B가 서로 같지 않을 때, 이것을 기호로 $A \neq B$와 같이 나타낸다. 집합 A, B에 대하여 A는 B의 부분집합이지만 서로 같지 않을 때, 즉 $A \subset B$이고 $A \neq B$ 일 때, A를 B의 진부분집합이라고 한다.

한편 세 집합 A, B, C에 대하여 $A \subset B$이고 $B \subset C$이면 $A \subset C$임을 알 수 있다.

원소가 n개인 집합의 부분집합의 개수

각각의 원소에 대하여 특정한 원소를 포함하는 부분집합인 경우와 특정한 원소를 포함하지 않는 부분집합인 경우로 2개의 경우의 수가 생기므로 원소가 n개인 집합의 부분집합의 개수는 2^n이다.

집합의 연산

두 집합 A, B에 대하여 A 또는 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 합집합이라고 하며, 이것을 기호로 $A \cup B$와 같이 나타낸다. 즉, $A \cup B$를 조건제시법으로 나타내면 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$이다.

또 두 집합 A, B에 대하여 A에도 속하고 B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 교집합이라고 하며, 이것을 기호로 $A \cap B$와 같이 나타낸다. 즉 $A \cap B$을 조건제시법으로 나타내면 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 그리고 } x \in B\}$이다.

두 집합 A, B에 대하여 $A \cap B = \varnothing$일 때, 두 집합 A와 B는 서로소라고 한다. 이때 집합 A와 $\varnothing$ 사이에는 $A \cap \varnothing = \varnothing$인 관계가 성립하므로 공집합은 모든 집합과 서로소이다.

합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계

일반적으로 두 유한집합 A, B에 대하여 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$가 성립한다.

특히 A, B가 서로소이면 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$이다.

해집합의 연산

방정식 $f(x)=0$의 해만을 원소로 갖는 집합을 A, 방정식 $g(x)=0$의 해만을 원소로 갖는 집합을 B라 할 때, 방정식 $f(x)g(x)=0$의 해만을 원소로 갖는 집합은 $A\cup B$이고 방정식 $f(x)=g(x)=0$의 해만을 원소로 갖는 집합은 $A\cap B$이다.

따라서 방정식 $f(x)g(x)=0$의 서로 다른 해의 개수는 (방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 해의 개수) $+$ (방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 해의 개수) $-$ (방정식 $f(x)=g(x)=0$의 서로 다른 해의 개수)이다.

집합의 연산법칙

일반적으로 두 집합 A, B에 대하여 다음이 성립한다.

$$A \cup B = B \cup A, \ A \cap B = B \cap A$$

이것을 각각 합집합과 교집합에 대한 교환법칙이라고 한다.

일반적으로 세 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

이것을 각각 합집합과 교집합에 대한 교환법칙이라고 한다.

일반적으로 세 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

이것을 교집합의 합집합에 대한 분배법칙, 합집합의 교집합에 대한 분배법칙이라고 한다.

여집합과 차집합

어떤 집합에 대하여 그 집합의 부분집합을 생각할 때, 처음에 주어진 집합을 전체집합이라고 하며, 이것을 기호로 U와 같이 나타낸다. 집합 A가 전체집합 U의 부분집합일 때, U의 원소 중에서 A에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 U에 대한 A의 여집합이라고 하며, 이것을 기호로 A^C과 같이 나타낸다. 즉 집합 A의 여집합을 조건제시법으로 나타내면 $A^C = \{x \mid x \in U \text{ 그리고 } x \notin A\}$이다.

두 집합 A, B에 대하여 A에 속하지만 B에는 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 A에 대한 B의 차집합이라고 하며, 이것을 기호로 $A-B$와 같이 나타낸다. 즉 $A-B$를 조건제시법으로 나타내면 $A-B = \{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$이다. 즉 $A^C = U-A$이다.

한편, $A-B \neq B-A$이므로 차집합에 대한 교환법칙이 성립하지 않는다.

또한 $\{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\} = \{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \in B^C\}$이므로 $A-B = A \cap B^C$이다.

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 여집합과 차집합의 성질을 정리하면 다음과 같다.

① $A-B = A \cap B^C$ ② $U^C = \varnothing$, $\varnothing^C = U$ ③ $A \cup A^C = U$, $A \cap A^C = \varnothing$ ④ $(A^C)^C = A$

드모르간 법칙

드모르간 법칙은 두 집합의 합집합의 여집합과 교집합의 여집합 사이의 관계를 나타내는 성질이다.

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 드모르간 법칙을 정리하면 다음과 같다.

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

명제와 조건, 진리집합과 명제의 부정

참인지 거짓인지를 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식을 명제라고 하며, 변수를 포함하는 문장이나 식이 변수의 값에 따라 참, 거짓이 판명될 때, 이 문장이나 식을 조건이라고 한다.

즉, 참인 문장과 식 그리고 거짓인 문장과 식 모두 명제이며, 각각을 ‘참인 명제’와 ‘거짓인 명제’라 하며, 방정식과 부등식은 변수의 값에 따라 참, 거짓이 정해질 수 있으므로 조건이다.

또 전체집합 U의 원소 중에서 어떤 조건을 참이 되게 하는 모든 원소의 집합을 그 조건의 진리집합이라고 한다. 특별한 말이 없으면 전체집합 U는 실수 전체의 집합이다. 명제와 조건은 보통 p, q 등으로 나타내고, 조건 p, q의 진리집합은 P, Q로 나타낸다. 조건의 진리집합은 전체집합의 부분집합이므로 조건을 말하기 앞서 전체집합이 무엇인지 알아야 한다.

명제 또는 조건 p에 대하여 ‘p가 아니다.’를 p의 부정이라고 하며, 이것을 기호로 $\sim p$와 같이 나타낸다. 명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다. 또한 명제 $\sim p$의 부정은 p이다. 즉 $\sim(\sim p)=p$이다.

전체집합 U에서 조건 p의 진리집합을 P라고 하면 전체집합 U의 원소 중에서 $\sim p$를 참이 되게 하는 원소는 P의 원소가 아니므로 $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.

'모든', '어떤'이 들어 있는 명제

전체집합 U에서 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때, 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'가 참이면 조건 p의 진리집합을 P가 전체집합 U와 같고, 거짓이면 P가 U와 같지 않다.

또한 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'는 $P=U$이면 참이고, $P \neq U$이면 거짓이다.

전체집합 U에서 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때, 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'가 참이면 P가 공집합이 아니고, 거짓이면 P가 공집합이다.

또한 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 $P \neq \varnothing$이면 참이고, $P=\varnothing$이면 거짓이다.

즉 '모든'이 들어 있는 명제는 성립하지 않는 예가 하나만 있어도 거짓인 명제가 되고, '어떤'을 포함한 명제는 성립하는 예가 하나만 있어도 참인 명제이다.

명제 '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정은 'p가 아닌 x가 있다.', 즉 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'가 된다. 또 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 'p인 x가 없다.', 즉 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'가 된다.

명제 $p \rightarrow q$의 참, 거짓과 진리집합 사이의 관계

'p이면 q이다.'의 꼴의 명제를 기호로 $p \rightarrow q$와 같이 나타내고 p를 가정, q를 결론이라고 한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때 다음이 성립한다.

① 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이고, $P \subset Q$이면 명제 $p \rightarrow q$는 참이다.

② 명제 $p \rightarrow q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이고, $P \not\subset Q$이면 명제 $p \rightarrow q$는 거짓이다.

명제 $p \rightarrow q$가 거짓임을 보일 때에는 조건 p는 참이 되게 하지만 조건 q는 거짓이 되게 하는 원소의 예를 들어도 된다. 이와 같은 예를 반례라고 한다.

명제 $p \rightarrow q$의 역과 대우

명제 $p \rightarrow q$의 가정과 결론을 서로 바꾸어 놓은 명제 $q \rightarrow p$를 명제 $p \rightarrow q$의 역이라고 한다.

한편 명제 $p \rightarrow q$에서 가정 p와 결론 q를 각각 부정하여 서로 바꾸어 놓은 명제 $\sim q \rightarrow \ \sim p$를 명제 $p \rightarrow q$의 대우라고 한다. 즉, 명제 $\sim q \rightarrow \ \sim p$의 역 $\sim p \rightarrow \ \sim q$는 명제 $q \rightarrow p$의 대우이다.

전체집합 U에 대하여 명제 $p \rightarrow q$에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 두 조건 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이다. 이때 $p \rightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이고, $P \subset Q$이면 $Q^C \subset P^C$이면 $P \subset Q$이므로 명제 $p \rightarrow q$가 참이다.

따라서 두 명제 $p \rightarrow q$와 $\sim q \rightarrow \ \sim p$는 참, 거짓이 같음을 알 수 있다.

필요조건, 충분조건 그리고 필요충분조건

명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, 이것을 기호로 $p \Rightarrow q$와 같이 나타낸다. 이때 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이라고 한다.

이와 같이 두 조건 p, q에 대하여 명제 $p \rightarrow q$와 $q \rightarrow p$가 모두 참일 때, $p \Rightarrow q$이고 $q \Rightarrow p$이다.

이때 p는 q이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건이다. 이것을 기호로 $p \Leftrightarrow q$와 같이 나타낸다.

이때 p는 q이기 위한 필요충분조건이라고 하며, q도 p이기 위한 필요충분조건이라고 한다.

$p \Leftrightarrow q$에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, $p \Rightarrow q$이면 $P \subset Q$, $q \Rightarrow p$이면 $Q \subset P$이므로 $P = Q$가 성립한다. 또한 $P = Q$이면 $p \Leftrightarrow q$가 성립한다.

문자가 사용된 식과 관련되어 필요조건과 충분조건을 판정할 때에는 문자가 어떤 범위에서 값을 가질 수 있는지 파악하게 한다. 문자가 자연수인 경우와 정수인 경우, 그리고 실수인 경우에 참과 거짓이 달라질 수도 있다.

정의, 증명 그리고 정리

용어의 뜻을 명확하게 정한 문장을 그 용어의 정의라고 한다. 어떤 명제가 참임을 보이는 과정을 증명이라고 하며, 증명된 명제 중에서 기본이 되는 명제를 정리라고 한다.

여러 가지 증명 방법

명제의 참, 거짓과 진리집합 사이의 관계에서 $p \Rightarrow q \Leftrightarrow P \subset Q \Leftrightarrow P \cap Q = P$이다. 이때 P와 Q

그리고 각각의 여집합에 대해 교집합과 합집합을 이용한 모든 식을 표로 정리한 결과는 다음과 같다.

① $P \cap Q = P$	② $P \cup Q = Q$	③ $P^C \cap Q = Q - P$	④ $P^C \cup Q = P^C$
⑤ $P \cap Q^C = \varnothing$	⑥ $P \cup Q^C = (Q - P)^C$	⑦ $P^C \cap Q^C = Q^C$	⑧ $P^C \cup Q^C = P^C$

이때 8 이하의 자연수 n에 대하여 n번째 식은 $(9-n)$번째 식의 양변에 드모르간 법칙을 이용하여

여집합을 고려한 결과와 동일하다. 또한 ③과 ⑥은 $P \not\subset Q$일 때도 성립하므로 ①과 동치인 식은 ②와

⑦, 그리고 ④와 ⑤이다. 즉, ①이 성립함을 보이기 위해 ⑤ 또는 ⑦이 성립함을 보여도 된다.

이때 ⑤를 고려하는 경우를 귀류법이라 하며, ⑦을 고려하는 경우를 대우증명법이라 한다.

대우증명법

명제 $p \rightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \ \sim p$도 참이므로 어떤 명제가 참임을 보이는 대신 그 대우가 참임을 보여도 된다. 이를 대우증명법이라 한다.

대우증명법을 이용하여 명제 '자연수 n에 대하여 n^2이 홀수이면 n도 홀수이다.'가 참임을 증명하는 과정은 다음과 같다.

> 주어진 명제의 대우 '자연수 n에 대하여 n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.'가 참임을 보이자.
>
> 자연수 n이 짝수이면 $n=2k$(k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로 $n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$이다. 여기서 $2k^2$이 자연수이므로 n^2은 짝수이다. 따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제 '자연수 n에 대하여 n^2이 홀수이면 n도 홀수이다.'가 참이다.

귀류법

어떤 명제를 직접 증명하기 어려울 때, 그 명제의 결론을 부정한 다음 모순이 생기는 것을 보여 증명하기도 한다. 이와 같이 명제 $p \rightarrow q$가 참임을 증명하고자 할 때, 그 명제의 결론 q를 부정하면 명제의 가정이나 참이라고 알려진 사실에 모순이 된다는 것을 밝혀 명제 $p \rightarrow q$가 참임을 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

귀류법을 이용하여 명제 '$\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.'가 참임을 증명하는 과정은 다음과 같다.

> $\sqrt{2}$가 유리수라고 하면 $\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$(m, n은 서로소인 자연수)과 같이 나타낼 수 있다.
>
> $\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$의 양변을 제곱하여 정리하면 $n^2=2m^2$ $\cdots$ ①이다. ①에서 n^2은 2의 배수이므로 n도 2의 배수이다. 즉 $n=2k$(k는 자연수)로 놓고 ①에 대입하여 정리하면 $m^2=2k^2$이다. m^2이 2의 배수이므로 m도 2의 배수이다. 따라서 m, n이 모두 2의 배수가 되어 m, n이 서로소라는 조건에 모순이다. 즉 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

절대부등식

문자에 어떤 실수를 대입하여도 항상 성립하는 부등식을 절대부등식이라고 한다. 주어진 부등식이 절대부등식임을 증명할 때는 그 부등식이 모든 실수에 대하여 항상 성립함을 보여야 한다.

부등식이 증명할 때는 실수 $a,\ b$에 대하여 다음과 같은 실수의 성질이 자주 이용된다.

① $a > b \Leftrightarrow a-b > 0$ ② $a^2 \geq 0,\ a^2+b^2 \geq 0$ ③ $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$

④ $|a| \geq a$ ⑤ $|a|^2=a^2,\ |ab|=|a||b|$ ⑥ $a>0,\ b>0$일 때, $a>b \Leftrightarrow a^2>b^2$

산술평균과 기하평균, 그리고 조화평균

두 양수 a, b에 대하여 다음의 절대부등식이 성립한다.

$a=(\sqrt{a})^2$, $b=(\sqrt{b})^2$, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ 이므로 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$이다.

따라서 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ $\cdots$ ①이며, 여기서 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

$$\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(a+b)-2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \geq 0$$이다.

따라서 $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$ $\cdots$ ②이며, 여기서 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

이때 $\dfrac{a+b}{2}$는 산술평균이고 $\sqrt{ab}$는 기하평균이며 $\dfrac{2ab}{a+b}$는 조화평균이라 한다. ①과 ②에서

산술평균과 기하평균, 그리고 조화평균에 대해 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$가 성립한다.

함수의 정의

공집합이 아닌 두 집합 X, Y에서 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝 지어주는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 대응이라고 한다. 이때 X의 원소 x에 Y의 원소 y가 대응하는 것을 기호로 $x \to y$와 같이 나타낸다. 특히 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응할 때, 이 대응 f를 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 하며, 기호로 $f : X \to Y$와 같이 나타낸다.

함수에서 'X의 각 원소'라는 의미는 'X의 원소 x가 하나도 빠짐없이 모두'라는 뜻이고, 'Y의 원소가 오직 하나씩만 대응'이라는 의미는 'X의 원소 x 하나에 Y의 원소 y가 두 개 이상 대응될 수 없다.'라는 뜻이다. 즉, 함수는 정의역의 둘 이상의 원소가 공역의 한 원소에 대응할 수 있지만 정의역의 한 원소가 공역의 둘 이상의 원소에 대응할 수 없다.

$f : X \to Y$에서 집합 X를 함수 f의 정의역, 집합 Y를 함수 f의 공역이라고 한다. 또 함수 f에 의하여 정의역 X의 원소 x가 공역 Y의 원소 y와 대응할 때, 이것을 기호로 $y = f(x)$와 같이 나타내고, $f(x)$를 x에서의 함숫값이라고 한다. 이때 함숫값 전체의 집합 $\{f(x) | x \in X\}$를 함수 f의 치역이라고 한다. 즉 치역 $f(X)$는 공역 Y의 부분집합이므로 $f(X) \subset Y$이다.

함수 f의 정의역이나 공역이 주어지지 않은 경우에 정의역은 함숫값 $f(x)$가 정의되는 실수 x의 값 전체의 집합으로, 공역은 실수 전체의 집합으로 생각한다.

다항식에서 식을 간단히 했을 때 서로 같은 경우는 등호를 사용하였다. 그러나 함수의 식이 다르다 하더라도 두 함수가 같을 수 있다. 두 함수 f, g의 정의역과 공역이 각각 서로 같고, 정의역에 속하는 모든 원소 x에 대하여 $f(x) = g(x)$일 때, 두 함수 f와 g는 서로 같다고 하며, 이것을 기호로 $f = g$와 같이 나타낸다. 즉, 등식 $f(x) = g(x)$는 x에서의 함숫값이 같다는 뜻이며 등식 $f = g$는 두 함수가 서로 같다는 뜻이다.

그래프의 정의

$f: X \to Y$에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 $(x,\ f(x))$ 전체의 집합 $\{(x,\ f(x)) | x \in X\}$를 함수 f의 그래프라고 한다. 특히 함수 f의 그래프는 함수 f의 정의역과 공역이 실수 전체의 집합의 부분집합일 때, 그래프의 각 원소 $(x,\ f(x))$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내어 그릴 수 있다. 즉 함수 f의 그래프를 그린다는 것은 그래프에 대한 기하적인 표시를 의미한다. 함수의 정의역의 원소의 개수가 유한개일 때, 그 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 유한개의 점으로 나타난다.

함수 f의 정의역의 각 원소 a에 대한 함숫값 $f(a)$는 오직 하나 존재한다. 따라서 함수 f의 그래프는 정의역의 각 원소 a에 대하여 직선 $x = a$와 오직 한 점에서 만난다.

여러 가지 함수

$f: X \to Y$에서 X에 속하는 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$일 때, 함수 f를 일대일함수라고 한다. 일대일함수임을 보이려면 '$f(x_1) = f(x_2)$이면 $x_1 = x_2$'를 이용해도 된다.

함수 f가 일대일함수이고 치역과 공역이 같을 때 함수 f를 일대일대응이라고 한다.

$f: X \to X$에서 정의역 X의 각 원소에 자기 자신을 대응할 때, 즉 $f(x) = x$일 때, 함수 f를 X에서의 항등함수라고 한다. 따라서 항등함수는 일대일대응이다.

$f: X \to Y$에서 정의역 X의 모든 원소에 공역 Y의 단 하나의 원소를 대응할 때, 즉 $f(x) = c$일 때, 함수 f를 상수함수라고 한다. 따라서 상수함수의 치역은 원소가 한 개로 이루어진 집합이며, 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 상수함수의 그래프는 y축에 수직인 직선으로 그려진다.

합성함수

공집합이 아닌 세 집합 X, Y, Z에 대하여 두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$가 주어졌을 때, X의 각 원소 x에 대응하는 함숫값 $f(x)$는 Y의 원소이다. 또 Y의 원소 $f(x)$에 대응하는 함숫값 $g(f(x))$는 Z의 원소이다. 즉 X의 각 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 X를 정의역, Z를 공역으로 하는 함수를 정의할 수 있는데, 이 함수를 f와 g의 합성함수라고 하며, 이것을 기호로 $g \circ f$와 같이 나타낸다. 즉 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합일 때만 합성함수 $g \circ f$가 정의된다.

또한 두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$의 합성함수 $g \circ f: X \rightarrow Z$에서 x의 함숫값을 기호로 $(g \circ f)(x)$와 같이 나타낸다. 이때 X의 각 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$가 대응하므로 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$가 성립한다. 따라서 f와 g의 합성함수를 $y = g(f(x))$와 같이 나타내기도 한다.

두 함수 f, g에 대하여 $g \circ f \neq f \circ g$이다. 즉 함수의 합성에 대하여 교환법칙은 성립하지 않는다.

또한, 세 함수 f, g, h에 대하여 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$가 성립한다. 즉 함수의 합성에 대하여 결합법칙이 성립한다. 따라서 괄호를 생략하여 $h \circ g \circ f$로 나타내기도 한다.

역함수

일반적으로 $f: X \to Y$가 일대일대응이면 Y의 임의의 원소 y에 대하여 $f(x)=y$인 X의 원소 x는 오직 하나 존재한다. 따라서 Y의 각 원소 y에 $f(x)=y$인 X의 원소 x를 대응하면 Y를 정의역, X를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 새로운 함수를 함수 f의 역함수라고 하며, 이것을 기호로 f^{-1}와 같이 나타낸다. 즉 $f^{-1}: Y \to X$, $x=f^{-1}(y)$이다.

함수 $f: X \to Y$의 역함수가 존재하고 $x \in X$, $y \in Y$일 때, $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$가 성립하므로 $(f^{-1} \circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$, $(f \circ f^{-1})(y)=f^{-1}(f(y))=f(x)=y$이다. 따라서 합성함수 $f^{-1} \circ f$는 X에서의 항등함수이고, 합성함수 $f \circ f^{-1}$는 Y에서의 항등함수이다.

일반적으로 함수를 나타낼 때는 정의역의 원소를 x, 치역의 원소를 y로 나타내므로 함수 $y=f(x)$의 역함수 $x=f^{-1}(y)$도 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$와 같이 나타낸다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 역함수를 구하는 순서는 다음과 같다.

i) $y=f(x)$가 일대일대응인지 확인한다.

ii) $y=f(x)$를 x에 대하여 정리하여 $x=f^{-1}(y)$의 꼴로 나타낸다.

iii) $x=f^{-1}(y)$에서 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

일반적으로 두 함수 f, g의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1})^{-1}=f$, $(f \circ g)^{-1}=g^{-1} \circ f^{-1}$이 성립한다.

역함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 한 점을 $(a,\ b)$라고 하면 $b=f(a) \Leftrightarrow a=f^{-1}(b)$이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ b)$에 대하여 점 $(b,\ a)$는 함수 $f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이다. 이때 점 $(a,\ b)$와 점 $(b,\ a)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

함수와 그 역함수의 그래프의 교점

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 주어진 함수와 직선 $Y=X$의 교점을 이용하여 구할 수 있다. 이때 주어진 함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$ 위에서만 만나는 것은 아니다. 아래의 명제가 참임을 증명해보자.

> ① 주어진 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점이 $(a,\ b)$이면 $(b,\ a)$도 교점이다.
>
> ② 함수 $f(x)$가 증가함수이면, 함수 $f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 모든 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

① : $a=b$인 경우 자명하다. $a \neq b$일 때, $f(a)=b \Leftrightarrow g(b)=a$이며 $g(a)=b \Leftrightarrow f(b)=a$이다.

② : 직선 $y=x$ 위에 존재하지 않는 어떠한 교점 $(a,\ b)$가 존재한다고 가정하자. ①이 성립하므로 점 $(b,\ a)$ 또한 두 그래프의 교점이다. 한편 $a \neq b$이므로 $a<b$ 또는 $a<b$이며, 증가함수의 정의에 따라 $a<b \Leftrightarrow f(a)=b<f(b)=a$ 또는 $a>b \Leftrightarrow f(a)=b>f(b)=a$인데 이는 모순이다.

한편, $f(x)$가 감소함수인 경우 직선 $y=x$ 위에 존재하지 않는 모든 교점은 ①에서 직선 $y=x$에 대해 대칭인 두 점씩 존재함을 확인할 수 있다.

유리식

정수 p, $q(q \neq 0)$에 대하여 $\frac{p}{q}$로 나타낼 수 있는 수를 유리수라고 한다. 이와 비슷하게 두 다항식 A, $B(B \neq 0)$에 대하여 $\frac{A}{B}$의 꼴로 나타낼 수 있는 식을 유리식이라고 한다. 특히 B가 0이 아닌 상수일 때 유리식 $\frac{A}{B}$는 다항식이므로 다항식도 유리식이다. 유리식 중에서 다항식이 아닌 유리식을 분수식이라고 한다. 즉 B가 상수가 아닌 일차 이상의 다항식일 때, $\frac{A}{B}$는 분수식이다.

유리식의 덧셈과 뺄셈은 유리수의 경우와 마찬가지로 분모가 같은 경우는 분자끼리 계산하며, 분모가 다른 경우 분모를 통분하여 계산한다.

유리식의 곱셈은 유리수의 경우와 마찬가지로 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 곱하여 계산하고 유리식의 나눗셈은 나누는 식의 분자와 분모를 바꾸어 곱한 후 계산한다.

유리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 유리함수라고 한다. 특히 $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 이 함수를 다항함수라고 한다. 일반적으로 다항함수가 아닌 유리함수에서 정의역이 주어지지 않은 경우에는 분모를 0으로 하지 않는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프 위의 점은 x의 절댓값이 커질수록 x축에 한없이 가까워지고, x의 절댓값이 작아질수록 y축에 한없이 가까워짐을 알 수 있다. 이와 같이 곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 점근선이라고 한다. 따라서 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프의 점근선은 x축과 y축이다. 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프의 성질은 다음과 같다.

① 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.

② $k>0$이면 그래프는 제 1, 3사분면 위에 있고,

$k<0$이면 그래프는 제 2, 4사분면 위에 있다.

③ x대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면 $-y=\dfrac{k}{-x}$이고, 이 식은 $y=\dfrac{k}{x}$와 같으므로

원점에 대하여 대칭이다.

④ 점근선은 x축과 y축이다.

⑤ $|k|$의 값이 커질수록 그래프는 원점에서 멀어진다.

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$에서 $c=0$이면 일차함수이며 $ad-bc=0$이면 상수함수이다.

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 꼴로 변형하여 그릴 수 있다. $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$는 함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$에서 x 대신 $x-p$, y 대신 $y-q$를 대입한 식이다. 따라서 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프는 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다. 이때 이 함수의 정의역은 $\{x|x\neq p$인 실수$\}$이고, 치역은 $\{y|y\neq q$인 실수$\}$이다. 유리함수의 그래프가 평행이동한 만큼 점근선도 평행이동한다.

즉 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프의 점근선인 두 직선 $x=0$, $y=0$은 평행이동하여 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 점근선인 두 직선 $x=p$, $y=q$가 된다. 또한 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프는 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에 대하여 대칭이므로 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 대칭점도 평행이동되어 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이 된다.

한편 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$는 일대일대응이므로 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수는 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$이다. 이때, $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 점근선은 두 직선 $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$이고 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$의 점근선은 두 직선 $x=\dfrac{a}{c}$, $y=-\dfrac{d}{c}$이다.

따라서 두 함수가 역함수 관계이면 그 점근선도 $y=x$에 대하여 대칭임을 추론할 수 있다.

무리식

근호 안에 문자를 포함하는 식 중에서 유리식으로 나타낼 수 없는 식을 무리식이라고 한다. 무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안에 있는 식의 값이 0 또는 양수가 되어야 하므로 무리식을 계산할 때는 (근호 안의 식의 값)≥ 0인 문자의 값의 범위에서만 생각한다.

무리식의 계산은 무리수의 계산과 같은 방법으로 한다. 특히 분모에 무리식이 포함되어 있을 때는 분자, 분모에 적당한 수 또는 식을 곱하여 분모에 무리식이 포함되지 않도록 분모를 유리화하여 계산하며, 이때 $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$임을 이용한다.

무리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 무리함수라고 한다. 무리함수에서 정의역이 주어지지 않은 경우에는 (근호 안의 식의 값)≥ 0이 되도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프

함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$는 이차함수 $y=\dfrac{x^2}{a}$ $(a\neq 0,\ x\geq 0)$의 역함수이므로 두 함수의 그래프가 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프를 그릴 수 있다. 이때 a의 절댓값이 커질수록 그래프가 x축에서 멀어지는 것을 확인할 수 있다.

함수 $y=-\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

함수 $y=\sqrt{-ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

함수 $y=-\sqrt{-ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a\neq 0)$는 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq 0)$의 꼴로 변형하여 그릴 수 있다.

$y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq 0)$는 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$에서 x 대신 $x-p$, y 대신 $y-q$를 대입한 식이다. 따라서 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq 0)$의 그래프는 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

이때 이 함수의 정의역은 $a>0$이면 $\{x|x\geq p\}$, $a<0$이면 $\{x|x\leq p\}$이고, 치역은 $\{y|y\geq q\}$이다.

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left\{x-\left(-\dfrac{b}{a}\right)\right\}}+c$이므로 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a\neq 0)$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향을 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

따라서 이 함수의 정의역은 $a>0$이면 $\left\{x|x\geq -\dfrac{b}{a}\right\}$, $a<0$이면 $\left\{x|x\leq -\dfrac{b}{a}\right\}$이고, 치역은 $\{y|y\geq c\}$이다.

합의 법칙과 곱의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 사건 A가 일어나는 경우의 수 $+$ 사건 B가 일어나는 경우의 수이고, 이를 합의 법칙이라고 한다.

두 사건 P, Q에 대하여 두 사건 P, Q가 동시에 일어나는 경우의 수는 사건 P가 일어나는 경우의 수 $\times$ 그 각각에 대하여 사건 Q가 일어나는 경우의 수이고, 이를 곱의 법칙이라고 한다.

합의 법칙과 곱의 법칙은 세 가지 이상의 사건에 대해서도 성립하며, 문장 속에 '또는', '이거나'가 사용될 때는 합의 법칙을, '함께', '그리고', '동시에', '잇달아(연이어)'가 사용될 때는 곱의 법칙을 사용한다.

순열

일반적으로 서로 다른 n개에서 $r(0<r\leq n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라고 하며, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다. n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열할 때, 첫 번째 자리에 올 수 있는 것은 n가지이고, 그 각각에 대하여 두 번째 자리에 올 수 있는 것은 첫 번째 자리에 선택한 1개를 제외한 $n-1$가지이다. 이와 같은 과정을 계속하면 r번째 자리에 올 수 있는 것은 이미 앞에 선택된 $r-1$개를 제외한 $n-(r-1)$가지이다. 따라서 ${}_n\mathrm{P}_r$은 곱의 법칙에 의하여 n부터 $n-r+1$까지의 자연수를 모두 곱한 값이다. 이때 1부터 n까지의 자연수를 차례로 곱한 것을 n의 계승이라고 하며 이를 $n!$과 같이 나타내며, ${}_n\mathrm{P}_r$을 계승을 사용하여 ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$와 같이 나타낼 수 있다. 또한, $r=n$일 때 성립하도록 $0!=1$로 정의한다.

n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우는 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

> $i)$ 특정한 하나를 포함하지 않고 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우, 그 경우의 수는 ${}_{n-1}\mathrm{P}_r$이다.
>
> $ii)$ 특정한 하나를 포함해 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우, 그 경우의 수는 $r\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이다.

$i)$과 $ii)$가 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여 ${}_n\mathrm{P}_r={}_{n-1}\mathrm{P}_r+r\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$이다.

조합

일반적으로 서로 다른 n개에서 $r(0<r\leq n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라고 하며, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다. 서로 다른 n개에서 $r(0<r\leq n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 순열이라 정의하였고, 이때 "서로 다른 n개에서 $r(0<r\leq n)$개를 택하여"는 조합, 즉 ${}_n\mathrm{C}_r$을 의미하고 "일렬로 나열하는 것"은 $r!$이므로 곱의 법칙에 의하여 ${}_n\mathrm{C}_r$와 ${}_n\mathrm{P}_r$ 사이에는 ${}_n\mathrm{C}_r\times r!={}_n\mathrm{P}_r$가 성립한다. 따라서 ${}_n\mathrm{C}_\mathrm{r}=\frac{{}_\mathrm{n}\mathrm{P}_\mathrm{r}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$이다. 또한 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 것은 남아 있을 $n-r$개를 택하는 것과 같은 경우이므로 ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$이 성립한다.

서로 다른 n개에서 $r(0<r<n)$개를 택한 후, 그 r개 중 다시 1개를 택하는 경우의 수는 먼저 n개 중 1개를 고른 후, 나머지 $n-1$개 중 $r-1$개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$r\times{}_n\mathrm{C}_r=n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$이 성립한다.

또한 n개에서 r개를 택하는 경우는 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

> $i)$ r개 중 특정한 하나를 포함하지 않는 경우, 그 경우의 수는 ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$이다.
>
> $ii)$ r개 중 특정한 하나를 포함하는 경우, 그 경우의 수는 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$이다.

$i)$과 $ii)$가 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여 ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$이다.

문제편

두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$의 x^3의 계수를 각각 a, b라 할 때 $a-b$의 값은?

1994학년도 수능1차 05

point of view : 구하는 값이 a나 b의 값이 아닌 $a-b$의 값임에 주목하자.

정답 : 0

두 다항식 A, B에 대하여 A^3-B^3은 $A-B$로 나누어떨어짐을 이용하자.

즉 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3-(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$은 x^4을 인수로 가지므로 삼차항의 계수가 0이다.

$\therefore a-b=0$

다항식 $x^3+5x^2+10x+6$이 $(x+a)(x^2+4x+b)$로 인수분해 될 때, $a+b$의 값을 구하시오.

2000학년도 수능 가나25

point of view : 주어진 다항식을 인수분해한 형태를 알려주었음에 주목하자.

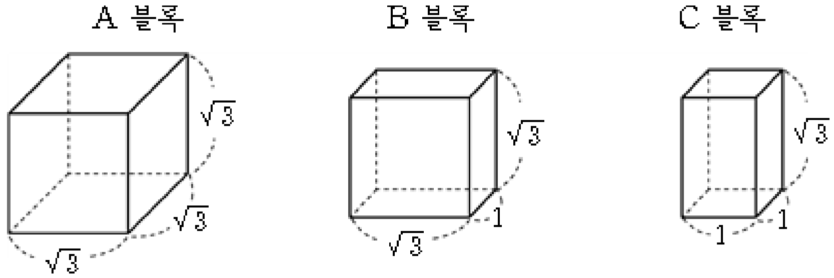
정답 : 7

등식 $x^3+5x^2+10x+6=(x+a)(x^2+4x+b)$이 항등식임을 이용하자.

양변의 이차항의 계수를 비교하였을 때 $5=a+4$에서 $a=1$이며 $x=0$일 때 $6=ab$에서 $b=6$이다.

$\therefore a+b=7$

각 모서리의 길이가 그림과 같은 직육면체 모양의 A, B, C 세 종류의 블록이 있다.



A 블록 1개, B 블록 5개, C 블록 6개를 모두 사용하여 하나의 직육면체를 만들려고 한다.

다음 중 이 직육면체의 모서리의 길이가 될 수 있는 것은?

① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{3}+2$

2003년 6월 가나21

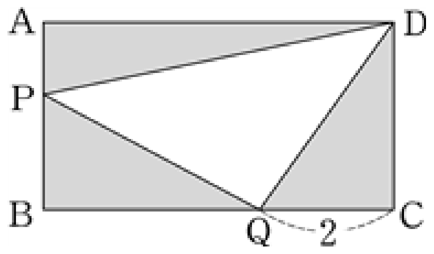
point of view : 주어진 블록을 통해 만든 직육면체가 곱셈공식을 나타냄에 주목하자.

정답 : ⑤

$\sqrt{3}=x$라 할 때 A 블록, B 블록, C 블록의 부피는 각각 x^3, x^2, x이므로

$x^3+5x^2+6x=x(x+2)(x+3)=\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+3)$에서 $\sqrt{3}+2$는 직육면체의 모서리가 될 수 있다.

직사각형 ABCD의 변 AB, BC 위에 각각 점 P, Q를 잡아 $\triangle\mathrm{APD}$, $\triangle\mathrm{PBQ}$, $\triangle\mathrm{QCD}$의 넓이가 같게 하였다. $\overline{\mathrm{QC}}=2$일 때, 선분 BQ의 길이는?



2003년 9월 가19

point of view : 어떤 변의 길이를 미지수로 설정해야하는지 확인하기 위해 주어진 상황에 주목하자.

정답 : $1+\sqrt{5}$

① 세 삼각형 $\triangle\mathrm{APD}$, $\triangle\mathrm{PBQ}$, $\triangle\mathrm{QCD}$의 넓이가 동일함과 ② $\overline{\mathrm{QC}}=2$에서 조건 ①에 주목하자.

조건 ①을 만족하는 여섯 점 A, B, C, D, P, Q에 대하여 두 변의 길이의 비 $\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PA}}$가 일정하도록 두 점 P, A를 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ 위에서 이동한 이후 선분 $\overline{\mathrm{AD}}$가 선분 $\overline{\mathrm{BC}}$와 평행하며 선분 $\overline{\mathrm{AD}}$와 선분 $\overline{\mathrm{DC}}$가 수직이 되도록 점 D의 위치를 찾으면 이때의 여섯 점 A, B, C, D, P, Q 또한 조건 ①을 만족한다. ⋯ ㉠

위와 동일하게 조건 ①을 만족하는 여섯 점 A, B, C, D, P, Q에 대하여 두 변의 길이의 비 $\overline{\mathrm{BQ}}:\overline{\mathrm{QC}}$가 일정하도록 두 점 Q, C를 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 위에서 이동한 이후 선분 $\overline{\mathrm{AD}}$가 선분 $\overline{\mathrm{BC}}$와 평행하며 선분 $\overline{\mathrm{AD}}$와 선분 $\overline{\mathrm{DC}}$가 수직이 되도록 점 D의 위치를 찾으면 이때의 여섯 점 A, B, C, D, P, Q 또한 조건 ①을 만족한다. ⋯ ㉡

한편 ㉠에서 $\overline{\mathrm{BQ}}$와 $\overline{\mathrm{QC}}$의 길이는 변화하지 않지만 ㉡에서 $\overline{\mathrm{BQ}}$와 $\overline{\mathrm{QC}}$의 길이는 변화한다.

즉 ㉠에서 두 변의 길이의 비 $\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PA}}$가 일정하다면 두 변의 길이 $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{PB}}$의 값은 조건 ①에 영향을 주지 않는다. 따라서 조건 ②를 이용하기 위해 $\overline{\mathrm{BQ}}=x$라 하자.

$\triangle\mathrm{APD}$, $\triangle\mathrm{PBQ}$, $\triangle\mathrm{QCD}$의 넓이를 S라 할 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{CD}}$에서 $\dfrac{2S}{x+2}+\dfrac{2S}{x}=\dfrac{2S}{2}$ $(S,\ x>0)$이고

$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$에서 $2x+(2x+4)=x^2+2x$, $x^2-2x-4=0$이며 $x>0$이므로 $x=1+\sqrt{5}$이다.

따라서 선분 BQ의 길이는 $1+\sqrt{5}$이다.

다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\ \cdots\ (x-10)}=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\ \cdots\ +\frac{a_{10}}{x-10}$$

이 성립할 때, $a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{10}$의 값은?

1995학년도 수능 가나08

point of view : 동일한 식을 곱하여 양변을 다항식으로 만든 이후 계수비교법을 사용하자.

정답 : 0

주어진 식의 양변에 $(x-1)(x-2)\ \cdots\ (x-10)$을 곱하였을 때 좌변의 9차항의 계수는 0이며

우변의 9차항의 계수는 $a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{10}$이므로 $a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{10}=0$이다.

다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지가 $4x+3$일 때, $f(2x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하시오.

2001학년도 수능 가나26

point of view : $f(2x)$의 $x=1$에서 함숫값은 $f(x)$의 $x=2$에서 함숫값과 동일함에 주목하자.

정답 : 11

다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$라 하면 $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$이다.

$f(2x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $f(2)$이므로 $f(2)=4\times2+3=11$이다.

다항식 $f(x)=x^3+x^2+2x+1$에 대하여 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R_1, $f(x)$를 $x+a$로 나누었을 때의 나머지를 R_2라고 하자. $R_1+R_2=6$일 때, $f(x)$를 $x-a^2$으로 나눈 나머지를 구하시오.

point of view : $y=f(x)$를 기함수 $y=x^3+2x$와 우함수 $y=x^2+1$의 합으로 관찰하자.

정답 : 17

함수 $y=x^3+2x$의 $x=a$에서의 함숫값과 $x=-a$의 함숫값의 합은 0이다.

또한 함수 $y=x^2+1$의 $x=a$에서의 함숫값과 $x=-a$의 함숫값은 동일하다.

다시 말해 $R_1+R_2=f(a)+f(-a)=2(a^2+1)=6$이므로 $a^2=2$에서 $f(a^2)=f(2)=17$이다.

따라서 $f(x)$를 $x-a^2$으로 나눈 나머지는 17이다.

다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 3이고, $x+2$로 나눈 나머지는 -3이다. $P(x)$를 x^2+x-2로 나눈 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(10)$의 값을 구하시오.

2003년 6월 나26

point of view : 수치대입법을 사용하여 일차함수 $R(x)$를 직접 구할 수 있음에 주목하자.

정답 : 21

다항식 $P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $P(x)=\left(x^2+x-2\right)Q(x)+R(x)$이다.

이때 $R(-2)=-3$, $R(1)=3$에서 직선 $y=R(x)$의 기울기는 $\dfrac{3-(-3)}{1-(-2)}=2$이므로 $R(x)=2(x-1)+3$

이다. 따라서 $R(10)=2(10-1)+3=21$이다.

* 이 문제를 통해 $f\left(a_1\right)=b_1$, $f\left(a_2\right)=b_2$를 만족하는 다항함수 $f(x)$는

$f(x)=\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)Q(x)+\dfrac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\left(x-a_1\right)+b_1$와 같이 나타낼 수 있음에 주목하자.

다항식 $x^{10}+x^9+\ \cdots\ +x^2+x+1$을 $x-1$로 나눈 몫을 $f(x)$라고 할 때, $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는?

① $2^{10}-10$ ② $2^{10}+11$ ③ $2^{11}-12$ ④ $2^{11}-10$ ⑤ $2^{11}+11$

2006년 10월 나13

point of view : $x^{10}+x^9+\ \cdots\ +x^2+x+1$를 초항이 1이고 공비가 x인 등비수열의 첫째항부터 열한 번째 항까지의 합으로 해석하자.

정답 : ③ $2^{11}-12$

$(x-1)(x^{10}+x^9+\ \cdots\ +x^2+x+1)=x^{11}-1$이고 다항식 $x^{10}+x^9+\ \cdots\ +x^2+x+1$을 $x-1$로 나눈 나머지는 $1+1+\ \cdots\ +1+1+1=11$이므로 $x\neq 1$에서 $\dfrac{x^{11}-1}{x-1}=(x-1)f(x)+11$이다.

따라서 $x=2$일 때 $2^{11}-1=f(2)+11$이므로 $f(2)=2^{11}-12$에서 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지의 값은 ③ $2^{11}-12$이다.

* $x\neq 1$에서 $x^{10}+x^9+\ \cdots\ +x^2+x+1=\dfrac{x^{11}-1}{x-1}$이므로 $x=1$일 때 $x^{10}+x^9+\ \cdots\ +x^2+x+1$의 값과 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^{11}-1}{x-1}$이 동일하며 이는 $x=1$에서 $\dfrac{d}{dx}(x^{11}-1)$의 값과 동일함을 확인하자.

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$일 때, 두 실수 a, b의 곱 ab는? (단, $i=\sqrt{-1}$)

1994학년도 수능1차 08

point of view : 모든 항의 계수가 실수인 다항식의 한 근이 실수가 아닌 복소수일 때 이 수의 켤레복소수 또한 근이 됨을 확인하자.

정답 : -15

$a,\ b$가 실수이므로 한 근이 $1+\sqrt{2}i$일 때 $1-\sqrt{2}i$ 또한 주어진 방정식의 실근이 된다.

$(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)=(x-1)^2+2=x^2-2x+3$이므로 x^3+ax^2+bx-3은 x^2-2x+3을 인수로 가진다. 이때 최고차항과 상수항의 계수를 비교하였을 때 $x^3+ax^2+bx-3=(x^2-2x+3)(x-1)$이므로 $a=-3,\ b=5$이다.

$\therefore ab=-15$

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1998}$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

1998학년도 수능 가나12

point of view : 복소수의 나눗셈에서는 켤레복소수를 활용하였음을 기억하자.

정답 : -1

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$에서 $i^{1998}=i^{1996}\times i^2=-1$이다.

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$을 다음과 같이 정의한다.

$$f(n)=\frac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}$$

이때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$의 값을 구하시오.

2003학년도 수능 가나 28

point of view : $w^{n+3}=w^n$임을 이용하여 함수 $f(n)$의 주기성을 확인하자.

정답 : -11

$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$에서 $\omega\neq1$이므로 $\omega^2+\omega+1=0$이다.

이때 $\omega^2+1=-\omega$에서 $\dfrac{\omega^2}{\omega+1}=-1$이고 $(\omega^2+1)^2=\omega^2$, 즉 $\omega^4+1=-\omega^2$에서 $\dfrac{\omega^4}{\omega^2+1}=-1$이며

$\dfrac{\omega^6}{\omega^3+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$이다.

한편 임의의 자연수 n에 대하여 $\dfrac{\omega^{6n+2}}{\omega^{3n+1}+1}=\dfrac{\omega^2}{\omega+1}$, $\dfrac{\omega^{6n+4}}{\omega^{3n+2}+1}=\dfrac{\omega^4}{\omega^2+1}$, $\dfrac{\omega^{6n+6}}{\omega^{3n+3}+1}=\dfrac{\omega^6}{\omega^3+1}$이

성립하므로 $f(n+3)=f(n)$이 성립한다.

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)=6\{f(1)+f(2)+f(3)\}+f(1)+f(2)=6\times\left(-1-1+\dfrac{1}{2}\right)-1-1=-11$

두 상수 a와 b에 대하여 부등식 $x^2+ax+b \le 0$의 해가 $-1 \le x \le 3$일 때, 부등식 $x^2-ax+b \le 0$의 해는?

2003학년도 수능 나06

point of view : 두 곡선 $y=x^2+ax+b$와 $y=x^2-ax+b$은 y축에 대하여 대칭이다.

정답 : $-3 \le x \le 1$

부등식 $(-x)^2+a(-x)+b \le 0$의 해가 $-1 \le -x \le 3$이다.

다시 말해 부등식 $x^2-ax+b \le 0$의 해는 $-3 \le x \le 1$이다.

좌표평면에서 중심이 $(a,\ b)$이고 x축에 접하는 원이 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 5)$와 $\mathrm{B}(8,\ 1)$을 지난다.

이때, 원의 중심 $(a,\ b)$와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \le a \le 8$)

2003학년도 수능 가나21

point of view : 원 위의 두 점을 이은 선분의 수직이등분선은 원의 중심을 지남에 주목하자.

정답 : $\sqrt{5}$

선분 AB의 중점을 M(4, 3)이라 할 때 원의 중심 $(a,\ b)$와 직선 AB 사이의 거리는 선분 AM의 길이와 같다. 한편 직선 AB의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이므로 직선 AM의 기울기는 2이다.

이때 $a=4+d$라 하면 $b=3+2d$이며 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이 또한 $b=3+2d$이다.

점 $(a,\ b)$와 점 A 사이의 거리가 반지름의 길이와 동일하므로 $\sqrt{(4+d)^2+(2d-2)^2}=3+2d$이다.

이때 $(4+d)^2+(2d-2)^2=(3+2d)^2$에서 $d^2-12d+11=(d-1)(d-11)=0$인데 $d=11$인 경우 $a>8$에서 $d=1$이므로 선분 AM의 길이는 $\sqrt{d^2+(2d)^2}=\sqrt{5}$이다.

$a,\ b,\ c$가 양의 실수일 때, 다음 연립부등식 $\begin{cases} ax^2-bx+c<0 \\ cx^2-bx+a<0 \end{cases}$의 해가 존재하기 위한 필요충분조건은?

① $a+c<\frac{b}{2}$ ② $a+c<b$ ③ $a+c<2b$ ④ $a+c<1$ ⑤ $a+c<2$

1994학년도 수능2차 16

point of view : $ax^2-bx+c=0$의 두 근은 $cx^2-bx+a=0$의 두 근의 역수임에 주목하자.

정답 : ②

방정식 $ax^2-bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라고 하면 $\alpha+\beta=\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$이므로

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{b}{c},\ \dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{a}{c}$에서 방정식 $cx^2-bx+a=0$의 두 근은 $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta}\ \left(\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{1}{\alpha}\right)$이다.

따라서 두 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$와 $\left(\dfrac{1}{\beta},\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$의 교집합이 공집합이 아닐 때 주어진 조건을 만족한다.

즉 $0<\alpha<1<\beta$인 경우 주어진 조건을 만족하므로 $f(1)<0$에서 $a+c<b$이다.

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 30\}$의 부분집합 중에는 어떤 두 원소의 곱도 6의 배수가 아닌 수들로만 이루어진 것이 있다. 예를 들면, $\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 20\}$, $\{3,\ 5,\ 9,\ 15\}$이다. 이와 같은 부분집합 중에서 원소의 개수가 최대인 집합을 M이라고 할 때, 집합 M의 원소의 개수를 구하시오.

2003년 6월 나29

point of view : 2의 배수와 3의 배수가 모두 집합 M의 원소인 경우 주어진 조건을 만족하지 않음을 관찰하자.

정답 : 20

집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 30\}$의 부분집합 중 2의 배수인 수들로만 원소로 가지는 집합을 A, 3의 배수인 수들로만 원소로 가지는 집합을 B라 하면 $n(A)>n(B)$이므로 $M=U-B$이다.

$\therefore n(M)=n(U)-n(B)=20$

전체집합 $U=\{x|x\text{는 7이하의 자연수}\}$의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 $B\subset A$이고

$A\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이다. $A-B=\{5\}$, $B-C=\{2\}$, $C-A=\{4, 6\}$일 때,

집합 $A\cap(B^C\cup C)$는?

2016년 4월 나19

point of view : 어떠한 조건이 정답을 구하기 위해 사용될 수 있는지 관찰하자.

정답 : $\{1,\ 3,\ 5\}$

$A\cap(B^C\cup C)=A\cap(B\cap C^C)^C=A-(B-C)=\{(A\cup C)-(C-A)\}-(B-C)=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}-\{2\}$이다.

따라서 집합 $A\cap(B^C\cup C)$는 $\{1,\ 3,\ 5\}$이다.

* 본 풀이에서는 주어진 조건 중 $B\subset A$와 $A-B=\{5\}$를 사용하지 않았다.

두 집합 $A=\{2,\ 2a+3\}$, $B=\{5,\ 7,\ a^2-2\}$에 대하여 $A\cap B=A$를 만족시키는 실수 a의 값은?

2017년 7월 나07

point of view : 풀이의 방향성에 따라 필요한 계산의 양을 줄일 수 있음을 관찰하자.

정답 : 2

$A\cap B=A$일 때 $2\in A$에서 $2\in B$이므로 $a^2-2=2$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$이다.

$a=-2$일 때 $2a+3=-1\notin B$이고 $a=2$일 때 $2a+3=7\in B$이므로 $a=2$이다.

전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 $A^C \cap B^C = \{1\}$, $B^C = \{1,\ 5,\ 7\}$을 만족시킬 때, 집합 $A-B$의

모든 원소의 합을 구하시오.

2017년 10월 나24

point of view : 여집합의 연산 과정에서 드모르간의 법칙이 유효함에 주목하자.

정답 : 12

$B^C-(A^C\cap B^C)=B^C\cap(A^C\cap B^C)^C=B^C\cap(A\cup B)=B^C\cap A=A-B$이므로 $A-B=\{5,\ 7\}$이다.

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 12이다.

전체집합 $U=\{2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6\}$의 서로 다른 부분집합을 $A_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 64)$라 하자.

$n(A_i)\geq 3$을 만족시키는 모든 집합 A_i에 대하여 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값을

구하시오. (단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.)

2018년 7월 나29

point of view : 주어진 경우의 수를 구하기 위해 여사건의 경우의 수를 관찰하자.

정답 : 144

A_i 중 공집합이 아닌 63가지의 경우의 수에서 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값을 구한 이후 A_i의 원소가 한 개인 경우와 두 개인 경우에서 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값을 빼자. 이때 63가지의 경우의 수를 ①, 원소가 한 개인 경우를 ②, 원소가 두 개인 경우를 ③이라 하자.

① 최소인 원소가 2인 경우의 수는 2^5이며, 최소인 원소가 2^2인 경우의 수는 2^4, $\cdots$, 최소인 원소가 2^6인 경우의 수는 2^0이므로 63가지의 경우의 수에서 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값은 $6\times 2^6=384$이다.

② $2+2^2+\ \cdots\ +2^5+2^6=2^7-2=126$에서 원소의 개수가 한 개인 경우 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값은 126이다.

③ 최소인 원소가 2인 경우의 수는 5이므로 이때의 경우를 모두 더한 값은 $2\times 5=10$이다.

최소인 원소가 2^2인 경우의 수는 4이므로 이때의 경우를 모두 더한 값은 $2^2\times 4=16$이다.

최소인 원소가 2^3인 경우의 수는 3이므로 이때의 경우를 모두 더한 값은 $2^3\times 3=24$이다.

최소인 원소가 2^4인 경우의 수는 2이므로 이때의 경우를 모두 더한 값은 $2^4\times 2=32$이다.

최소인 원소가 2^5인 경우의 수는 1이므로 이때의 경우를 모두 더한 값은 $2^5\times 1=32$이다.

따라서 원소의 개수가 두 개인 경우 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값은 114이다.

그러므로 $n(A_i)\geq 3$을 만족시키는 모든 집합 A_i에 대하여 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값은 $384-126-114=144$이다.

실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$$p : x - \frac{a}{2} = 1,$$

$$q : 2 \le 2x - 1 \le 12$$

p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 개수는?

2018년 9월 나07

poinit of view : 계산 과정을 최대한 간소화하자.

정답 : 11

$p : 2x-1=a+1$에서 p가 q이기 위한 충분조건일 때 $2 \le a+1 \le 12$이다.

따라서 가능한 자연수 a의 개수는 $12-(2-1)=11$이다.

실수 x에 대한 두 조건 $p:(x-1)^2 \leq 0,\ q:2x^2-(3k+7)x+2=0$에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?

2018년 10월 나17

point of view : 원소의 개수가 1 이하인 경우에서 공집합이 포함될 수 있음을 유의하자.

정답 : -6

조건 q의 진리집합의 원소가 1뿐이거나 조건 q의 진리집합이 공집합인 경우 주어진 조건을 만족한다.

조건 q의 진리집합의 원소가 1뿐일 때, 즉 $x=1$일 때 $2x^2-(3k+7)x+2=2(x-1)^2$에서 $k=-1$이다.

조건 q의 진리집합이 공집합인 경우 $2x^2-(3k+7)x+2$의 판별식의 값이 음수이다.

즉 $(3k+7)^2-16<0$에서 $|3k+7|<4$, $-\frac{11}{3}<k<-1$이므로 가능한 모든 정수 k는 -3, -2, -1뿐

이다. 따라서 가능한 모든 정수 k의 값의 합은 -6이다.

실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$$p : x+2a=0$$

$$q : x^2-2x-3=0$$

p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

2018년 경남10월 나06

point of view : 주어진 조건을 a에 대한 합성함수로 해석할 수 있음을 고려하자.

정답 : -1

조건 p에서 $x=-2a$이며 조건 q에서 $(x-3)(x+1)=0$에서 $x=-1,\ 3$이므로 $a=\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}$일 때

p가 q이기 위한 충분조건이 된다. 따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$이다.

한편 아래와 같은 방법을 통해 모든 실수 a의 값의 합을 구할 수 있다.

조건 q를 만족하는 x의 개수는 2이므로 이때 근과 계수의 관계에서 조건 q를 만족하는 모든 x의

값의 합은 2이다. 한편 조건 p를 만족하는 x의 값에 대하여 $a=-\frac{x}{2}$이므로 p가 q이기 위한

충분조건이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은 $-\frac{2}{2}=-1$이다.

다시 말해 주어진 조건은 a에 대한 방정식 $(-2a)^2-2(-2a)-3=0$의 모든 실근의 합을 구하는 것과

동일하게 해석할 수 있다.

집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 할 때, 실수 전체의 집합의 두 부분집합

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$$

$$B=\{a+k,\ b+k,\ c+k,\ d+k,\ e+k\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 상수 k의 값은?

(가) $S(A)=37$

(나) $A-B=\{2,\ 4,\ 9\}$

(다) $S(A\cup B)=92$

2019년 7월 나15

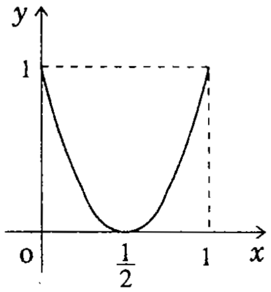
point of view : $S(B)$를 구할 수 있는 두 가지 방법을 통해 연립방정식을 이용하자.

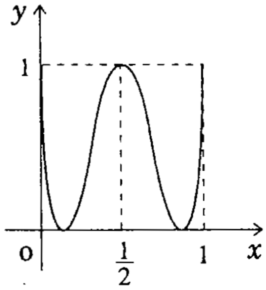
정답 : 8

$S(B)=S(A)+5k$, $S(B)=S(A\cup B)-S(A-B)$이므로 $37+5k=92-(2+4+9)$이므로 $k=8$이다.

함수 $f(x)=4x^2-4x+1\ (0 \le x \le 1)$에 대하여 함수 $y=f(x)$와 $y=f(f(x))$의 그래프의 개형은

각각 다음과 같다.





이때 집합 $\{x | f(f(f(x)))=x,\ 0 \le x \le 1\}$의 원소의 개수는?

1994학년도 수능2차 17

point of view : $f \circ f \circ f = (f \circ f) \circ f$임을 활용하자.

정답 : 8

$\{x | f(f(f(x))) = x,\ 0 \le x \le 1\} = \{x | f(x) = a,\ 0 \le x \le 1,\ a \in A\},\ A = \{x | f(f(x)) = x,\ 0 \le x \le 1\}$에서

주어진 $y = f(f(x))$의 그래프의 개형에서 방정식 $f(f(x)) = x\ (0 \le x \le 1)$는 서로 다른 네 양의

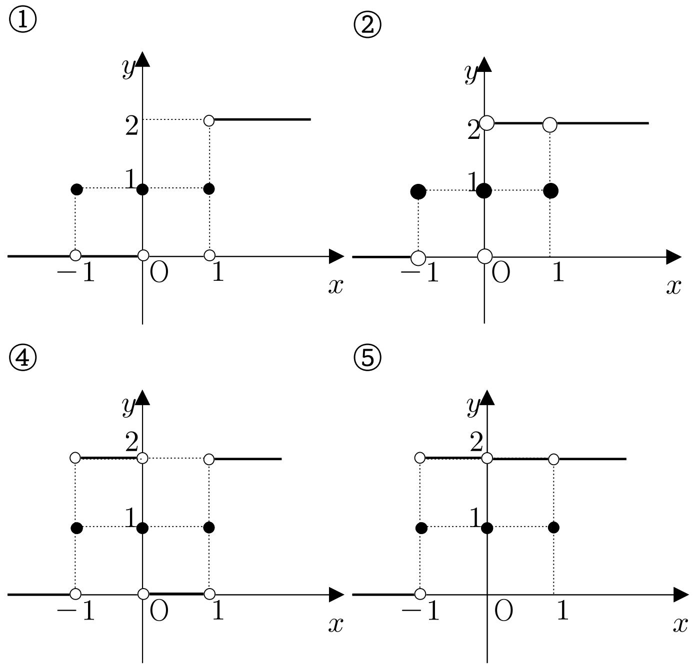
실근만을 가진다. 다시 말해 $n(A) = 4$이며 $A \subset \{x | 0 < x \le 1\}$이다.

한편 주어진 $y = f(x)$의 그래프의 개형에서 $0 < t \le 1$인 임의의 실수 t에 대하여 방정식 $f(x) = t$는

서로 다른 두 실근만을 가진다. 따라서 $n(\{x | f(x) = a,\ 0 \le x \le 1,\ a \in A\}) = 2 \times 4 = 8$이다.

실수 x에 대하여 $t^2 = x^3 - x$를 만족시키는 실수 t의 개수를 $f(x)$라 하자. 함수 $y = f(x)$의 그래프

개형은?



1994학년도 수능2차 15

point of view : 주어진 조건을 연립방정식으로 해석하자.

정답 : ④

$t^2 = x^3 - x$에서 $\begin{cases} y = t^2 \\ y = x^3 - x \end{cases}$ 를 만족시키는 y를 우선적으로 관찰하자.

$y = t^2$을 만족하는 실수 t의 개수는 $y > 0$일 때 2이고 $y = 0$일 때 1이며 $y < 0$일 때 0이다.

또한 $y = x^3 - x = (x+1)x(x-1)$에서 $y > 0$일 때 $-1 < x < 0,\ x > 1$이고 $y = 0$일 때 $x = -1,\ 0,\ 1$

이며 $y < 0$일 때 $x < -1,\ 0 < x < 1$이다.

다시 말해 $x < -1,\ 0 < x < 1$일 때 $f(x) = 0$이고 $x = -1,\ 0,\ 1$일 때 $f(x) = 1$이며 $-1 < x < 0,\ x > 1$

일 때 $f(x) = 2$이다.

따라서 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 ④이다.

다항식 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(g(x))=x$이고 $g(0)=1$일 때, $g(-1)$의 값은?

1996학년도 수능 나13

point of view : 주어진 식이 항등식이므로 계수비교법과 수치대입법을 활용하자.

정답 : 2

다항식 $g(x)$의 최고차항이 ax^n인 경우 다항식 $g(g(x))$의 최고차항은 $a(ax^n)^n$이며 식 $g(g(x))=x$이 항등식이므로 좌변과 우변의 최고차항을 비교하였을 때 $n=1$이며 $a^2=1$에서 $a=\pm 1$이다.

한편 $g(0)=1$이고 $g(g(0))=g(1)=0$이므로 $a=-1$이고 $g(x)=-x+1$이다.

따라서 $g(-1)=2$이다.

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 f는 일대일대응이다.
(나) 집합 X의 모든 원소 a에 대하여 $f(a) \neq a$이다.

$f(1)+f(4)=7$일 때, $f(1)+f^{-1}(1)$의 값은?

2016년 7월 나10

point of view : 일대일대응의 정의를 고려하자.

정답 : 6

어떤 함수가 일대일대응이면 함수의 치역과 공역이 동일하며 일대일함수이다.

즉 함수 f의 치역은 X이며 집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소 α, β에 대하여 $f(\alpha) \neq f(\beta)$이다.

따라서 $f(4) \neq 4$인데 집합 X의 원소 중 서로 다른 두 원소의 합이 7인 경우는 $3+4=7$뿐이다.

따라서 $f(4)=3$이므로 $f(1)=4$이다. 한편 $f(2) \neq 2$이므로 $f(2)=1$이다.

$\therefore f(1)+f^{-1}(1)=4+2=6$

함수 $f(x)=\dfrac{bx}{ax+1}$의 정의역과 치역이 같다. 곡선 $y=f(x)$의 두 점근선의 교점이 직선 $y=2x+3$ 위에 있을 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.)

2017년 10월 나14

point of view : 유리함수의 그래프의 개형을 통해 주어진 조건을 해석하자.

정답 : $-\frac{2}{3}$

$f(x)$의 정의역과 치역을 $\{x|x \neq c\}$라 할 때 곡선 $y=f(x)$의 두 점근선의 교점은 $(c,\ c)$이며

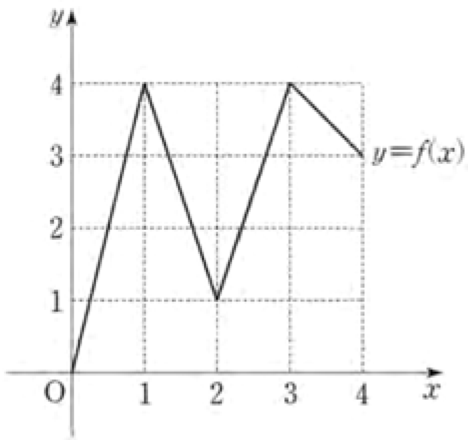
$c=2c+3$에서 $c=-3$이다. 이때 $x=c=-3$일 때 $ax+1=0$이므로 $a=\frac{1}{3}$이며 $x \to \infty$에서

$f(x)=\frac{b}{a}=c=-3$이므로 $b=-1$이다. 따라서 $a+b$의 값은 $-\frac{2}{3}$이다.

그림과 같이 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프는

점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 4)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같다.

다음 조건을 만족시키는 집합 $X=\{a,\ b\}$의 개수는? (단, $0 \le a < b \le 4$)



X에서 X로의 함수 $g(x)=f(f(x))$가 존재하고 $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$를 만족시킨다.

2018학년도 수능 나21

point of view : 정의역이 X이고 함수관계가 f와 동일한 함수를 정의할 수 있음을 유의하자.

정답 : 13

주어진 조건에서 $f(f(a))=f(a),\ f(b)=b,\ g(a)=f(a)\in X,\ g(a)=f(b)\in X$이다.

① $f(a)=a,\ f(b)=a$, ② $f(a)=a,\ f(b)=b$, ③ $f(a)=b,\ f(b)=a$, ④ $f(a)=b,\ f(b)=b$의 경우 중에서

①, ②, ④의 경우 $f(f(a))=f(a),\ f(f(b))=f(b)$를 만족하지만 ③의 경우 이를 만족하지 않는다.

이때 방정식 $f(x)=x$의 실근을 크기 순서대로 나열한 것을 $0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$라 정의한 이후 ①, ②, ④의

경우를 살펴보자.

① $f(a)=a,\ f(b)=a$인 경우

$a=0,\ \alpha_2,\ \alpha_3$인 경우 $f(b)=a$이고 $b>a$인 b가 존재하지 않는다. 한편 $a=\alpha_1$일 때 방정식

$f(x)=\alpha_1\ (x>\alpha_1)$이 한 실근을 가지므로 이를 만족하는 집합 X는 유일하게 존재한다.

② $f(a)=a,\ f(b)=b$인 경우

이때 집합 X의 개수는 $0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$의 네 수 중 두 개를 고르는 경우의 수와 동일하다.

다시 말해 집합 X의 개수는 $\dfrac{4\times 3}{2}=6$이다.

④ $f(a)=b,\ f(b)=b$인 경우

$b=0$인 경우 $f(a)=b$이고 $a<b$인 a가 존재하지 않는다.

한편 방정식 $f(x)=\alpha_n\ (x<\alpha_n)$의 실근의 개수는 $n=1$일 때 1, $n=2$일 때 2, $n=3$일 때 3이다.

다시 말해 각각의 경우에서 가능한 a의 값의 개수가 $1,\ 2,\ 3$이므로 가능한 집합 X의 개수는 6이다.

따라서 가능한 모든 집합 $X=\{a,\ b\}$의 개수는 $1+6+6=13$이다.

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$에 대하여 두 함수 $f:X \to X,\ g:X \to X$가 다음 조건을

만족시킨다.

(가) $f(1)=8,\ f(3) \neq 6$

(나) 함수 $(g \circ f)(x)$는 항등함수이다.

(다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)+g(x)$의 값은 일정하다.

$(f \circ f \circ f)(7)$의 값은?

2018년 3월 나21

point of view : 두 함수가 일대일대응임을 찾은 이후 이를 활용하여 주어진 조건을 추론해보자.

정답 : 4

함수 f가 일대일대응이 아닌 경우 함수 $(g \circ f)(x)$ 또한 일대일대응이 아니므로 조건 (나)를 만족하지 않는다. 따라서 f는 일대일대응이므로 역함수가 존재하므로 $g \circ f \circ f^{-1} = f^{-1}$에서 $g = f^{-1}$이다.

또한 $\sum_{n=1}^{9}\{f(n)+g(n)\} = \sum_{n=1}^{9}f(n) + \sum_{n=1}^{9}g(n) = \frac{1+2+\ \cdots\ +8+9}{2} \times 2 = 90$이므로 $f(x)+g(x)=10$이다.

이때 $f(1)=8 \to g(8)=1 \to f(8)=9 \to g(9)=8 \to f(9)=2 \to g(2)=9 \to f(2)=1 \to g(1)=2$이다.

또한 $f(5)=\alpha$라 할 때 $f(5)=\alpha \to g(\alpha)=5 \to f(\alpha)=5 \to g(5)=\alpha$이고 $f(5)+g(5)=10$이므로 $\alpha=5$이다. 이때 $f(3) \neq 6$이므로 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=4$ 또는 $f(3)=7$이다.

$f(3)=3$인 경우 $g(3)=3$에서 $f(3)+g(3) \neq 10$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

$f(3)=7$인 경우 $f(3)=7 \to g(7)=3 \to f(7)=7$에서 f가 일대일대응임을 만족하지 않는다.

즉 $f(3)=4 \to g(4)=3 \to f(4)=7 \to g(7)=4 \to f(7)=6 \to g(6)=7 \to f(6)=3 \to g(3)=6$이다.

$\therefore (f \circ f \circ f)(7) = f(f(6)) = f(3) = 4$

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 $-1,\ 1,\ 2$일 때 $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, $a,\ b,\ c$는 상수이다.)

2018년 6월 나29

point of view : 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 실근은 함수 f의 증감에 따라 경우를 나누어 고려하자.

정답 : 20

함수 f가 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 가지므로 f는 증가함수이거나 감소함수이다.

f가 증가함수인 경우 $f(x)=f^{-1}(x)$인 x에 대해 $f(x)=x$이며 $x \geq 1$에서 $cx^2+\frac{5}{2}x=x$이면

$cx+\frac{5}{2}=1$이다. 한편 방정식 $cx+\frac{5}{2}=1$은 두 실근을 가질 수 없으므로 주어진 조건을 만족하지

않는다. 따라서 f는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

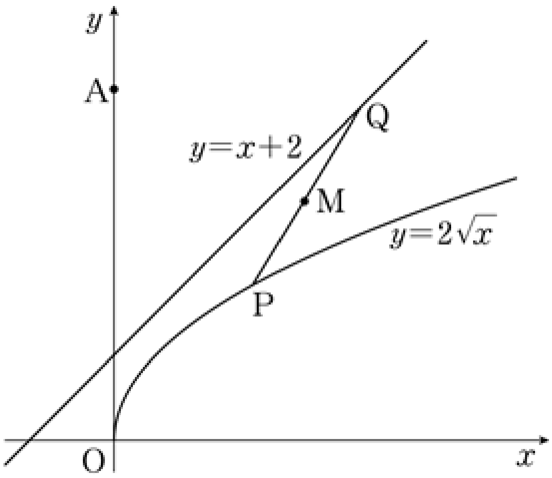
이때 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 한 점에서 만나며 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 두 교점은

직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $f(-1)=2,\ f(1)=1,\ f(2)=-1$이다.

따라서 $-a+b=2,\ a+b=c+\frac{5}{2}=1,\ 4c+5=-1$에서 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2},\ c=-\frac{3}{2}$이다.

$\therefore 2a+4b-10c=-1+6+15=20$

그림과 같이 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프 위를 움직이는 점 P와 직선 $y=x+2$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 PQ의 중점을 M이라 하자. 점 M과 점 $\mathrm{A}(0,\ 8)$ 사이의 거리의 최솟값은?



2019년 3월 나21

point of view : 주어진 값을 구하기 위해 선분 PH의 수직이등분선을 보조선으로 활용하자.

정답 : $\dfrac{13\sqrt{2}}{4}$

점 P에서 직선 $y=x+2$에 내린 수선의 발을 점 H라 하자. 선분 PQ의 중점 M은 선분 PH의 수직이등분선 위에 있으므로 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은 점 A와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값과 같으며 이는 ① (직선 $y=x+2$와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값)과 ② (점 A와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 합)과 같다.

이때 ①의 두 배는 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 최솟값과 같다.

점 P의 x좌표를 p라 할 때, $\dfrac{|p-2\sqrt{p}+2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|(\sqrt{p}-1)^2+1\right|}{\sqrt{2}}$에서 $p=1$일 때 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리는 최솟값 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$을 갖는다. 따라서 $①=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다.

이때 $②=\dfrac{|0-8+2|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$이므로 $①+②=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+3\sqrt{2}=\dfrac{13\sqrt{2}}{4}$이다.

두 실수 a, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=ax+b$$

$$g(x)=\frac{1}{ax+b-2}+3$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 실수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$를 좌표평면에 나타낸 영역을 R라 하자.

(가) $x>0$일 때, $1<g(x)<3$ (나) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=\dfrac{1}{x-2}+3$의 그래프의 교점이 제4사분면 위에는 있지 않다.

영역 R에 속하는 점 $(a,\ b)$에 대하여 a^2+b^2의 최댓값을 M이라 할 때, $100M$의 값을 구하시오.

(단, $a\neq 0$)

2019년 4월 나30

point of view : 함수 $g(x)$를 합성함수로써 관찰하자.

정답 : 306

함수 $f(x)$는 일대일대응이므로 $f(x)=X$라 할 때 함수 $g(x)$는 $\frac{1}{X-2}+3$이다.

따라서 $a>0$일 때 조건 (가)는 $X>b$일 때, $1<\frac{1}{X-2}+3<3$이다.

한편 b의 값에 관계없이 $X>b$이고 $X>2$인 경우 $\frac{1}{X-2}+3>3$이므로 조건 (가)를 만족하지 않는다.

따라서 $a<0$이며 이때 조건 (가)는 $X<b$일 때, $1<\frac{1}{X-2}+3<3$이다.

한편 함수 $\frac{1}{X-2}+3$은 $X<2$에서 감소하며 $X=\frac{3}{2}$일 때 함숫값 1을 가지므로 $b\le\frac{3}{2}$이다.

$\therefore a<0,\ b\le\frac{3}{2}$

곡선 $y=\frac{1}{x-2}+3$은 x축과 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$에서 만나므로 조건 (나)에서 $b>0,\ \frac{5}{3}a+b\ge0$이다.

따라서 $a<0,\ 0<b\le\frac{3}{2},\ b\ge-\frac{5}{3}a$일 때 a^2+b^2은 $b=\frac{3}{2},\ a=-\frac{9}{10}$일 때 최댓값 $\frac{306}{100}$을 가진다.

$\therefore 100M=306$

함수 $f(x)=ax^2-8x+c$에 대하여 $f(f(1))=f(f(2))=f(f(3))$일 때, $a+2c$의 값을 구하면?

(단, a, c는 정수)

2000학년도 경찰대 21

point of view : 이차방정식의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값이 2임을 이용하자.

정답 : 20

$f(f(1))=f(f(2))=f(f(3))=t$라 할 때 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 2이므로

적어도 두 값은 동일하며 두 값의 평균은 근과 계수의 관계에서 $\frac{4}{a}$이다.

한편 $f(1)=f(2)$ 또는 $f(2)=f(3)$인 경우 곡선 $y=f(x)$의 대칭축이 각각 $x=\frac{3}{2}$, $x=\frac{5}{2}$인데

이때 a의 값이 정수일 때 $\frac{4}{a}$의 값이 $\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{5}{2}$가 될 수 없으므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $f(1)=f(3)$이며 이때 $\frac{4}{a}=2$에서 $a=2$이며 $\frac{f(1)+f(2)}{2}=2$에서 $c=9$이다. $\therefore a+2c=20$

$f(x)=x^4-x^3+px^2+qx+r$에 대하여 $f(\alpha)=f(2\alpha)=f(3\alpha)=f(4\alpha)$이 성립한다. 이때 α의 값은?

(단, $\alpha \neq 0$)

2002학년도 경찰대 14

point of view : 근과 계수의 관계를 활용하여 α의 값을 구하자

정답 : $\frac{1}{10}$

α가 상수이므로 $f(\alpha)$는 상수이며 방정식 $f(x)=f(\alpha)$가 서로 다른 네 실근을 가지므로 모든 실근의 합은 근과 계수의 관계에 따라 1이다. 따라서 $\alpha+2\alpha+3\alpha+4\alpha=1,\ \alpha=\frac{1}{10}$이다.

삼차함수 $P(x)$에 대하여 $P(1)=\frac{3}{2}$, $P(2)=\frac{4}{3}$, $P(3)=\frac{5}{4}$, $P(4)=\frac{6}{5}$일 때, $P(5)$의 값은?

2003학년도 경찰대 15

point of view : $P(x)$를 찾기 앞서 주어진 규칙을 이용하기 위해 사차함수 $(x+1)P(x)$를 고려하자.

정답 : $\frac{17}{15}$

$x=1,\ 2,\ 3,\ 4$에서 $P(x)=\frac{x+2}{x+1}$이다.

즉 사차함수 $(x+1)P(x)-(x+2)$는 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$를 인수로 가진다.

다시 말해 $P(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 $(x+1)P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+(x+2)$이다.

양변에 $x=-1$을 대입하여 정리하였을 때 $a=-\frac{1}{120}$이므로 $P(5)$의 값은 $\frac{17}{15}$이다.

$x^{10}+3x^3-2$를 x^2-x+1로 나눈 나머지를 $p(x)$라 할 때, $y=p(x)$에 대하여 다음 설명 중 옳은 것은?

① 제 $1,\ 2,\ 3$사분면만을 지난다.

② 제 $1,\ 2,\ 4$사분면만을 지난다.

③ 제 $1,\ 3,\ 4$사분면만을 지난다.

④ 제 $2,\ 3,\ 4$사분면만을 지난다.

⑤ 제 $3,\ 4$사분면만을 지난다.

2004학년도 경찰대 08

point of view : 곱셈 법칙 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$을 활용하여 $p(x)$를 구해보자.

정답 : ④

$x^{10}=(x^6-1)x^4+x^4=(x^3-1)(x^3+1)x^4+x^4$이고 $x^4=(x^3+1)x-x$이므로 x^{10}을 x^3+1로 나눈

나머지는 $-x$이다. 또한 $3x^3-2=3(x^3+1)-5$이므로 $3x^3-2$를 x^3+1로 나눈 나머지는 -5이다.

따라서 다항식 $x^{10}-x^3+2$을 x^3+1로 나눈 나머지는 $-x-5$이다.

한편 $-x-5$는 일차함수이고 x^2-x+1는 이차함수이므로 $p(x)=-x-5$이다.

따라서 직선 $y=p(x)$는 제 2, 3, 4사분면만을 지난다.

포물선 $y=x^2+2x-3$ 위의 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$가 직선 $x+y=1$에 대하여 대칭일 때, x_1+x_2를 구하면? (단, $x_1 \neq x_2$)

2004학년도 경찰대 17

point of view : 근과 계수의 관계를 활용하여 x_1+x_2의 값을 구하자.

정답 : -1

두 점 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$을 이은 직선과 직선 $x+y=1$이 수직을 이루므로 두 점을 이은 직선을

$y=x+k$라 할 때 방정식 $x+k=x^2+2x-3$는 서로 다른 두 실근 $x_1,\ x_2$를 가진다.

이때 근과 계수의 관계에서 $x_1+x_2=-1$이다.

둘레의 길이가 24인 부채꼴의 넓이의 최댓값은?

2008학년도 경찰대 10

point of view : 부채꼴의 반지름과 중심각을 미지수로 활용하여 넓이의 최댓값을 구하자.

정답 : 36

부채꼴의 반지름을 r, 중심각을 θ라 할 때 $2r+r\theta=24$이다.

따라서 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r^2\times\frac{24-2r}{r}=-r^2+12r=-(r-6)^2+36$이므로 $r=6$일 때 최댓값

36을 갖는다.

부등식 $[x]^3-6[x]^2+11[x]-6 \ge 0$을 만족시키는 모든 실수 x의 집합은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\{x|x \ge 1\}$

② $\{x|x \ge 3\}$

③ $\{x|1 \le x \le 3\}$

④ $\{x|1 \le x < 4\}$

⑤ $\{x|1 \le x < 2 \text{ 또는 } x \ge 3\}$

2008학년도 사관학교 가03

point of view : 치환을 활용하여 조건을 만족시키는 x의 범위를 구하자.

정답 : ①

$[x]=X$라 할 때 $[x]^3-6[x]^2+11[x]-6=X^3-6X^2+11X-6=(X-1)(X-2)(X-3)\geq 0$이다.

한편 X는 정수이므로 $X=1,\ 2,\ 3$, 그리고 $X\geq 4$일 때 주어진 부등식을 만족하며 $X\leq 0$에서 주어진 부등식을 만족하지 않음을 확인할 수 있다. 다시 말해 $X\geq 1$일 때만 주어진 부등식을 만족한다.

따라서 부등식 $[x]^3-6[x]^2+11[x]-6\geq 0$을 만족시키는 모든 실수 x의 집합은 $\{x|x\geq 1\}$이다.

두 자연수 p와 q가 모두 소수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2+8px-q^2=0$의 두 근 α와 β가 모두 정수일 때, $|\alpha-\beta|+p+q$의 값은?

2009학년도 경찰대 22

point of view : 근과 계수의 관계와 소인수분해를 통해 주어진 조건을 살펴보자.

정답 : 34

근과 계수의 관계를 활용하였을 때 $\alpha+\beta=-8p,\ \alpha\beta=-q^2$이므로 일반성을 잃지 않고 $\alpha>0>\beta$라

하자. 이때 가능한 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는 ① $(\alpha,\ \beta)=(q,\ -q)$ ② $(\alpha,\ \beta)=\left(q^2,\ -1\right)$ ③ $(\alpha,\ \beta)=\left(1,\ -q^2\right)$

으로 세 쌍 존재한다.

①에서 $\alpha+\beta=0\neq-8p<0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

②에서 $\alpha+\beta=q^2-1=-8p<0$일 때 $q^2<1$인데 q가 자연수이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

③에서 $\alpha+\beta=1-q^2=(1-q)(1+q)=-8p$일 때 $q=2$인 경우 $-3=-8p$에서 주어진 조건을 만족하지

않으므로 q는 홀수이다. 이때 $q=2n-1$이라 하면 $(1-q)(1+q)=(2-2n)(2n)=-8p$이므로

$n(n-1)=2p$이고 q가 소수이므로 $p=3,\ n=3,\ q=5$이다.

이때 $x^2+8px-q^2=x^2+24x-25=(x-1)(x+25)$에서 $\alpha=1,\ \beta=-25$이다.

$\therefore|\alpha-\beta|+p+q=26+3+5=34$

계수가 모두 정수이고 삼차항의 계수는 1인 삼차방정식 $f(x)=0$의 정수근이 존재하고 $f(7)=-3$이며 $f(11)=73$일 때, $f(x)=0$의 정수근은?

2011학년도 경찰대 22

point of view : 인수정리와 소인수분해를 통해 주어진 조건을 살펴보자.

정답 : 10

방정식 $f(x)=0$의 정수근을 $x=n$이라 할 때 $f(x)=(x-n)g(x)$이며 $f(7)=-3=(7-n)g(7)$이고

$f(11)=73=(11-n)g(11)$이다. 이때 $g(7)$, $g(11)$이 정수이므로 $|7-n|$은 3의 약수이며 $|11-n|$은

73의 약수이다. $7-n=-3,\ -1,\ 1,\ 3$일 때 $11-n=1,\ 3,\ 5,\ 7$이며 이중 73의 약수인 것은 1뿐이다.

따라서 $n=10$이다.

$\{(x,\ y) | y \geq 4x^2 - 2ax + a,\ y \leq -4x^2 + 3a\}$가 공집합이 되지 않도록 하는 실수 a의 범위는?

2012학년도 경찰대 21

point of view : 조건을 만족하는 x와 y가 존재할 때 공집합이 되지 않음을 고려하자.

정답 $a \leq -16,\ a \geq 0$

$4x^2-2ax+a \leq -4x^2+3a$일 때 조건을 만족하는 y가 존재하므로 주어진 집합이 공집합이 되지 않는다. 다시 말해 $4x^2-ax-a \leq 0$인 x의 값이 적어도 하나 존재해야 한다.

즉 이차방정식 $4x^2-ax-a=0$의 판별식 a^2+16a의 값이 음수가 아니므로 $a \leq -16,\ a \geq 0$이다.

x에 대한 이차방정식 $ax^2-bx+3c=0$이 다음 두 조건을 만족시킬 때, $a+2b+3c$의 값은?

(가) $a,\ b,\ c$는 한 자리의 자연수이다. (나) 두 근 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $1<\alpha<2,\ 5<\beta<6$이다.

2012학년도 경찰대 11

point of view : 근과 계수의 관계를 활용하여 주어진 조건을 살펴보자.

정답 : 24

$6 < \alpha + \beta = \dfrac{b}{a} < 8$에서 $6a < b < 8a$이며 $b \leq 9,\ a \geq 1$이므로 $a = 1,\ b = 7$이다.

이때 $5 < \alpha\beta = 3c < 10$에서 $c = 2$ 또는 $c = 3$인데 $c = 2$인 경우 $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6) = 0$에서

조건 (나)를 만족하지 않으므로 $c = 3$이다.

$\therefore a + 2b + 3c = 24$

$f(x^2) = f(x)f(-x)$을 만족시키는 이차식 $f(x)$의 개수는?

2013학년도 경찰대 13

point of view : 주어진 식이 항등식이므로 계수비교법과 곱셈공식을 활용하자.

정답 : 4

$f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 할 때 양변의 최고차항의 계수를 비교하면 $a=a^2$이므로 $a=1$이다.

$f(x)=x^2+px+q$라 하면 $f(x^2)=x^4+px^2+q$이고

$f(x)f(-x)=(x^2+px+q)(x^2-px+q)=(x^2+q)^2-(px)^2=x^4+(2q-p^2)x^2+q^2$이므로

$p=2q-p^2,\ q=q^2$이다.

이때 $q=0$인 경우 $p^2+p=0$에서 $p=0$ 또는 $p=-1$이다.

또한 $q=1$인 경우 $p^2+p-2=0$에서 $p=1$ 또는 $p=-2$이다.

따라서 가능한 이차식 $f(x)$의 개수는 4이다.

양수 a, b가 $ab+a+2b=7$을 만족시킬 때 ab의 최댓값은?

2018학년도 경찰대 06

point of view : 절대부등식을 활용하여 ab의 최댓값을 구하자.

정답 : $11-6\sqrt{2}$

$a+2b \geq 2\sqrt{2ab}$이므로 $\sqrt{ab}=X$라 할 때 $ab+a+2b=7 \geq X^2+2\sqrt{2}X=\left(X+\sqrt{2}\right)^2-2$에서

$\left(X+\sqrt{2}\right)^2 \leq 9\ (X \geq 0),\ 0 \leq X \leq 3-\sqrt{2}$이다. 이때 $ab=X^2$의 최댓값은 $\left(3-\sqrt{2}\right)^2=11-6\sqrt{2}$이다.

또는 아래와 같은 방법을 통해 ab의 최댓값을 구할 수 있다.

$ab+a+2b=(a+2)(b+1)-2=7$에서 $a+2=A,\ b+1=B$라 할 때 $AB=9\ (A>2,\ B>1)$이다.

이때 $ab=(A-2)(B-1)=AB-(A+2B)+2=11-(A+2B)$의 최댓값을 구하자.

$A+2B \geq 2\sqrt{2AB}=6\sqrt{2}$이며 등호는 $A=2B=3\sqrt{2}$일 때 성립하므로 ab의 최댓값은 $11-6\sqrt{2}$이다.

(등호가 성립할 때 $A=3\sqrt{2},\ B=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$이며 이 값이 $A>2,\ B>1$을 만족함을 확인하자.)

두 양수 $a,\ b$가 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\le 4,\ (a-b)^2=16(ab)^3$을 만족할 때, $a+b$의 값은?

2020학년도 경찰대 20

point of view : 곱셈공식과 절대부등식을 활용하여 $a+b$의 값을 구하자.

정답 : 2

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}\le 4$에서 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=16(ab)^3+4ab\le 16(ab)^2$이다.

이때 $16(ab)^3-16(ab)^2+4ab=4ab(2ab-1)^2\le 0$이고 $ab>0$이므로 $ab=\frac{1}{2}$이다.

이때 $(a+b)^2=16(ab)^3+4ab=4$이며 $a+b>0$이므로 $a+b=2$이다.

(방정식 $x^2-(a+b)x+ab=x^2-2x+\frac{1}{2}$의 판별식의 값 $16-2=14$이 양수이므로 a, b가 존재한다.)

$x=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 일 때, $x(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})$의 값은?

2021학년도 경찰대 02

point of view : 곱셈공식을 활용하여 x의 분모를 유리화하자.

정답 : $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

$$x=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{2+2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

따라서 $x(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$이다.

실수 $r=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$에 대하여 $r+r^2+r^3=a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$일 때, $a+b+c$의 값은?

(단, $a,\ b,\ c$는 유리수이다.)

2022학년도 경찰대 13

point of view : 곱셈공식을 활용하여 주어진 식의 값을 구하자.

정답 : 15

$\sqrt[3]{2}=t$라 할 때 $r=\dfrac{t^3+1}{t^2-t+1}=t+1=\sqrt[3]{2}+1$이다.

이때 $r+r^2+r^3=(\sqrt[3]{2}+1)+(\sqrt[3]{2}+1)^2+(\sqrt[3]{2}+1)^3=(\sqrt[3]{2})^3+4(\sqrt[3]{2})^2+6(\sqrt[3]{2})+3=4\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{2}+5$

이므로 $a=4,\ b=6,\ c=5,\ a+b+c=15$이다.

$O(0,\ 0)$, $A(3,\ 4)$, $B(7,\ 0)$에 대하여 $\angle AOB$를 이등분하는 선분 OP에 대하여 점 P의 좌표는?

2002학년도 경찰대 17

point of view : 각의 이등분선 정리를 활용하여 선분 AB의 내분점 P의 좌표를 구하자.

정답 : $\left(\frac{14}{3},\ \frac{7}{3}\right)$

선분 OA의 길이와 선분 OB의 길이의 비는 선분 AP의 길이와 선분 PB의 길이의 비와 같다.

이때 선분 OA의 길이는 5이고 선분 OB의 길이는 7이므로 점 P는 선분 AB를 $5:7$로 내분한다.

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{14}{3},\ \frac{7}{3}\right)$이다.

아래 그림과 같이 직선 l이 삼각형 ABC의 두 변 AB, AC와 각각 D, F에서 만나고, 변 BC의

연장선과 직선 l이 점 E에서 만난다.

이 때, $\frac{\overline{AD}}{(가)} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$임을 보이는 다음의 [증명] 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을

순서대로 적으면?

[증명]

점 A, B, C에서 직선 l에내린 수선의 발을 각각 L, M, N이라 하자.

$$(나) \propto \triangle BDM$$

$$\triangle BEM \propto \triangle CEN$$

$$\triangle CFN \propto \triangle AFL$$

이므로 $\frac{\overline{AD}}{(가)} = \frac{\overline{AL}}{\overline{BM}}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{(다)}{\overline{CN}}$, $\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{AL}}$이고,

이를 정리하면 $\frac{\overline{AD}}{(가)} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$을 얻을 수 있다.

① $\overline{BM}$, $\triangle CEN$, $\overline{BE}$ ② $\overline{BM}$, $\triangle CEN$, $\overline{BM}$ ③ $\overline{BD}$, $\triangle ADL$, $\overline{BM}$

④ $\overline{BD}$, $\triangle ADL$, $\overline{BE}$ ⑤ $\overline{CN}$, $\triangle CEN$, $\overline{BE}$

2004학년도 사관학교 가나19

point of view : 주어진 공식을 메넬라우스 정리라 부른다. 학습해두자.

정답 : ③

$\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{(\text{가})}=\dfrac{\overline{\mathrm{AL}}}{\overline{\mathrm{BM}}}$에서 (나)는 $\triangle\mathrm{ADL}$이며 $\triangle\mathrm{ADL}\propto\triangle\mathrm{BDM}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AL}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{BM}}$이므로 (가)는 $\overline{\mathrm{BD}}$이다.

또한 $\triangle\mathrm{BEM}\propto\triangle\mathrm{CEN}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AL}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{BM}}$이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{AL}}}{\overline{\mathrm{BM}}}\cdot\dfrac{(\text{다})}{\overline{\mathrm{CN}}}\cdot\dfrac{\overline{\mathrm{CN}}}{\overline{\mathrm{AL}}}=1$에서 (다)는 $\overline{\mathrm{BM}}$이다.

주어진 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$인 $\triangle\mathrm{PAB}$의 최대 넓이는?

2004학년도 경찰대 16

point of view : $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$일 때 점 P가 어떠한 원 위의 점임을 파악하자.

두 점으로 부터 거리의 비가 동일한 점들의 자취를 아폴로니우스의 원이라 부른다.

정답 : 6

$\sqrt{(x-3)^2+y^2}:\sqrt{x^2+(y-3)^2}=1:2$, $4\{(x-3)^2+y^2\}=x^2+(y-3)^2$, $x^2+y^2-8x+2y+9=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=8$이므로 점 P는 중심이 점 $(4,\ -1)$이고 반지름이 $2\sqrt{2}$인 원 위에 있다.

이때 직선 AB의 방정식 $y=-x+3$이 점 $(4,\ -1)$을 지나므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리의

최댓값은 $2\sqrt{2}$이다. 따라서 $\triangle\mathrm{PAB}$의 최대 넓이는 $\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=6$이다.

좌표평면 위에 두 정점 $\mathrm{P}(12,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 5)$가 있다. 길이가 $5\sqrt{2}$인 선분 RS가 반직선

$y=-x\ (x \geq -5)$ 위에서 움직일 때 사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최솟값은?

2004학년도 사관학교 나15

point of view : $\overline{\mathrm{PS}}$와 동일한 길이의 선분을 찾기 위해 점 P를 직선 $y=-x$에 대칭시키자.

정답 : $26+5\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=13$, $\overline{\mathrm{RS}}=5\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PS}}+\overline{\mathrm{QR}}$이 최솟값을 가질 때 사각형 PQRS의 둘레의 길이가 최소이다.

점 $\mathrm{P}(12,\ 0)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭시켰을 때의 점 $\mathrm{T}(0,\ -12)$에 대해 점 T를 지나고

기울기가 -1인 직선 $y=-x-12$ 위에 $\overline{\mathrm{RS}}=5\sqrt{2}=\overline{\mathrm{TU}}$가 되도록 점 $\mathrm{U}(-5,\ -7)$을 잡으면

$\overline{\mathrm{PS}}=\overline{\mathrm{ST}}=\overline{\mathrm{RU}}$이므로 $\overline{\mathrm{PS}}+\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{RU}}+\overline{\mathrm{QR}}$이다. 이때 $\overline{\mathrm{RU}}+\overline{\mathrm{QR}}\geq\overline{\mathrm{QU}}=13$이므로

사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최솟값은 $13+5\sqrt{2}+13=26+5\sqrt{2}$이다.