안녕하세요. Bin 입니다.

매주 금요일마다 온다고 했으나 지금의 개정은 무언가 새로 작성하는 것이 아닌

이미 작성해놨던 것들을 가독성을 좀 더 키우고 최신 기출을 추가하는 정도이니,

그냥 빨리 빨리 업로드하겠습니다.

매일매일 하면 일주일이면 모두 갈아치울정도의 양이지만,

저도 강사이고 수업을 챙겨야하니,

일주일에 한~두개씩 업로드 하는것에 양해부탁드립니다.

아차, 제 블로그에 있던 기존칼럼들은 일단 다 내려놨습니다.

보면 볼수록 엉성한 칼럼들을 올려놨다는게 부끄러워지더라구요.

좀 더 내용보충하고 알차게 해서 올리겠습니다.

시작해보죠.

개념먼저 훑고 갑시다.

우린 벡터에 대해서 여러가지를 배웠죠.

지금 배우려는 것은 그 개념을 다시 배우자는게 아니라,

배웠던 개념으로 문제에 어떻게 적용할런지를 배울겁니다.

지금까지 배웠던 벡터의 성질을 크게 네 가지로 나누자면,

1. 벡터의 정의

2. 덧셈, 뺄셈, 분할

3. 내적에서의 성질.

4. 위치벡터(내분점,외분점,무게중심) **(이 칼럼에선 다루지 않습니다.)**

이렇게 나눌 수 있습니다.

저 네 개를 여러분이 배웠단거죠.

(연장하면 직선,평면방정식까지 가지만, 그건 Part2 에서 뵙죠.)

항상 얘기해왔던 거지만.

그럼 뭐죠?

제 네개를 배웠으니. 저 네개가 나온다는 겁니다.

<u>“ 시험 ” 이 뭔데요.</u>

배운걸 테스트한단 거죠?

그럼 저 네개의 성질을 여러분이 잘 이해했고 활용가능한가.

그걸 테스트 할껍니다.

그런 시험을 대비하는 수험생 입장에서. 준비해야 할것.

즉, 공부해야 할 것은 무엇일까요?

네 당연하죠.

저 네 개를 준비하면 됩니다.

준비한다. 즉 공부한다. 는 무슨 의미일까요 ?

개념공부한다? 푼다 ? 끝?

그 이상이 되어야 합니다.

정말 자유자재로 쓸줄 알아야 한단겁니다.

여러분, 제가 칼럼쓰는 준비작업 할 때 어떤지 아시나요?

문제집 피고. 그 문제에 관련되어있는 공식을 다 씁니다.

왜냐면. 그래야 이 문제에 뭐가 섞였는가 보여요.

아니 그럼. 왜 그걸 굳이 써야하죠 ? 저같은 사람이?

네 . 그렇죠. 전 정말. 자유자재로 모든 공식을 활용하기 때문에. (자랑아님.)

굳이 어떤 공식이 쓰였는지 굳이 의식하지 않고도 활용이 가능합니다.

칼럼을 쓰기위해서

“내가 지금까지 어떻게 풀어왔나”를 의식적으로 다시 끄집어내는겁니다.

웃기죠?

여러분들은, 이런 상태가 되야 합니다.

그러기 위해선 저 네개의 개념을 가지고

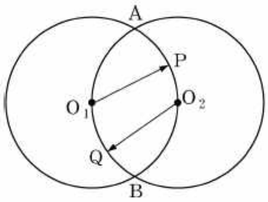
계속 문제를 풀고풀고풀고풀고 하셔야 합니다.

아시겠죠?

그러셔야 합니다.

여담이 길었고 ㅎㅎ 그럼 문제한번 보고가시죠.

평면 위의 두 점 O_1, O_2 사이의 거리가 1일 때, O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A, B라 하자. 호 AO_2B 위의 점 P와 호 AO_1B 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$의 내적 $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]



① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0　④ $\frac{1}{4}$　⑤ 1

여기서 얘기할 것은, 별것아니고 . 벡터에서의 기본을 언급하려

함입니다.

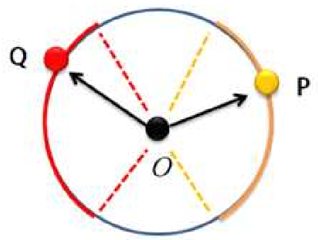
벡터에서 뭐 더한것이나 내적의 최대 최소를 묻든 뭘 묻든간에,

기본은

" 시점 일치 " 입니다.

두 벡테가 등장하면, 그 두 벡터의 시점을 일치시킨다는 거죠.

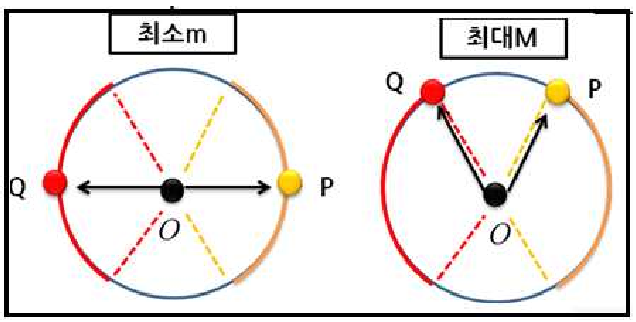
즉, 왼쪽문제는 다음과 같이 바꿀 수 있습니다.



O2 를 O1 으로 옮겨서 시점이 O 로 같은 벡터로 만든 것입니다.

이렇게 해야 그후에 비로소 내적을 하든 하니깐요.

결과는 다음과 같죠.

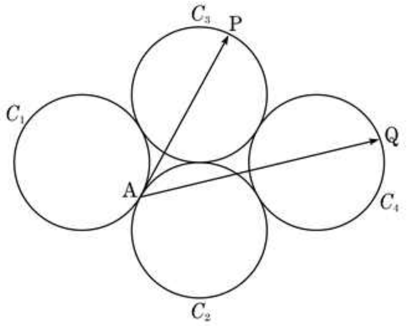


이건 뭐.. 기본에 관한 얘기 였고. 다음 문제보면서

하고자 하는 얘기를 슬슬해봅시다.

<2013년 10월 모의고사 B형 21번 문항>

그림과 같이 평면 위에 반지름의 길이가 1인 네 개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4가 서로 외접하고 있고, 두 원 C_1, C_2의 접점을 A라 하자. 원 C_3 위를 움직이는 점 P와 원 C_4 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값은? [4점]



① $4\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ② 6 ③ $3\sqrt{3}+1$
④ $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ⑤ 7

푸셨나요? 21번 치곤 정말 쉬운 문항이었죠.

쉽지 않았던 분들을 위해 쓰자면,

여러분들이 이런 벡터문항을 어려워하는 이유는,

변수가 두개여서 그렇습니다.

변수가 두개라뇨? 벡터의 정의를 한번 살펴보면,

벡터는, “크기와 방향”으로 구성됩니다.

즉, 크기와 방향의 두 변수가 존재하고, 그 값에 따라 벡터가 결정되는데,

이전의 문제에선 “방향”만 변수여서 시점일치로 쉽게 풀렸고,

이 문제는 크기 마저 변하죠.

크기, 방향. 중 하나만 변수가 되어야 관리하기 편한데.

이건 두개다 변수가 되버리니. 답이 없는거죠.

그럼 어떻게하죠?

네. **변수를 줄이면 됩니다.**

변수를 줄인다. 이건 사실 기본중의 기본입니다.

우리가 x , y에 대한 이차방정식 풀 때, y= f(x) 로 정리하고 y를 대입

하죠? y라는 변수를 없앰으로써 전체에서 한개의 변수만 다룬다는 뜻

입니다.

마찬가진거죠. 하나의 변수만 다룰수 있게 되는 겁니다.

주로 길이를 고정시키고. 각만 변하게 하죠.

이때 사용하는 것이 바로, 분할 과 평행이동 입니다.

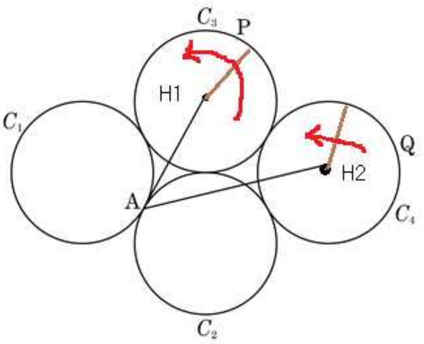
즉, Main 은 **변수줄이기**

그걸 하기 위한 sub 로는 **분할, 덧셈, 평행이동 등**이 있는거죠.

Main + Sub 조합이라 생각하시면 됩니다.

아무튼 바꿔보면, 다음과 같이 바꿀 수 있습니다.

다음장에서 해보죠.



선 AP에서 AH1 으로 잘라 H1 은 고정, H1P 는 크기는 1로

일정하되, 각도만 변하는 상황.

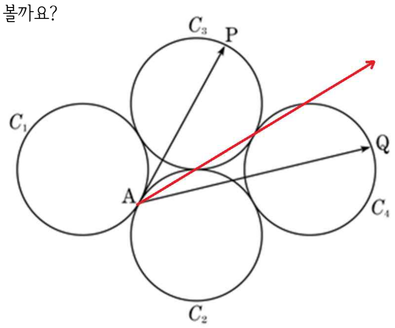
마찬가지로 직선 AQ 에서 AH2 로 잘라 H2 는 고정, H2P 는

길이 1로 일정하되, 각도만 변하는 상황. 입니다.

그럼 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$ 는 다음과 같이 바뀌죠.

$\overrightarrow{AH1}+\overrightarrow{AH2}+$ 나머지

계속 볼까요?

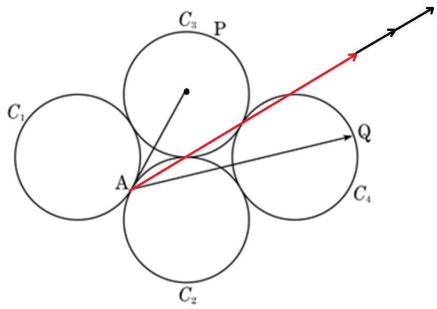


$\overrightarrow{AH3}=\overrightarrow{AH1}+\overrightarrow{AH2}$ 입니다. 그럼이제 **나머지**만 더해주면 되겠죠?

나머지를 더할 때, 그 총 더한값이 최대가 되려면,
다음과 같이 더해주면 됩니다.

즉, AH3 과 방향이 같도록 " 각도"를 바꿔준 뒤 더해주면 됩니다.

그럼 최대가 되겠군요.



풀이를 다시 돌아보면,

변수가 두개여서 하나로 줄여서.

제 자신이 다룰 것을 오직 각도. 또한 H1P, H2Q 오로지 두개만

남김으로써 문제의 난이도를 한층 하락시켰고.

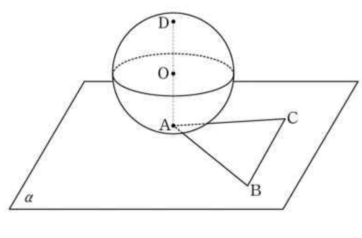
최대 구하라길래, " 평행이동 " 시켜서 더해줬습니다.

결국 필요한건 벡터관련된 성질 뿐이라는 거죠.

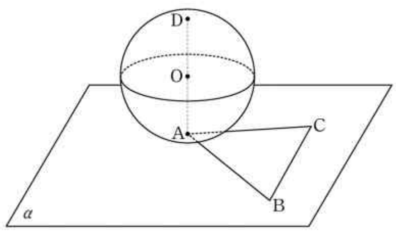
답 구하는 과정은 여러분에게 맡기겠습니다. 답은 2번이구요.

입체에서도 마찬가지 입니다. 다음 문항 풀어보세요.

그림과 같이 평면 α 위에 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC가 있고, 반지름의 길이가 2인 구 S는 점 A에서 평면 α에 접한다. 구 S 위의 점 D에 대하여 선분 AD가 구 S의 중심 O를 지날 때, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|^2$의 값을 구하시오. [4점]



그림과 같이 평면 α 위에 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC가 있고, 반지름의 길이가 2인 구 S는 점 A에서 평면 α에 접한다. 구 S 위의 점 D에 대하여 선분 AD가 구 S의 중심 O를 지날 때, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|^2$의 값을 구하시오. [4점]



풀어보신것 맞죠 ?

바로 풀이보겠습니다.

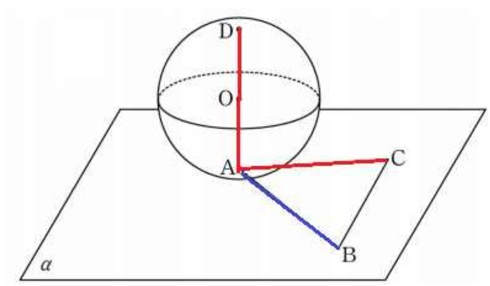
이건 쉬워야 정상이예요.

왜냐면, 변하는게 없거든요. 두개도 아니고 심지어 하나도 아니고

아무것도 변하지 않아요 .

Main 이 없단거죠. 즉, 오로지 서브로만 풀면됩니다.

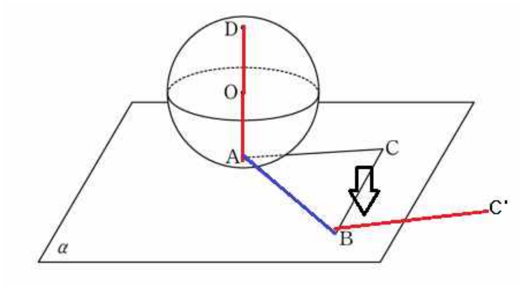
벡터를 분해해보면,



다음과 같이 됩니다.

DC 를 DA+ AC 로 분해했죠.

이젠 평행이동을 해보면,



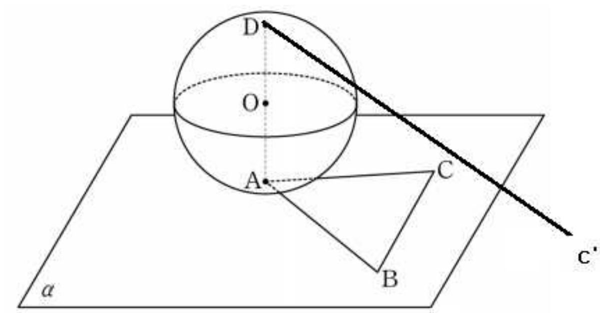
AC 를 BC' 로 평행이동 했습니다.

즉, 주어진식이 어떻게 바뀐거냐면,

DA+ AB + BC' 로 바뀌었습니다.

벡터의 성질에 따라 ,

DA+ AB +BC' = DC' 이죠 ? ㅎㅎ



그럼 이제, DA 와 AC' 를 이용하여 피타고라스 이용해서 DC' 길이 구해주기만

하면 됩니다! 답은 43이구요.

이것도 마찬가지로 결국, 분해하고 평행이동만 한겁니다.

벡터의 성질 만 사용한거죠.

근데,, 웃긴거예요 사실.

질문을.

“ 전 벡터의 성질 활용이 어려운데 어쩌죠 ? ”

이러면 전 할 말이 없습니다.

저것만 사용하면 된다 !! 만 알려줘도 문제 잘푸는 학생들이 있는가 하면.

성질 자체가 어려운 학생도 있는거니깐요.

그런 학생들은 당장 기출피고. 오로지 **벡터의 성질만 사용하는 연습**을 할것.

막히면 답지 참고하여 이렇게 이렇게 평행이동했어야 했고 분할했어야 한다.

식으로 공부하세요. 결국 반복으로 인한 익숙함, 익숙함으로 인한 숙련도 상승.

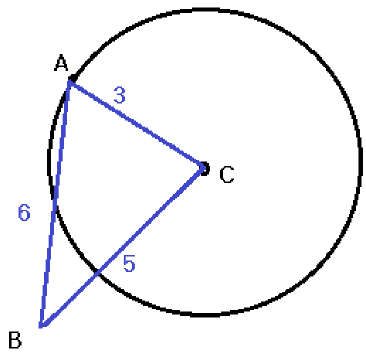
다음 문제 볼게요.

중심이 C 이고 반지름의 길이가 3인 구와 구 위의 한 점 A 가 있다.
구 밖의 한 점 B 를 $\overline{\mathrm{AB}}=6$ 이고 $\overline{\mathrm{CB}}=5$ 가 되도록 잡는다.
점 P 가 이 구 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ 의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

풀이는 다음장에서.

> 중심이 C 이고 반지름의 길이가 3인 구와 구 위의 한 점 A 가 있다.
> 구 밖의 한 점 B 를 $\overline{AB}=6$ 이고 $\overline{CB}=5$ 가 되도록 잡는다.
> 점 P 가 이 구 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BP}$ 의 내적 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

이건 그림이 없죠 ? 대충 그려보자면,

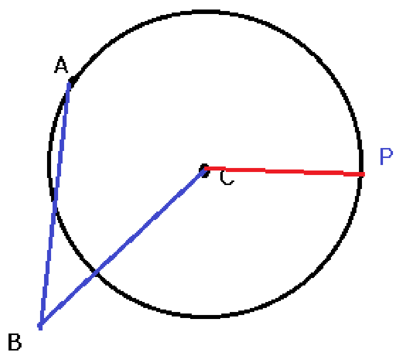


이제 BP 를 알아야 하는데, P 가 원위를 움직이므로,

BP 는 BA 와 이루는 각 도 변하고, 길이도 변합니다.

변수가 두개나 있네요. 그럼 하나로 줄여야죠 ?

다음과 같습니다.



뭐한거죠? $\overrightarrow{BP}$ 를 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP}$ 로 분해한겁니다.

변수가 하나로 줄었죠? 이제 AB 와 BC 는 고정되어있고,

전 길이가 3으로 일정한 CP 만 컨트롤 해주면 됩니다.

준식을 바꿔보면 ,

$$\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP})$$
$$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CP}$$

여기서 BA 와 BC 는 고정되어있기 때문에, **<u>내적값도 무조건 같습니다.(P가 어디있든)</u>**

만약 이 문항이, 내적이 최대가 되는 P 의 위치를 묻는 문항이었으면 ,

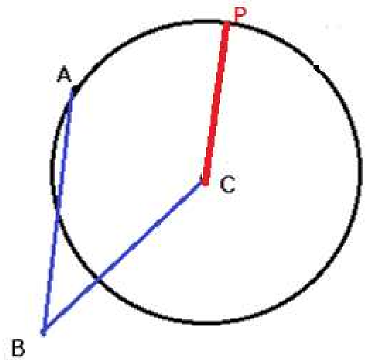
BA 와 BC 의 내적은 아예 고려할 필요가 없게 됩니다.

어차피 BA 와 BC 의 내적값은 고정되어있기 때문에, 최대,최소라는 말이

의미가 없게 되는거니깐요.

그럼 우린, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CP}$ 의 최대를 구하면 됩니다.

내적이 최대일때는 두 벡터 가 평행할 때이죠.



아하 쉽네요.

직접적으로 푸는건 아니고,

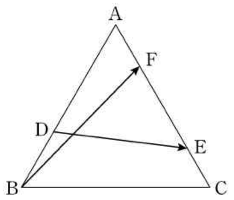
지금까지 배운걸 어떻게 하는지 도형으로만 보겠습니다.

짧게 세 개만 다뤄보죠.

1)

한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 2:1로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 3:1과 1:3으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2$의 값은? [3점]

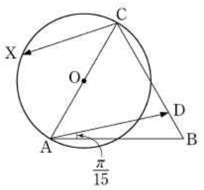
① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21



선만 그어보세요. 직접풀어봐도 좋고.

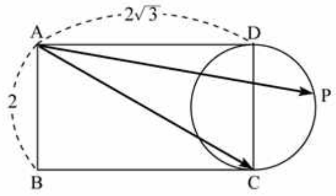
2)

그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle DAB = \frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP = \frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



3)

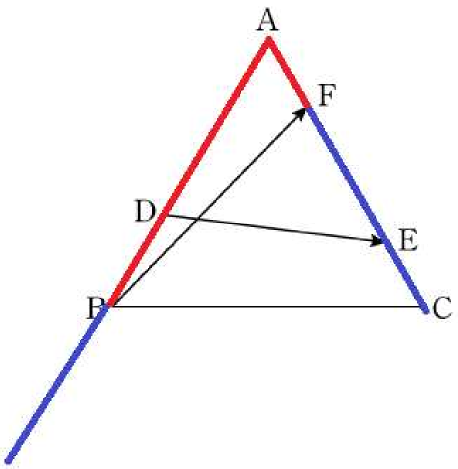
그림은 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=2\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 이 직사각형의 한 변 CD를 지름으로 하는 원을 나타낸 것이다. 이 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$의 내적 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값은? (단, 직사각형과 원은 같은 평면 위에 있다.) [4점]



① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

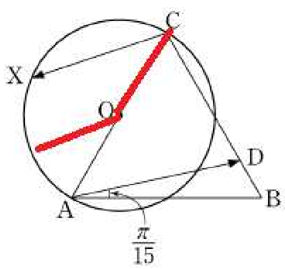
1)

파란색 선이 DE 를 분해한것, 빨간색은 BF 를 분해한것 입니다.



($\overline{AE} = \overline{FC}$이므로 $\overrightarrow{DE}$를 분해했을 때, $\overrightarrow{AE}$를 $\overrightarrow{FC}$라 볼 수 있음)

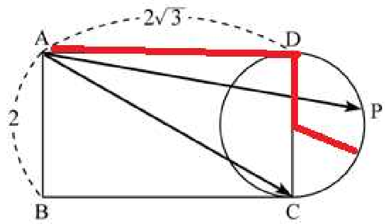
2)



$\overrightarrow{CX}$ 가 방향 과 크기가 모두 변하니, $\overrightarrow{CO}$ 로 고정시켜놓고, $\overrightarrow{OX}$ 라는

크기가 일정하고 방향만 변하는 벡터만 다룰 수 있게 분해한 것 입니다.

3)



음, 사실, AP 를 AO (원의 중심) + OP 로 분리해도 되지만,

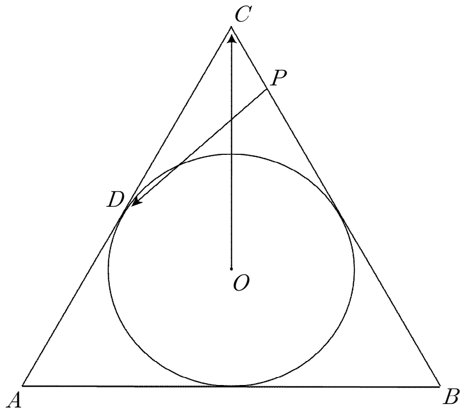
내적의 특성상 이렇게 분리했습니다. 이미 cos 값을 알고 있으니 편한것이지요.

내적에서 최대가 되야 하니, OP 는 AC 와 평행한 위치에 놓이면 됩니다.

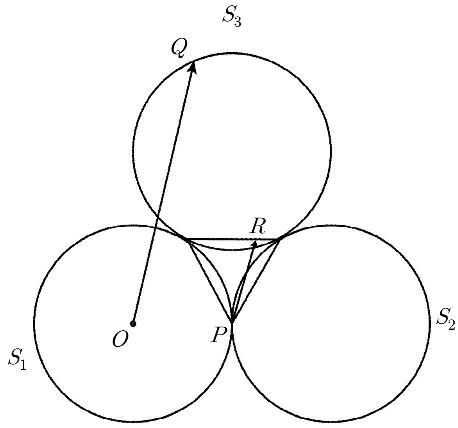
쩝 너무 쉽나요.

처음보는 두 문항 보면서 좀 더 연습해 보도록 합시다.

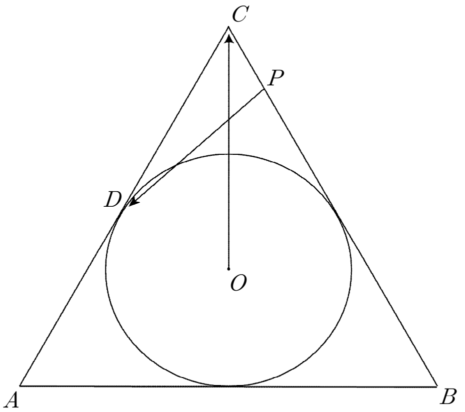
다음 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형ABC와 중심이 O인 내접원이 있다. 선분AC와 원의 접점인 점D와 선분BC위의 점 P에 대해서 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PD}$의 최솟값은?[3점]



다음 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 2인 세 개의 원 S_1, S_2, S_3가 있다. 원 S_1의 중심을 O, 원 S_1과 원 S_2의 교점을 P, 원 S_3와 원 S_2위의 임의의 점을 Q라 하자. 원 S_1과 원 S_3의 교점을 P_1, 원 S_2와 원 S_3의 교점을 P_2라 할 때, 삼각형 P_1P_2P 위의 임의의 점을 R이라 하자. $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]



해설.



$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD})$

이 때, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 3$ 이므로

$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PO}$ 만 최소면 된다.

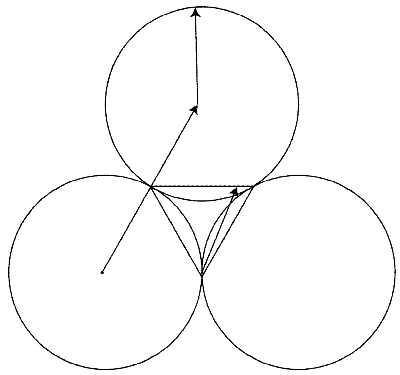
$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PO}$ 는 P가 C에 있을 때 최소로 -12가 된다.

$\therefore \min(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PD}) = -9$

최댓값 부터 생각해볼게요. 그전에, $\overrightarrow{OQ}$를 먼저 분해해보겠습니다.

일단 원 S_3의 중심을 활용해서 분해해보겠습니다.

그럼 다음과 같은 그림이 나옵니다.



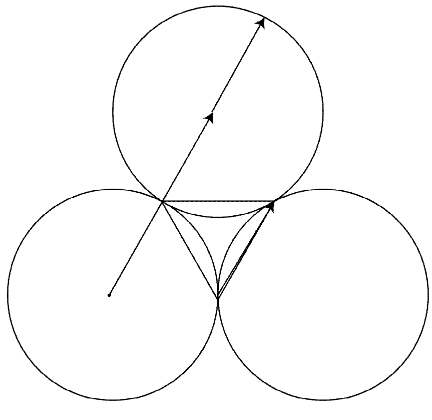
여기서 중요한게, 분해한 벡터 중 하나는 고정되어 있고 하나는

"방향"이 360도로 돌아갑니다. 즉, 고정된 벡터랑 정삼각형 위에 있는

벡터의 내적의 최대, 최소만 구해주면

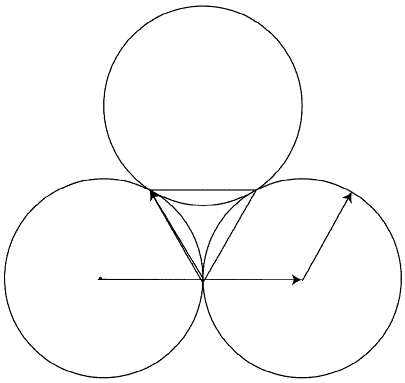
방향만 바뀌는 벡터를 정삼각형 위의 벡터와 맞춰주기만 하면 됩니다.

그럼 고정된 벡터와 정삼각형 위 벡터의 내적의 최대는 언제일까요



네 바로 이상황입니다. 방향만 변하는 벡터도 내적값이
최대가 되게끔 맞춰준 모양이네요.

이제 최소를 구해볼텐데, 최소는 S_2에서 결정됩니다.

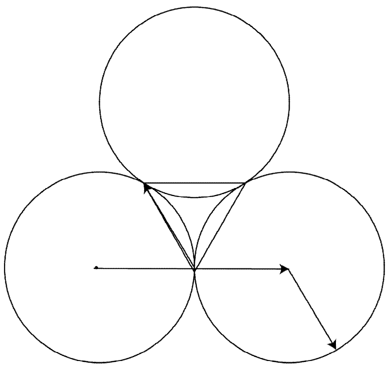


S_2로 분해한 모습입니다. 고정된 벡터와 정삼각형 위 벡터의
내적이 최소가 되려면 정삼각형 위 벡터는 저 모습이여야 합니다.

왜냐면 각도가 90도 이상이기 때문에 cos값이 음수이며,
크기도 최대이기 때문입니다.

이제 방향만 변하는 벡터를 움직여 내적값이 최소가 되게끔 하면

그림과 같이 됩니다.



최댓값 = 12.

최솟값 = -8

답 4

+ Part 1이 끝났습니다.

전 이걸 순수벡터 단원이라 부르는데, 어떤 공간좌표적인 요소가 들어가지 않아서입니다.

이 순수벡터단원은 요새 문제에는 출제되고 있지 않습니다. 방금 말한대로

공간좌표적인 요소나, 이면각의 최대최소 등 여러가지로 활용되고 있기 때문인데,

그래도 나오고 있지 않다 뿐이지, 출제가능성은 언제나 있는 것이고,

정말 기본중의 기본요소이기 때문에 반드시 알아두셔야 합니다.

당장이번 16수능 30번만 해도, 문제를 풀기에 앞서서 분해하는 과정이 쓰였기

때문이죠.

복습열심히 하시고,

Part2 는 공간좌표에 관한 칼럼이 될 것 같습니다.