2017 수능 EBS연계 장학자료

수학 가

부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION

일 러 두 기

2017학년도 대학수학능력시험에서도 EBS 수능교재 연계 비율이 70% 로 유지될 전망입니다. 이 점을 감안하면 EBS 교재의 철저한 학습이 수능 고득점에 결정적인 역할을 할 것이라고 확신합니다. 이 장학 자료는 2016학년도 대학수학능력시험과 2017학년도 대학수학능력시험 모의평가인 6월 및 9월 평가 문제에서 EBS연계문항이 어떻게 변형되어 출제되었는지 분석 제시함으로써 EBS연계에 대한 적응력을 높이도록 하였습니다. 또한 2017학년도 실제 수능시험을 두 달 남짓 남겨 둔 고3 수험생들에게 많은 분량의 EBS 수능교재를 효율적으로 정리하고, 나아가 실전에 대비하여 꼭 알아야 할 대표 문제 유형을 익히는데 도움을 주고자 하는 취지에서 출제 가능성이 높을 것으로 예상되는 EBS수능교재(수능특강, 수능완성)의 단원별 문항을 선정하여 제시하였고, 이를 변형한 문항을 통해 시험에 대비할 수 있도록 제작하였습니다.

이 교재의 특징을 요약하면 다음과 같습니다.

첫째, 본문과 정답 및 해설로 구성되어 있습니다.

둘째, 구성내용은 단원별 기출문항들을 분석하고 이에 따른 수능대비법을 제시하였습니다.

셋째, EBS연계교재인 수능특강과 수능완성에서 각 단원별로 기본적인 내용을 포함하면서 각 단원에서 자주 출제되는 대표예제를 선정하여 문항분석 및 기본개념을 학습하도록 구성하였습니다.

넷째, 2016학년도 대학수학능력시험 수학B 영역의 출제 문항 중 EBS연계교재 문항을 선정하고, EBS연계교재의 변형 전 문항과 변형 후 문항을 비교 분석하여 어떻게 변형되어 출제되고 있는 지 설명하였고, 문제 해결 전략을 제시함으로써 학생들이 쉽게 접근할 수 있도록 하였습니다. 기출문제 분석을 통해 EBS연계 유형을 익히도록 하고, 각 문항에서 중요하게 다루어지는 개념을 정리하였습니다. 또한 기출문제 분석을 통해 EBS연계 유형을 익히도록 하고, 각 문항에서 중요하게 다루어지는 개념을 정리하였습니다.

다섯째, 2017학년도 대학수학능력시험에 출제가 예상되는 EBS연계교재 문항을 선정하고, 이를 변형한 문항들을 제시함으로써 실전에 대비하도록 하였습니다.

이 교재는 EBS연계교재의 모든 내용을 수록하지 못하였지만 각 단원에서 꼭 챙겨야하는 개념위주로 문항을 구성하여 EBS연계 문항을 대비하는 수험생들에게 작은 도움이 되고자 하는 마음으로 제작하였습니다. 본 교재에 제시된 유형이외에도 중요한 수학적 개념을 담고 있는 여러 유형의 문제들을 통해 부족한 부분을 보충하시기 바랍니다.

C/O/N/T/E/N/T/S

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

기출 문항 분석

이 단원에서는 지수와 로그의 기본적인 성질을 이용한 계산문제, 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하고 활용하는 문제, 지수·로그방정식과 부등식을 푸는 문제 등이 출제된다.

특히 로그를 이용하여 실생활 문제를 해결하는 문제가 매년 출제되어 왔으나 제시문에 주어진 상황을 정확히 파악하고 조건에 맞게 정리하여 해결하면 쉽게 풀리는 수준이므로 비슷한 유형의 문제를 통해 연습한다면 큰 어려움 없이 해결 가능할 것이다.

또한 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 이해하여 그래프를 그린 후 해결하는 문제가 다소 높은 난이도로 출제된 적이 있으므로, 그래프를 그리는 연습을 충분히 하고, 각 함수의 그래프의 특징을 정확히 정리해 두는 것이 필요하다.

특히, 지수함수와 로그함수의 도함수를 활용한 문제를 푸는 연습을 해 두는 것도 필요하다.

이와 함께 현실의 각 상황에 맞는 대표 기출문제를 반복하여 연습하는 것이 필요하다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. B형. 20번	상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 해결하는 문제(정답형 4점)
2014수능. B형. 25번	로그를 이용하여 실생활 문제를 해결하는 문제(단답형 3점)
2014수능. B형. 19번	지수함수의 도함수를 묻는 문제(단답형 3점)
2015수능. B형. 22번	로그를 이용하여 실생활 문제를 해결하는 문제(단답형 3점)
2015수능. B형. 25번	로그방정식의 해를 구하는 문제(단답형 3점)
2016수능. B형. 10번	지수방정식을 활용한 실생활 문제(정답형 3점)

01 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 미적분Ⅱ 11쪽 14번

지수함수 $y=a^x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식이 $y=f(x)$일 때, $f(a^2+c)-b$의 값은? (단, $a\neq1$)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

EBS 문항 분석

가. 지수함수의 그래프를 이해하고, 평행이동과 대칭이동을 알 수 있는지를 물어보는 문항이다.

나. 주어진 두 그래프가 원점대칭임을 이용하여 영역을 더욱 쉽게 구할 수 있다. 그래프 문제의 경우 주어진 그래프의 평행이동, 대칭이동, 실수배 등을 통한 그래프의 식을 구할 수 있어야 하며, 그러한 그래프를 좌표평면에 정확히 나타낼 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 지수부등식의 풀이

❶ $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ 의 꼴 (단, $a>0$, $a\neq1$)

가) $a>1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$

나) $0<a<1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$

❷ $a^{f(x)}<b^{g(x)}$ 의 꼴 (단, $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$)

양변에 로그를 취하여 푼다. 즉, $f(x)\log a<g(x)\log b$

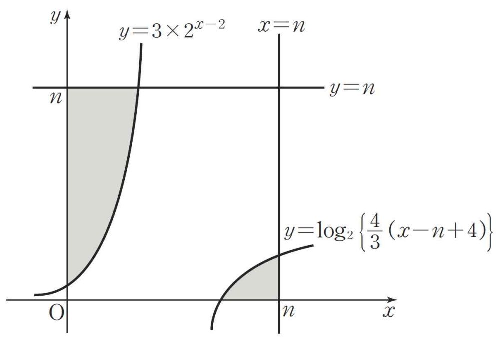
❸ $(a^x)^2+pa^x+q<0$의 꼴 (단, $a>0$, $a\neq1$, p, q는 상수)

같은 꼴이 반복되는 경우는 한 문자로 치환하여 푼다.

즉, $a^x=t$ $(t>0)$로 치환하면 $t^2+pt+q<0$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 미적분Ⅱ 30쪽 33번

4 이상의 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 곡선 $y=3\times2^{x-2}$, y축 및 직선 $y=n$으로 둘러싸인 도형의 경계 및 내부에 포함된 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a, 곡선 $y=\log_2\left\{\frac{4}{3}(x-n+4)\right\}$, x축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 도형의 경계 및 내부에 포함된 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 b라 하자. $a-b=32$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.



EBS 문항 분석

가. 로그함수와 지수함수는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하는 그래프 활용문제이다.

나. 함수의 식을 통해 그래프를 얼마나 이동시켰는지 확인하고 그래프의 대칭성을 이용하여 문제의 조건을 만족하는 영역을 찾을 수 있어야 한다.

다. 함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족하는 영역에 존재하는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 찾는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. $a>0, a\neq1$인 실수 a에 대하여 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이다.

나. $a>0, a\neq1$인 실수 a에 대하여 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 두 점 $(1,0)$, $(a,1)$을 지나고, y축(또는 직선 $x=0$)을 점근선으로 한다.

다. $a>0, a\neq1$인 실수 a에 대하여 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x 축의 방향으로 m만큼, y축으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\log_a(x-m)+n$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(가) 8쪽 5번

좌표평면에서 두 곡선

$y=-2^x+8,\ y=2^{-x}-8$

로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고, x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는?

① 81 ② 83 ③ 85 ④ 87 ⑤ 89

EBS 문항 분석

가. 지수함수의 그래프를 이해하고, 주어진 영역에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구할 수 있는지를 물어보는 문항이다.

나. 주어진 두 그래프가 원점대칭임을 이용하여 영역을 더욱 쉽게 구할 수 있다.
그래프 문제의 경우 주어진 그래프의 평행이동, 대칭이동, 실수배 등을 통한 그래프의 식을 구할 수 있어야 하며, 그러한 그래프를 좌표평면에 정확히 나타낼 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 0)$의 성질

❶ 정의역은 실수 전체의 집합, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

❷ 그래프는 점 $(0,1)$을 지나고, x축을 점근선으로 한다.

❸ $a>1$일 때 증가함수, $0<a<1$일 때 감소함수이다.

나. 도형의 이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을

❶ x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식 $f(x-a,\ y-b)=0$

❷ x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식 $f(x,\ -y)=0$

❸ y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식 $f(-x,\ y)=0$

❹ 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식 $f(-x,\ -y)=0$

❺ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식 $f(y,\ x)=0$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(가) 11쪽 17번

두 함수 $f(x)=\log_3 x+a$와 $g(x)=-2x+3$이 있다. 닫힌 구간 $[1,\ 27]$에서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 최댓값이 9이고 최솟값이 m일 때, m의 값은?(단, a는 상수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

EBS 문항 분석

가. 주어진 범위에서 로그함수의 최댓값을 구하는 문제이다.

나. 주어진 범위에서 로그함수의 최댓값을 구할 수 있어야 하며, 그러한 그래프를 좌표평면에 정확히 나타낼 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 로그의 진수 또는 밑에 미지수가 들어있는 방정식을 로그방정식이라 한다.

나. $a>0$, $a\neq 1$일 때,

- $\log_a f(x)=b$꼴의 방정식 : 방정식 $f(x)=a^b$과 부등식 $f(x)>0$을 동시에 만족시키는 x의 값을 구한다.
- $\log_a f(x)=\log_a g(x)$꼴의 방정식 : 방정식 $f(x)=g(x)$와 두 부등식 $f(x)>0$, $g(x)>0$을 동시에 만족시키는 x의 값을 구한다.
- $\log_a x$가 반복되는 방정식 : $\log_a x=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 만들고, t에 대한 방정식을 풀어서 x의 값을 구한다.
- $x^{\log_a x}=f(x)$꼴의 방정식 : 양변에 밑이 a인 로그를 취하여 해결한다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학B형 10번

어느 금융상품에 초기자산 W_0을 투자하고 t년이 지난 시점에서의 기대자산 W가 다음과 같이 주어진다고 한다.

$$W = \frac{W_0}{2} 10^{at}\left(1 + 10^{at}\right)$$

(단, $W_0 > 0$, $t \geq 0$이고, a는 상수이다.)

이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이다. 이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 k배일 때, 실수 k의 값은?(단, $w_0 > 0$이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

EBS 교재 2015 수능완성 수학 I B형 22쪽 9번

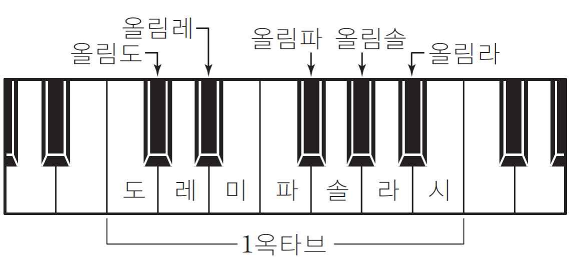
그림과 같이 피아노 건반의 1옥타브는 12개의 음

'도, 올림도, 레, 올림레, 미, 파, 올림파, 솔, 올림솔, 라, 올림라, 시'

가 이 순서로 배치되어 있다. 피아노 건반의 가장 왼쪽으로부터 n번째 건반을 눌렀을 때 나는 소리의 진동수를 $P(\mathrm{Hz})$라 하면

$P = 440 \times k^{n-49}$ (k는 1보다 큰 상수)

인 관계가 성립한다. 피아노 건반의 가장 왼쪽으로부터 13번째 건반을 눌렀을 때 나는 소리의 진동수는 55 Hz이다. 피아노 건반의 1옥타브에서 '미' 음과 '올림라' 음을 눌렀을 때 나는 진동수를 각각 $P_1(\mathrm{Hz})$, $P_2(\mathrm{Hz})$라 할 때, $\dfrac{P_2}{P_1}$의 값은? (단, $P_1 < P_2$)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt[4]{2}$ ④ $\sqrt[5]{2}$ ⑤ $\sqrt[6]{2}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형
나. 실생활의 문제 상황을 나타내는 식이 지수형태로 주어졌을 때, 문제 상황을 이해하고 주어진 식의 값을 구하는 문제이다.
다. 문제 상황에서 제시된 조건을 주어진 식에 대입하여 지수법칙을 이용하여 계산한다.
라. 문제 상황에서 필요한 조건들을 분리해 내어 정확히 주어진 식에 대입하여 정리하는 연습이 필요하며, 지수법칙을 정확히 이해하고 계산실수를 줄이도록 노력하여야 할 것이다.

문항풀이 Point !!

가. $a \neq 0$ 이고 n 이 양의 정수일 때, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ 이다.

나. $a > 0$ 이고 m 은 정수, n 은 2 이상의 정수일 때, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 임을 이용한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2016학년도 대수능 6월 모의평가 수학가형 10번

부등식 $\log_3(x-1)+\log_3(4x-7)\le 3$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2015년 수능완성 수학1 B형 26쪽 24번

두 자연수 a, b에 대하여 $\log_2(4-a)+\log_2(9-b)$의 값이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형
나. 로그함수를 이해할 수 있는지를 물어보는 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 주어진 조건을 충분히 활용하여 그 조건을 만족하는 식을 정확히 세울 수 있어야 한다.
나. 지수의 성질을 잘 활용하여 로그함수를 풀이하여야 한다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2016학년도 대수능 6월 모의평가 수학가형 25번

방정식 $3^{-x+2}=\dfrac{1}{9}$ 을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

EBS 교재 2015년 수능특강 수학Ⅰ B형 50쪽 5번

부등식 $4^x-18\cdot 2^x+32<0$의 해를 $\alpha<x<\beta$라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형

나. 지수부등식의 해를 구할 수 있는지를 물어보는 문항이다.

다. 같은 꼴이 반복되는 지수부등식의 경우 반복되는 부분을 한 문자로 치환하여 풀어준다.

라. 지수의 밑의 범위에 따라 부등호의 방향이 달라짐에 유의하여야 한다.

문항풀이 Point !!

가. 지수부등식의 풀이

❶ $a^{f(x)}<a^{g(x)}$의 꼴 (단, $a>0$, $a\neq 1$)

가) $a>1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$

나) $0<a<1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$

❷ $a^{f(x)}<b^{g(x)}$의 꼴 (단, $a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1$)

양변에 로그를 취하여 푼다. 즉, $f(x)\log a<g(x)\log b$

❸ $(a^x)^2+pa^x+q<0$의 꼴 (단, $a>0, a\neq 1, p, q$는 상수)

같은 꼴이 반복되는 경우는 한 문자로 치환하여 푼다.

즉, $a^x=t\ (t>0)$로 치환하면 $t^2+pt+q<0$

EBS 기출분석 4

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 23번

곡선 $y=\log_2(x+5)$의 점근선이 직선 $x=k$이다. k^2의 값을 구하시오.(단, k는 상수이다.) [3점]

EBS 교재 2016년 수능특강 미적분Ⅱ 12쪽 3번

곡선 $y=2-\log_2(ax+b)$가 점 $(2,\ 2)$를 지나고, 이 곡선의 점근선이 $x=-1$일 때, 두 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은? (단, $a\neq 0$)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형
나. 로그함수 그래프의 점근선을 이용하여 로그함수식을 구하는 문제이다.

문항풀이 Point !!

가. 로그함수의 그래프

❶ $a>0, a\neq 1$인 실수 a에 대하여 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 두 점 $(1,0)$, $(a,1)$을 지나고, y축(또는 직선 $x=0$)을 점근선으로 한다.

❷ $a>0, a\neq 1$인 실수 a에 대하여 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\log_a(x-m)+n$이고, $x=m$을 점근선으로 한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016 수능특강 미적분II 11쪽 예제 4번 변형

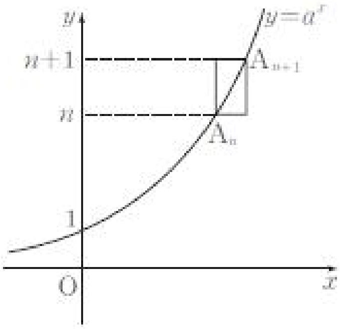
부등식 $2n - \log_2(4^n + 1 - x) \leq \log_2 x$를 만족시키는 정수 x의 개수가 64일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 미적분Ⅱ 14쪽 실력 완성 2번 변형

그림과 같이 지수함수 $y=a^x\ (a>1)$의 그래프가 두 직선 $y=n$, $y=n+1$(n은 자연수)과 만나는 점을 각각 A_n, A_{n+1}이라 하자. $\overline{A_nA_{n+1}}$을 대각선으로 하고 각 변이 x축 또는 y축과 평행한 직사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{31}\left(S_n-S_{n+1}\right)=2$이다. 실수 a의 값은?



① $\dfrac{8\sqrt{33}}{33}$ ② $\dfrac{8\sqrt{35}}{35}$ ③ $\dfrac{8\sqrt{37}}{37}$ ④ $\dfrac{8\sqrt{39}}{39}$ ⑤ $\dfrac{8\sqrt{41}}{41}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학가형 11쪽 16번 변형

닫힌 구간 $[0,\ 3]$ 에서 함수 $f(x) = 4^x - 2^{x+3} + 19$ 의 최솟값을 구하시오.

풀 이

02 지수함수와 로그함수의 도함수

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 미적분Ⅱ 24쪽 3번

함수 $f(x)=x\ln x-x$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(e+h)-f(e-2h)}{h}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 미분계수의 정의를 이용하는 대표적인 문제이다.
나. 위의 문제처럼 미분계수의 정의를 이용하여 복잡한 식에서 미분계수를 구하는 문제가 출제될 가능성이 높다.
다. 지수함수와 로그함수의 도함수에 관한 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 다음과 같다.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

나. 극한 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(e+h)-f(e-2h)}{h}$은 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(e+h)-f(e)+f(e)-f(e-2h)}{h}$의 꼴로 변형시킬 수 있다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 미적분Ⅱ 24쪽 5번

함수 $f(x)=\begin{cases} \ln x+a & (x>1) \\ ae^{x}+b & (x\le 1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.)

① $\frac{1}{e}-2$ ② $\frac{2}{e}-2$ ③ $\frac{1}{e}-1$ ④ $\frac{2}{e}-1$ ⑤ $\frac{1}{e}$

EBS 문항 분석

가. 지수함수와 로그함수로 연결된 함수에서 미분가능성을 묻는 문제로 함수의 연속과 미분가능의 정의를 묻는 문제이다.

나. 함수의 연속의 정의와 미분가능의 정의를 정확하게 파악해야 한다.

다. 지수함수와 로그함수로 연결된 함수에서 함수의 연속성을 먼저 조사하고 다음에 좌미분계수와 우미분계수를 조사해서 그 값이 같은지 파악해야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))g'(x)$이다.

나. 지수함수의 도함수

① $y=e^{f(x)}$이면 $y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$

② $y=a^{f(x)}$이면 $y'=a^{f(x)}\cdot\ln a\cdot f'(x)$ (단, $a>0$, $a\ne 1$)

다. 로그함수의 도함수

① $y=\ln|f(x)|$이면 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ (단, $f(x)\ne 0$)

② $y=\log_a|f(x)|$이면 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$ (단, $a>0$, $a\ne 1$, $f(x)\ne 0$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(가) 12쪽 21번

$a>1$인 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{2x}-1}{\log_a(1+3x)}=6(\ln 3)^2$$

일 때, a의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 무리수 e 의 정의와 지수함수, 로그함수의 극한을 묻는 문제이다.

나. 주어진 극한을 지수함수와 로그함수의 극한으로 나누어서 따로 계산을 한 후 자연로그로 바꿀 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

나. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$

다. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

라. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln e=1$

마. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(가) 13쪽 24번

두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\ln ax+e^{bx}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

(가) $f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{e}$

(나) $\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{1}{b}+h\right)-f\left(\frac{1}{b}-3h\right)}{h}=8e+8$

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

EBS 문항 분석

가. 주어진 조건을 이용하여 a, b의 값을 찾는 문제이다.

나. (나)조건에서 $f'\left(\frac{1}{b}\right)+3f'\left(\frac{1}{b}\right)=8e+8$을 찾을 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 다음과 같다.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

나. 극한 $\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{1}{b}+h\right)-f\left(\frac{1}{b}-3h\right)}{h}=8e+8$은 $f'\left(\frac{1}{b}\right)+3f'\left(\frac{1}{b}\right)=8e+8$의 꼴로 변형시킬 수 있다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학가형 4번

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{3x}$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\dfrac{7}{3}$ ⑤ $\dfrac{8}{3}$

EBS 교재 2016 수능특강 미적분Ⅱ 19쪽 예제 2번

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 지수함수, 삼각함수 극한의 활용

나. 무리수 e의 정의와 삼각함수, 로그함수의 극한을 이용하여 문제를 해결하는 전체적인 과정이 같은 문제이다.

문항풀이 Point !!

가. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ 임을 이용하여 극한값을 구해야 한다.

나. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$이면 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$일 때,

$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$ 이다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 11번

함수 $f(x)=\log_3 x$ 에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{2\ln 3}$ ② $\dfrac{2}{3\ln 3}$ ③ $\dfrac{5}{6\ln 3}$ ④ $\dfrac{1}{\ln 3}$ ⑤ $\dfrac{7}{6\ln 3}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소, 확대, 변형

나. 로그함수의 미분법과 미분계수의 정의를 이용하여 해결하는 문제이다.

문항풀이 Point !!

가. 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는 다음과 같다.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

나. 극한 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$ 은 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}=2f'(3)$ 의 꼴로 변형시킬 수 있다.

다. 로그함수의 도함수

① $y=\ln|f(x)|$ 이면 $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (단, $f(x)\neq 0$)

② $y=\log_a|f(x)|$ 이면 $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq 1$, $f(x)\neq 0$)

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항! 2016 수능특강 미적분II 24쪽 기초 연습 2번 변형

함수 $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ $(x>1)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to1}f(x)f(2-x)$의 값은?

① $\dfrac{1}{e^2}$ ② $\dfrac{1}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ e^2

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 미적분Ⅱ 24쪽 기초 연습 5번 변형

함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{18x}{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\cdots+\ln(1+nx)} & (x>0)\\ x+n & (x\le 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 자연수 n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학가형 14쪽 16번 변형

x 에 대한 $n\ (n \ge 2)$차의 다항식 $f(x) = ax^n$ 의 도함수를 $g(x)$ 라고 하면, $\{g(x)\}^2 = \{g'(x)\}^3$ 이 성립한다. 이 때, $\lim_{h \to 0} \frac{g(6+h) - g(6)}{h}$ 의 값을 구하여라.

풀 이

Ⅱ. 삼각함수와 삼각함수의 미분

기출 문항 분석

이 단원에서는 삼각함수와 삼각함수의 미분의 기본적인 성질을 이용한 계산문제, 삼각함수의 그래프를 이해하고 활용하는 문제, 삼각방정식과 부등식을 푸는 문제 등이 출제된다.

특히 삼각함수의 극한에서 그림을 이용하여 해결하는 문제가 매년 출제되어 왔으나 제시문에 주어진 상황을 정확히 파악하고 조건에 맞게 정리하여 해결하면 쉽게 풀리는 수준이므로 비슷한 유형의 문제를 통해 연습한다면 큰 어려움 없이 해결 가능할 것이다.

삼각함수 단원은 함수의 극한과 연계하여 삼각함수의 극한값을 구하는 문항이 최근 3년 동안에도 지속적으로 출제되고 있다. 모두 그림이 있는 4점짜리 문항으로 출제되었는데 극한값을 계산하는 것도 중요하지만 도형의 성질 및 삼각함수의 공식을 이용하여 주어진 삼각함수의 식을 구해내는 것이 일차적인 관건이 된다. 2013수능에서는 삼각형에서 정의된 선분의 길이를 사인법칙과 배각의 공식을 이용하여 삼각함수의 식으로 나타내는 단계를 거쳐야 했으며 2014수능에서는 주어진 조건에 따라 정의된 삼각형의 넓이를 이등변삼각형의 성질과 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 이용하여 삼각함수의 식으로 나타내는 단계를 거쳐야 하고 2015수능에서도 사인법칙과 삼각함수의 배각 공식을 이용하여 삼각함수 식으로 나타내는 단계를 거쳐야했다.

삼각함수 단원 내에서는 삼각함수의 덧셈정리, 합성, 배각의 공식, 반각의 공식을 활용하는 기본적인 문제가 출제되고 있으며 삼각함수의 극한에서는 원과 삼각형의 성질을 이용하여 극한값을 구하는 그림 문제가 계속 출제되고 있다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. B형. 30번	미분을 이용한 그래프 그려서 해결하는 문제(단답형 4점)
2015수능. B형. 14번	접선의 방정식을 이용하는 문제(정답형 4점)
2015수능. B형. 23번	여러 가지 함수의 도함수를 묻는 문제(단답형 3점)
2015수능. B형. 30번	미분가능성을 묻는 문제(단답형 4점)
2016수능 B형. 2번	삼각함수의 극한을 묻는 문제(정답형 2점)
2016수능 B형. 23번	삼각함수의 미분을 묻는 문제(단답형 3점)
2016수능 B형. 15번	삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구하는 문제(정답형 4점)
2016수능 B형. 28번	그림을 이용하여 삼각함수의 극한을 묻는 문제(단답형 4점)

01 삼각함수의 뜻과 그래프

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 미적분Ⅱ 11쪽 14번

직선 $x+2y-3=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때,

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{1+\cos(\pi+\theta)}$$

의 값을 구하시오. $\left(단,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

EBS 문항 분석

가. 직선의 기울기와 탄젠트의 연관성을 이해하고 x축의 양의 방향과 이루는 각을 구한 후 삼각함수의 기본정의를 묻는 문제이다.

나. sin, cos, tan 의 관계를 정확히 알아야 하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. 삼각함수의 뜻과 그 성질

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

2) $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta,\ \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$

나. 직선의 기울기와 tan 의 관계

x축의 양의 방향과 직선 $y=ax+b$가 이루는 각을 θ라 하면 $a=\tan\theta$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 미적분Ⅱ 38쪽 2번

$0 \le x \le 2\pi$에서 방정식 $3\sin x = -2$을 만족시키는 모든 x의 값의 합을 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

EBS 문항 분석

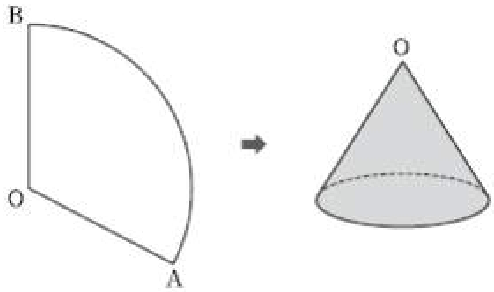
가. 삼각함수를 포함한 방정식의 문제이다.
나. 삼각함수를 포함한 방정식에서 특수 각이 아닌 방정식을 풀 때 그래프를 활용한 문제이다.
다. $\sin$그래프와 $\cos$그래프의 관계를 잘 파악해야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 삼각함수를 포함한 방정식의 풀이
 1) 주어진 방정식을 $\sin x = k$(또는 $\cos x = k$, $\tan x = k$)의 꼴로 변형한다.
 2) 함수 $y = \sin x$(또는 $y = \cos x$, $y = \tan x$)의 그래프와 직선 $y = k$의 교점의 x좌표를 구한다.
나. 삼각함수를 포함한 부등식의 풀이
 1) 부등호를 등호로 바꾸어 삼각함수를 포함한 방정식을 푼다.
 2) 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 부등식을 만족시키는 미지수의 값의 범위를 구한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3   2016년 수능완성 수학(가) 16쪽 2번

그림과 같이 넓이가 65π 인 부채꼴 OAB 를 이용하여 꼭짓점이 O 이고 호 AB 가 밑면의 둘레인 원뿔을 만들었다. 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h 라 할 때, $r : h = 5 : 12$ 이다. 부채꼴의 둘레의 길이를 $a + b\pi$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 자연수이다.)



EBS 문항 분석

가. 부채꼴의 호의 길이와 넓이에 관하여 묻는 문제이다.
나. 주어진 부채꼴로 원뿔을 만들 때 모선의 길이와 중심각에 대한 관계를 정확히 이해하고 호의 길이와 넓이의 공식을 정확하게 알아야 하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. 호도법과 육십분법

$$1\,(\text{라디안}) = \frac{180^\circ}{\pi},\quad 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\,(\text{라디안})$$

나. 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ (라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

1) $l = r\theta$

2) $S = \dfrac{1}{2}rl = \dfrac{1}{2}r^2\theta$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학(가) 17쪽 7번

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이고,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin^n\theta + \cos^n\theta\right) = \frac{11}{2}$$

일 때, $\sin\theta + \cos\theta$ 의 값은?

① 1 ② $\frac{11}{10}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{13}{10}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

EBS 문항 분석

가. 삼각함수와 무한등비급수를 활용한 문제이다.
나. 주어진 θ 의 범위에서 $0 < \sin\theta < 1$, $0 < \cos\theta < 1$ 이므로 무한등비급수는 수렴하고 그 값의 합을 이용하여 주어진 문제를 풀 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. $-1 < r < 1$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$

나. 다음과 같은 삼각함수 사이의 관계를 이해할 수 있다.

1) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

3) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

EBS 기출분석 1

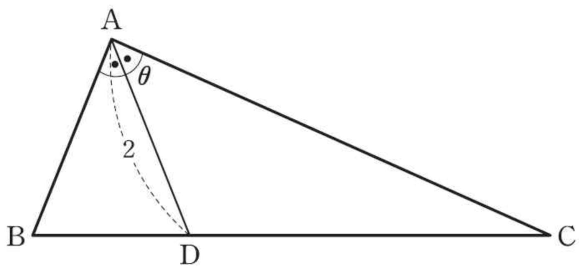
기출 문항 2016학년도 대수능 수학B형 15번

좌표평면에서 점 A의 좌표는 (1, 0)이고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 점 B의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$이다. 사각형 OACB가 평행사변형이 되도록 하는 제 1사분면 위의 점 C에 대하여 사각형 OACB의 넓이를 $f(\theta)$, 선분 OC의 길이의 제곱을 $g(\theta)$라 하자.
$f(\theta)+g(\theta)$의 최댓값은? [4점]

① $2+\sqrt{5}$ ② $2+\sqrt{6}$ ③ $2+\sqrt{7}$ ④ $2+2\sqrt{2}$ ⑤ 5

EBS 교재 2015 수능완성 수학 B형 유형편 74쪽 15번

그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\angle BAC=\theta$이고 $\angle BAC$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AD}=2$이고 두 삼각형 ABD, ADC의 넓이가 각각 3, 6일 때, $\cos 2\theta$의 값은?



① $-\frac{7}{25}$ ② $-\frac{8}{25}$ ③ $-\frac{9}{25}$
④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ $-\frac{11}{25}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형

나. 삼각함수의 배각과 반각의 공식을 이용하여 주어진 삼각함수의 값을 구하는 문제이다.

다. 삼각함수 사이의 관계를 이용할 수 있어야 하며 삼각형의 한 각의 이등분선이 가지는 성질도 이해하고 있어야 해결할 수 있는 문제이다.

라. 주어진 삼각형의 넓이를 사인을 이용한 삼각형의 넓이 공식으로 적용하면 쉽게 해결될 것 같지만 삼각함수들의 관계를 명확히 이해하고 있지 않다면 해결하기 어렵다.

문항풀이 Point !!

가. $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$, $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

나. $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$

다. $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학가형 7번

$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=2$ 일 때, $\tan\alpha$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{4}{9}$　③ $\dfrac{5}{9}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{7}{9}$

EBS 교재 2015년 수능특강 수학 II 41쪽 3번

방정식 $\cos x=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$ 의 한 실근을 α 라 할 때, $\cos 2\alpha$ 의 값은?

① $-\dfrac{5}{8}$　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $-\dfrac{3}{8}$

④ $-\dfrac{1}{4}$　⑤ $-\dfrac{1}{8}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형

나. 방정식의 근을 찾고 배각의 공식을 이용하여 $\cos 2\alpha$ 의 값을 구하는 문제이다.

다. 무리방정식에서의 무연근 개념과 삼각함수의 배각의 공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구하는 문제 유형이며 삼각함수의 최대와 최소 문제와 삼각함수의 극한 그림 문제 등에서 자주 이용되는 공식이므로 꼭 숙지할 필요가 있다.

문항풀이 Point !!

가. 배각의 공식

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$,　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

나. 반각의 공식

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$, $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 5번

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{7}$, $\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{7}$ 일 때, $\sin\alpha\sin\beta$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{7}$ ② $-\frac{2}{7}$ ③ $-\frac{3}{7}$ ④ $-\frac{4}{7}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

EBS 교재 2016년 수능특강 미적분Ⅱ 51쪽 2번

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{7}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{7}$ 일 때, $\tan\alpha+\tan\beta$의 값은? $\left(단, \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}<\beta<0\right)$

① $\frac{5\sqrt{6}}{4}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{4}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형

나. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는지를 물어보는 문항이다.

다. sin, cos, tan 의 관계를 정확히 알아야 하는 문제이다.

문항풀이 Point !!

가. 삼각함수의 덧셈정리

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

나. 삼각함수 사이의 관계

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

EBS 기출분석 4

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 7번

$0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $2\sin^2 x + 3\cos x = 3$ 의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

EBS 교재 2016년 수능완성 수학가형 20쪽 필수유형

$0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $\tan^2 x - 2\sec x + 1 = 0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 개념, 원리 활용

나. 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식의 모든 실근의 합을 구할 수 있는지를 물어보는 문항이다.

다. 삼각함수 사이의 관계를 정확히 알아야 하는 문제이다.

문항풀이 Point !!

가. $\mathrm{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

나. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 미적분Ⅱ 35쪽 유제 7번 변형

직선 $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \sin(\pi - \theta) + \cos(\pi + \theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

의 값은? $\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 미적분 II 38쪽 기초 연습 2번 변형

$0 \le x \le 2\pi$에서 방정식 $\cos(2\pi \sin x) = 0$을 만족시키는 모든 x의 값의 합은?

① 6π ② 7π ③ 8π ④ 9π ⑤ 10π

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학가형 15쪽 13번 변형

직선 $y=\frac{24}{7}x$ 와 x 축에 동시에 접하고, 중심이 제1사분면에 있는 원이 있다. 원점에서 이 원의 중심까지의 거리가 15일 때, 원의 반지름의 길이는?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

풀 이

02 삼각함수의 미분

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 미적분Ⅱ 47쪽 3번

구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(1-\cos x)f(x)=x\left(e^{2x}-1\right)$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

EBS 문항 분석

가. 함수의 극한 $\lim_{x \to a} f(x)$ 에서 $x \to a$ 는 x 는 a 와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워진다는 개념을 알고 그래프에 적용하는 문제로, 우극한 $\lim_{x \to a+0} f(x)$ 와 좌극한 $\lim_{x \to a-0} f(x)$ 의 개념을 이해해야 한다.

나. 한 점에서 연속이기 위한 조건을 알고 있다면 쉽게 해결할 수 있는 기본적인 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

나. 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(ⅰ) $x=a$에서 함숫값이 정의되어 있고

(ⅱ) $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하며

(ⅲ) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 미적분Ⅱ 52쪽 3번

세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=\begin{cases} e^x+bx+c & (x<0) \\ \pi\sin x & (0\le x\le\pi) \\ a(x-\pi)\ln x & (x>\pi) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{b-c}{a}$의 값은?

① $-\ln\pi$　② $-\dfrac{\ln\pi}{\pi-2}$　③ 0　④ $\dfrac{\ln\pi}{\pi-2}$　⑤ $\ln\pi$

EBS 문항 분석

가. 우극한 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$와 좌극한 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$가 같은 값을 가질 때 $x=a$에서 극한값이 존재한다.
나. 한 점에서 연속이기위한 조건을 알고 있다면 쉽게 해결할 수 있는 기본적인 문제이다.
다. 미분가능성의 문제는 우 미분계수와 좌 미분계수를 비교하여 풀 수 있도록 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 미분계수의 정의

함수 $y=f(x)$와 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

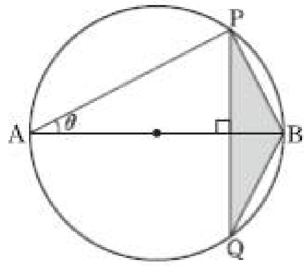
$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}==\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to h}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

나. 삼각함수의 도함수

① $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$
② $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$
③ $y=\tan x$이면 $y'=\sec^2 x$
④ $y=\sec x$이면 $y'=\sec x\tan x$
⑤ $y=\mathrm{cosec}\,x$이면 $y'=-\mathrm{cosec}\,x\cot x$
⑥ $y=\cot x$이면 $y'=-\mathrm{cosec}^2 x$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 | 2016년 수능완성 수학(가) 24쪽 28번

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 한 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\angle PAB = \theta$라 하고 삼각형 BPQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

EBS 문항 분석

가. 보조선을 적절히 그어서 높이를 θ에 관한 식으로 나타낸다.

나. 사인법칙을 이용하여 $\overline{OQ}$의 길이를 θ에 관한 식으로 나타내고, 넓이 $S(\theta)$를 삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.

다시 보는 개념 !!

가. 호도법과 육십분법

$$1\,(\text{라디안}) = \frac{180^\circ}{\pi},\quad 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\,(\text{라디안})$$

나. 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

1) $l = r\theta$

2) $S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r^2\theta$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(가) 17쪽 7번

함수 $f(x) = x\sin x$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

의 값은?

① $-\pi$ ② $-\frac{\pi}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

EBS 문항 분석

가. 미분계수의 정의를 이용하는 대표적인 문제이다.

나. 위의 문제처럼 미분계수의 정의를 이용하여 복잡한 식에서 미분계수를 구하는 문제가 출제될 가능성이 높다.

다시 보는 개념 !!

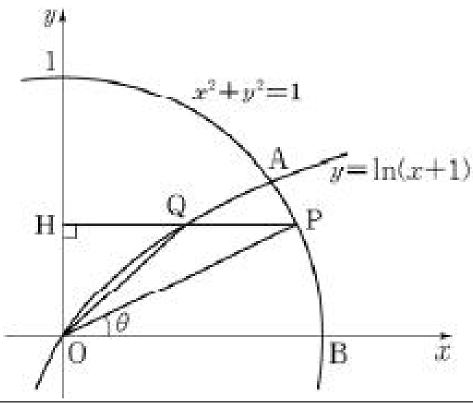
가. 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 다음과 같다.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

EBS 기출분석 1

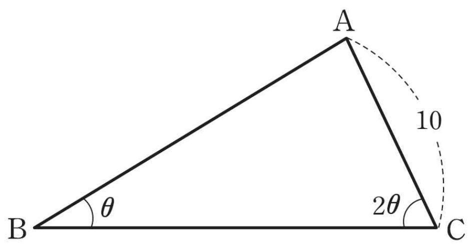
기출 문항 2016학년도 대수능 수학B형 28번

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\ln(x+1)$이 제 1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 B$(1,\ 0)$에 대하여 호 AB 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 곡선 $y=\ln(x+1)$이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle\mathrm{POB}=\theta$라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 HQ의 길이를 $L(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{L(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$이고, O는 원점이다.)



EBS 교재 2015 수능완성 수학B형 84쪽 13번

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=10$이고 $\angle\mathrm{ABC}=\theta$, $\angle\mathrm{ACB}=2\theta$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$



EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 삼각함수의 극한의 활용

나. 도형과 조건이 변형되었을 뿐, 넓이 $S(\theta)$를 θ에 관한 식으로 나타내고, 삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결하는 전체적인 과정이 같은 문제이다. 용되는 공식이므로 꼭 숙지할 필요가 있다.

문항풀이 Point !!

가. 보조선을 적절히 그어서 높이를 θ에 관한 식으로 나타낸다.

나. 사인법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 θ에 관한 식으로 나타내고, 넓이 $S(\theta)$를 삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 미적분Ⅱ 47쪽 예제 3번 변형

열린 구간 $(-\pi,\ \pi)$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$(2x-\pi)f(x)\cos x = 1-\cos(2x-\pi)$를 만족시킬 때, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① $-\dfrac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\dfrac{3}{4}$ ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 미적분Ⅱ 52쪽 실력 완성 3번 변형

함수 $f(x)=\begin{cases} 2+ae^{-x} & (x \le 1) \\ 3x+b\cos\dfrac{\pi}{2}x & (x>1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하도록 하는 두 상수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?

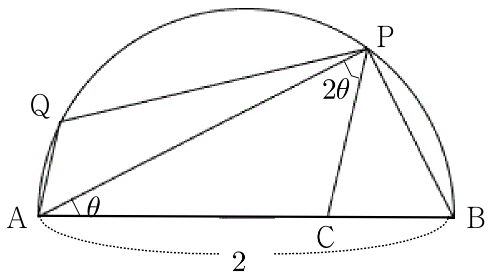
① $\dfrac{4e}{\pi}$　② $\dfrac{5e}{\pi}$　③ $\dfrac{6e}{\pi}$　④ $\dfrac{7e}{\pi}$　⑤ $\dfrac{8e}{\pi}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학가형 24쪽 28번 변형

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 한 점 P와 선분 AB 위의 점 C에 대하여 $\angle PAC = \theta$, $\angle APC = 2\theta$가 되도록 잡자. 반 원위의 점 P가 아닌 점 Q에 대하여 두 선분 AQ와 선분 CP가 평행할 때, 두 삼각형 APQ, BCP의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{T(\theta)}$의 값은?(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀 이

Ⅲ. 여러 가지 미분법과 활용

기출 문항 분석

미분법은 수능에서 매년 2~3문제씩 출제되는 단원으로 미분법에서 미분을 이용하여 그래프를 그리는 문제까지 출제 빈도를 고르게 유지하며 출제되므로 이에 대한 개념을 확실하게 이해하는 것이 중요하다. 미분단원에서 나오는 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 이용한 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제, 함수의 근을 판별하는 문제는 미분을 이용하여 그래프를 정확하게 그릴 수 있어야 문제를 풀이에 접근이 쉬워진다. 따라서 여러 가지 함수의 그래프의 특징을 이해하고 유형별로 정확하게 그래프를 그리는 연습이 필요하다. 최근에는 미분가능성을 묻는 문제나 미분을 이용하여 그래프를 그려서 해결하는 고난이도의 문제가 출제되었으므로 고득점을 받기 위해서는 절댓값 기호를 포함한 함수나 합성함수, 역함수와 관련하여 그래프를 해석하는 문제, 직선과 곡선의 교점의 개수, 새롭게 정의된 함수의 미분가능성과 연속성에 대한 판단 및 연속이 되기 위한 조건을 파악하는 고난이도 문제의 유형을 익혀 준비해야 한다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. B형. 30번	미분을 이용한 그래프 그려서 해결하는 문제(단답형 4점)
2015수능. B형. 14번	접선의 방정식을 이용하는 문제(정답형 4점)
2015수능. B형. 23번	여러 가지 함수의 도함수를 묻는 문제(단답형 3점)
2015수능. B형. 30번	미분가능성을 묻는 문제(단답형 4점)
2016수능. B형. 7번	곡선에서 접선의 방정식을 구하는 문제(단답형 3점)
2016수능. B형. 21번	미분법을 이용하여 주어진 값을 계산하는 문제(단답형 4점)

05 여러 가지 미분법

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 미적분Ⅱ 55쪽 예제1번

함수 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{x^2+2}$에 대하여 $f'(1)=\dfrac{2}{3}$이다. $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$이라 할 때 $g'(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{4}{3}$ ③ $-\dfrac{2}{3}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

EBS 문항 분석

가. 몫의 미분법과 관련된 문제이다.

나. $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$에서 $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$이므로 $g'(1)$의 값을 $f(x)$, $f'(x)$를 이용하여 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 곱의 미분법 : 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

나. 몫의 미분법 : 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq 0)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{\{g(x)\}^2}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 미적분Ⅱ 58쪽 유제5번

두 함수 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$에 대하여 $h(x)=(g\circ f)(x)$라 할 때, $h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

EBS 문항 분석

가. 합성함수의 미분법을 계산하는 문항으로 단순히 공식만 알고 있으면 풀 수 있다.

나. 삼각함수, 지수함수, 로그함수 등 여러 가지 함수에 대하여 미분법을 적용하는 내용은 매년 꾸준히 출제되고 있으므로 여러 가지 함수의 미분법에 대해서는 꼭 공식을 외워두어야 한다.

다시 보는 개념 !!

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$는 미분가능하며 그 도함수는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))g'(x)$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(가) 30쪽 8번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-2}{x-2}=2$$

를 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(f(x))-2}{x-2}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

EBS 문항 분석

가. 미분계수의 정의를 알고 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
나. 합성함수의 미분법을 정확하게 알고 있어야 한다.
다. 극한의 성질을 이용하여 함숫값을 알고 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 다음과 같다.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

나. 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))g'(x)$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(가) 31쪽 11번

a, b가 상수일 때, 함수 $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$가 모든 실수 x에 대하여 등식

$$af(x)+bf'(x)+f''(x)=0$$

을 만족시킨다. $a+b$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

EBS 문항 분석

가. 여러 가지 함수의 도함수와 미분법을 이용하여 이계도함수를 구하고, 미분계수를 구하는 문제이다.

나. 곱의 미분법을 사용하는 방법을 정확하게 숙지하고 있어야 한다.

다. 항등식의 성질을 이용하여야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 이계도함수의 정의

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$ (단, $f(x)$, $f'(x)$는 미분가능하다.)

나. 곱의 미분법 : 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학B형 23번

함수 $f(x)=4\sin 7x$에 대하여 $f'(2\pi)$의 값을 구하시오. [3점]

EBS 교재 2015 수능완성 수학B형 실전편 39쪽 23번

함수 $f(x)=4xe^{3x}+5\sin 3x$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항을 축소하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 곱에 대한 미분법을 사용하여 주어진 함수의 도함수를 구하는 문제이다. 변형된 기출 문항은 EBS교재에 있는 문항보다 항의 수를 줄여 더욱 간단한 형태로 만들었고 합성함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결해야 한다. 두 문항 모두 도함수의 함숫값을 구하는 가장 기본적인 문제이고, 도함수를 구하고 기출문제와 마찬가지로 합성함수의 미분법을 사용한다는 점에서 매우 유사한 문항이라 할 수 있다.

문항풀이 Point !!

가. 곱의 미분법 : 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

나. 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))g'(x)$이다.

다. 곱의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2016년 대수능 6월 모의평가 수학가형 13번

함수 $f(x)=(x^2-8)e^{-x+1}$은 극솟값 a와 극댓값 b를 갖는다. 두 수 a, b의 곱 ab의 값은? [3점]

① -34 ② -32 ③ -30 ④ -28 ⑤ -26

EBS 교재 2016 수능특강 미적분II 79쪽 2번

$x \geq 0$에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{-x}x^2(x^2+ax+5)$$

에 대하여 $f'(1)=0$일 때, $f(x)$는 $x=b$에서 최댓값을 갖는다. $b-a$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 사용하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 주어진 함수의 도함수를 구하여 미정계수를 정하고 함수의 그래프를 그려서 최댓값을 가지는 점을 찾는 문제이다. 변형된 기출 문항은 더욱 간단한 형태로 함수를 제시하고 미분을 통하여 극댓값과 극솟값을 갖는 값을 찾는 문제이다. 두 문항 역시 미분을 통해 증감표를 그려 해결한다는 점에서 매우 유사한 문항이라 할 수 있다.

문항풀이 Point !!

가. 주어진 함수의 도함수를 구한 후 $f'(1)=0$의 값을 이용하여 a값을 구한다.

나. 도함수를 바탕으로 증감표를 그리고 이 증감표를 이용하여 그래프를 그린다.

다. 그래프에서 최댓값이 되는 점을 찾아서 구한다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2016년 대수능 6월 모의평가 수학가형 15번

두 함수 $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=e^x$에 대하여 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ③ 1 ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

EBS 교재 2016 수능특강 미적분Ⅱ 59쪽 예제 3번

두 함수 $f(x)=(x^2-3)^2$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(g(x))-4}{x-1}$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 준 식만 달리하고 동일한 개념을 사용하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 미분계수의 정의를 이용하여 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 극한값을 구하는 문제이다. 변형된 기출 문항은 동일한 개념을 이용하여 다른 형태의 문제에 적용한 문항으로 함수만 달라졌을 뿐 개념적인 측면에서 미분계수의 정의와 합성함수의 미분법을 사용하여 해결한다는 점에서 매우 유사한 문항이라 할 수 있다.

문항풀이 Point !!

가. 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한값을 구할 수 있어야 한다.

나. 합성함수의 미분법을 사용하여 극한값을 구한다.

EBS 기출분석 4

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 9번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수x에 대하여 $f(2x+1)=(x^2+1)^2$ 을 만족시킬 때, $f'(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016년 수능완성 수학가형 29쪽 4번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 등식 $f(2x+1)=g(-3x-3)$을 만족시킨다. $f(1)=3$, $f'(1)=6$일 때, $g(-3)-g'(-3)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소, 확대, 변형

나. 합성함수 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 물어보는 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$는 미분가능하며 그 도함수는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))g'(x)$이다.

EBS 기출분석 5

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 27번

함수 $f(x)=2x+\sin x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4\pi,\ 2\pi)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

EBS 교재 2016년 수능특강 미적분 II 64쪽 5번

함수 $f(x)=x+e^{x}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}$의 값은?

① 1 ② $\dfrac{1}{2}e$ ③ 2 ④ e ⑤ $e+1$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소, 확대, 변형
나. 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 물어보는 문항이다.
다. 미분계수의 정의를 이용하여 문제를 해결한다.

문항풀이 Point !!

가. 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한값을 구할 수 있어야 한다.

나. 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능하면 $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ 이다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항!

2016 수능특강 미적분 II 64쪽 5번 변형

$\lim_{h \to 0} \frac{(2\sqrt{1+h}-1)^3-(2\sqrt{1-h}-1)^3}{h}$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능특강 미적분 II 61쪽 유제 6번 변형

함수 $f(x)=\ln(x^2+x)$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(n)}{2n+1}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학영역 가형 28쪽 1번 변형

곡선 $y=\dfrac{(3x+1)^6}{(x^2+1)^3(4x-1)^2}$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 기울기를 구하시오.

풀 이

06 도함수의 활용

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 미적분Ⅱ 69쪽 유제2번

곡선 $y=\sin(\ln x^2)+1$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

EBS 문항 분석

$f(x)=\sin(\ln x^2)+1$ 이라 두고 직선의 기울기가 $f'(1)=2$ 임을 알고 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

(1) 미분을 이용하여 곡선 위의 점 $(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 기울기 $f'(a)$ 를 구한다.

(2) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ 를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

나. 기울기가 주어진 접선의 방정식

(1) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$ 로 놓는다.

(2) 기울기 m 이 $f'(t)=m$ 임을 이용하여 t 의 값을 구한다.

(3) (2)에서 구한 t 의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

다. 곡선 밖의 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식

(1) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$ 로 놓는다.

(2) 접선의 방정식 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 에 점 $(x_1,\ y_1)$ 의 좌표를 대입하여 t 의 값을 구한다.

(3) (2)에서 구한 t 의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 미적분Ⅱ 73쪽 예제3번

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
(나) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 갖는다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선이 점 $(0,\ k)$를 지날 때, 상수 k의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 변곡점, 극댓값, 위의 점을 이용하여 삼차함수를 구할 수 있어야 한다.
나. 주어진 조건에 맞는 그래프 개형을 그려 푸는 문제가 자주 출제되고 있으므로 평소 함수의 그래프 개형을 그리는 연습을 해 두어야한다.

다시 보는 개념 !!

가. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.
나. 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 $(a,\ f(a))$이면 $f''(a)=0$이다.
다. 변곡점의 판정 : 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(가) 34쪽 20번

함수 $f(x) = ax - \ln(x^2+2)$가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 양수 a의 최솟값은?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　② $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　④ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

EBS 문항 분석

가. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 미분을 이용하여 판정하는 문제이다.
나. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하고, 도함수의 부호를 이용하여 $f(x)$의 증가와 감소를 판정하여 문제 조건에 부합되는 값을 구하면 된다.
다. 함수의 증가, 감소에 대한 개념을 정확하게 숙지하고 있어야 한다.
라. 주어진 조건에 맞는 그래프 개형을 그려 푸는 문제가 자주 출제되고 있으므로 평소 함수의 그래프 개형을 그리는 연습을 해 두어야한다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $f(x)$가 그 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여
　(1) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
　(2) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.
나. 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 항상
　(1) $f''(x) > 0$이면 곡선 $y = f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.
　(2) $f''(x) < 0$이면 곡선 $y = f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 | 2016년 수능완성 수학(가) 35쪽 24번

상수 a에 대하여 함수 $f(x)$가 $f(x)=(x^2+a)e^x$일 때, $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖는다. 함수 $g(x)=(x^2+a)e^{-x}$의 극솟값은?

① $-3e$ ② $-2e$ ③ $-e$ ④ $\frac{1}{e^2}$ ⑤ $\frac{2}{e}$

EBS 문항 분석

가. 미분을 이용하여 함수 $f(x)$의 극값을 구하는 문제가 문제이다.

나. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하고 $f'(x)=0$인 x의 값과 함수의 증가와 감소를 나타내는 표를 이용하여 극값을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $f(x)$의 극값 구하기

닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$에 대하여 $f'(x)=0$인 x의 값과 함수의 증가와 감소를 나타내는 표를 이용하여 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 극댓값, $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 극솟값이라 한다.

나. 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값 구하기

닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$가 열린 구간 (a, b)에서 극값을 가질 때,

(1) $f(x)$의 최댓값은 극댓값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이다.

(2) $f(x)$의 최솟값은 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 작은 값이다.

다. 도형과 관련된 문제에서 최댓값과 최솟값 구하기

(1) 적당한 변수를 사용하여 도형의 길이, 넓이, 부피를 한 변수에 대한 함수로 나타낸다.

(2) 주어진 조건에 따라 변수의 범위를 구한다.

(3) 미분을 이용하여 함수의 증가와 감소를 표로 나타내고, 이를 이용하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학B형 7번

곡선 $y=3e^{x-1}$ 위의 점 A에서의 접선이 원점 O를 지날 때, 선분 OA의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

EBS 교재 2015 수능특강 수학Ⅱ 104쪽 2번

곡선 $y=e^{2x}$에 접하고 기울기가 2인 직선이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 AOB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 묻는 내용을 달리하고 문항을 축소하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 주어진 곡선에서 기울기가 2인 접선이 축과 만나는 점으로 이루어진 삼각형의 넓이를 구하는 문제이지만 변형된 기출 문항은 미분을 이용하여 구해진 접선의 방정식을 이용하여 접점을 구하는 문제로 묻는 문항을 달리하였으나 접선을 이용하여 문제를 해결한다는 점에서 매우 유사한 문항이라 할 수 있다.

문항풀이 Point !!

가. 미분을 이용하여 기울기가 2인 접선의 접점을 구하고 이를 바탕으로 접선의 방정식을 구한다 .

나. 주어진 접선이 축과 만나는 점의 좌표를 구한다 .

다. 삼각형의 넓이를 계산한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1　　2016 수능특강 미적분Ⅱ 77쪽 유제 6번 변형

다음은 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 방정식 $e^x+x^{15}+7x-5=0$의 실근의 개수를 조사하는 과정이다.

> $f(x)=e^x+x^{15}+7x-5$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고
> $f(0)f(1)=\boxed{\text{(가)}}<0$
> 그러므로 중간값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 실근이 열린 구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.
> 그 실근을 α라 하고 α가 아닌 다른 실근 β가 존재한다고 하자. 즉 $\alpha\neq\beta$, $f(\beta)=0$인 β가 존재한다면 함수 $f(x)$는 연속이고 미분가능하며 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.
> 그런데 $f'(x)=\boxed{\text{(나)}}>0$이므로 모순이다.
> 따라서 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 방정식 $f(x)=0$은 $\boxed{\text{(다)}}$ 개의 실근을 갖는다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 수를 a, (나)에 들어갈 식을 $h(x)$, (다)에 알맞은 수를 b라 할 때, $a+h(1)+b$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

① $-3e+10$　② $-3e+11$　③ $-3e+12$　④ $-2e+10$　⑤ $-2e+11$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 미적분II 80쪽 3번 변형

정의역이 $\{x|0 \le x \le \pi\}$ 인 함수 $f(x)=2x\cos x$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f'(a)=0$ 이면 $\tan a=\frac{1}{a}$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 가지는 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ 에 있다.

ㄷ. 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 방정식 $f(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학영역 가형 36쪽 26번 변형

열린 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 곡선

$$y = ax^2 + 3x + 1 + \sin x$$

가 변곡점을 가지기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $-1 < a < 0$ ② $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ ③ $0 < a < 1$

④ $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ ⑤ $1 < a < 2$

풀 이

Ⅳ. 적분

기출 문항 분석

두 곡선 사이의 넓이나 회전체의 부피를 정적분으로 구하는 문제, 정적분으로 정의된 함수에 관련된 문제가 3년 연속으로 4점짜리로 자주 출제되고 있다. 치환적분법과 부분적분법의 계산은 반복 연습하여 실수하지 않도록 해두어야 하며 피적분함수가 기함수나 우함수의 형태로 주어져 복잡해 보이는 식도 주어진 함수의 그래프를 그려보거나 갖고 있는 성질을 이용하여 어렵지 않게 적분할 수 있다. 정적분으로 정의된 함수의 미정계수를 결정하는 문제를 다루어 보는 것이 필요하고 무한급수를 정적분을 이용하여 구하는 문제도 충분히 연습할 필요가 있다. 두 곡선 사이의 넓이 및 회전체의 부피를 구하는 정적분 활용 문제는 다항함수나 지수함수의 그래프를 그리고 교점을 구할 수 있어야 하며 규칙성이 있는 구간은 적절히 나누어 적분할 수 있어야 한다. 계속해서 4점짜리 어려운 문제로 등장하는 경향이 크므로 고득점을 받기 위해서는 기출문제를 통해 철저히 대비해 두도록 하자.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. B형. 13번	정적분을 이용하여 회전체의 부피를 구하는 문제(정답형 3점)
2014수능. B형. 21번	정적분으로 정의된 함수에 대하여 부분적분법과 대칭성을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제(정답형 4점)
2015수능. B형. 4번	정적분의 값을 계산하는 문제(정답형 3점)
2015수능. B형. 9번	무한급수의 합과 정적분 사이의 관계를 이용하는 문제(정답형 3점)
2015수능. B형. 28번	정적분으로 정의된 함수의 최댓값을 이용하여 직선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제(단답형 4점)
2016수능. B형. 4번	간단한 정적분 값을 계산하는 문제(정답형 3점)
2016수능. B형. 11번	회전체의 부피를 계산하는 문제(정답형 3점)
2016수능. B형. 30번	함수의 성질을 이용하여 주어진 조건에 맞는 함수의 그래프를 그려 정적분을 계산하는 문제(단답형 4점)

07 부정적분

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 미적분Ⅱ 89쪽 예제8번

점 $(0,\ -2)$를 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{2x}{1+x^2}$ 일 때, 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은?

① $-e^2$ ② $1-e^2$ ③ $2-e^2$ ④ e^2-1 ⑤ $2e^2$

EBS 문항 분석

가. 치환적분법을 통해 주어진 도함수를 적분하여 함숫값을 구하는 문제이다.

나. 치환적분법을 이용한 방법을 이해하고, 이를 활용하여 부정적분을 구할 수 있도록 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 치환적분법

$g(x)=t$ 이면 $g'(x)=\dfrac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$$

나. 치환적분의 여러 가지 공식

$$\int (ax+b)^n dx=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C \quad (\text{단, } a\neq 0,\ n\neq -1)$$

$$\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}\cdot e^{ax+b}+C \quad (\text{단, } a\neq 0)$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 미적분Ⅱ 91쪽 예제5번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=(x-1)e^x$ 이고 $f(x)$의 극솟값이 0일 때, $f(2)$의 값은?

① $e-1$ ② e ③ $e+1$ ④ $2e-1$ ⑤ $2e$

EBS 문항 분석

가. 부분적분법을 이용하여 주어진 도함수를 적분하고 극솟값을 이용하여 원시함수를 구한 후 원시함수의 함숫값을 구하는 문제이다.

나. 부분적분법을 적용할 경우 적분하기 쉬운 함수와 미분하기 쉬운 함수를 정하여 적용할 수 있도록 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 부분적분법 : 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

나. 피적분함수가 두 함수의 곱으로 이루어질 때, 적분하기 어려운 함수 또는 미분하면 간단해 지는 함수를 $f(x)$로 택하고 상대적으로 적분하기 쉬운 함수를 $g'(x)$로 택하여 공식에 적용한다.

로그함수	다항함수	삼각함수	지수함수

$\leftarrow f(x)$ $g'(x)\rightarrow$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(가) 42쪽 3번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. 상수 k의 값은? (단, $k>0$)

(가) $f(0)=-1$

(나) $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{e}{x}-1 & (x>1) \\ 2x+k & (x<1) \end{cases}$

(다) 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 주어진 조건을 바탕으로 부정적분을 이용
하여 함수를 추론하는 문제이다.

나. 실수전체에서 연속인 것을 이용하여 적분상수를 구하여야 한다.

다. 절댓값을 포함한 함수의 그래프를 바탕으로 함수의 그래프를 그려 상수 k의 값을 구하여야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(ⅰ) $x=a$에서 함숫값이 정의되어 있고

(ⅱ) $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하며

(ⅲ) $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$이다.

나. $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$ (단, C는 적분상수이다.)

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학(가) 44쪽 8번

연속함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x)$가

$$f(x)=F'(x),\ \int e^x f(x)dx = e^x - F(x)+1$$

을 만족시킨다. $F(0)=\ln 2$일 때, $F(\ln 2)$의 값은?

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

EBS 문항 분석

가. 부정적분과 미분의 관계를 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.
나. 주어진 식을 미분하여 $f(x)$를 구한 후 치환적분을 사용하여 계산하면 된다.
다. 치환적분은 적분 단원에서 빈번하게 사용되고 있으므로 이를 정확하게 숙지하고 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

(1) $\int \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx = f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\} = f(x)$

나. 치환적분법

$g(x)=t$ 이면 $g'(x)=\frac{dt}{dx}$ 이므로 $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 21번

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$ (나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$ 일 때, $f(2) - g(2)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{16}{3e^4}$ ② $\dfrac{6}{e^4}$ ③ $\dfrac{20}{3e^4}$ ④ $\dfrac{22}{3e^4}$ ⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

EBS 교재 2016년 수능완성 수학가형 42쪽 2번

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$xf'(x) - f(x) = x^2\cos x$, $f(\pi) = \pi$를 만족시킬 때, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① $\dfrac{\pi}{4}$ ② $\dfrac{\pi}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}\pi$ ④ π ⑤ $\dfrac{5}{4}\pi$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소, 확대, 변형
나. 미분과 부정적분의 관계를 이해하고 있는지를 물어보는 문항이다.
다. 삼각함수의 부정적분을 이용하여 주어진 함수값을 구한다.

문항풀이 Point !!

가. $\dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \cos x$ 을 $\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}' = \cos x$로 변형하여 부정적분과 미분의 관계를 이용하여 문제를 해결한다.

나. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx = f(x) + C$ (단, C는 적분상수) 이다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항! 2016 수능특강 미적분Ⅱ 92쪽 1번 변형

$x>0$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $\int f(x)dx=(x+1)f(x)-x^4-4x+3$ 을 만족시킬 때, $f(3)-f(1)$ 의 값은?

① $\frac{20}{3}$ ② $\frac{40}{3}$ ③ 20 ④ $\frac{80}{3}$ ⑤ $\frac{100}{3}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능특강 미적분Ⅱ 93쪽 2번 변형

미분 가능한 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x)=|x-2|+3x$$

이다. $f(3)=17$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학영역 가형 44쪽 8번 변형

미분가능한 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분 $F(x)$ 가

$$F(x) = xf(x) + (x-1)e^x$$

을 만족시킨다. $f(0) = f'(0) = -1$ 일 때, $f(\ln 2)$ 의 값은? (단, e 는 자연로그의 밑이다.)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

풀 이

08 정적분

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 미적분Ⅱ 97쪽 예제1번

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\cos 2x|\, dx$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 정적분의 성질을 이용하여 정적분 값을 구하는 문제이다.

나. 구간에서 절댓값 기호 안의 식의 부호가 변하는 점을 찾아서 그 점을 경계로 구간을 나누어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

(1) $\int_{a}^{b} kf(x)dx = k\int_{a}^{b} f(x)dx$

(2) $\int_{a}^{b} \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)dx$

나. 임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 함수 $f(x)$가 연속일 때

$$\int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

다. $\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 미적분Ⅱ 99쪽 유제3번

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$의 값은?

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

EBS 문항 분석

가. 주어진 급수를 정적분의 정의를 이용하여 바꾼 후 정적분의 기본 정리를 이용하는 문제이다.
나. 주어진 문제를 정적분의 정의를 이용할 수 있는 형태로 만들어야 한다.
다. 다양한 상황에서의 도형의 길이 또는 넓이에 대한 무한급수를 정적분으로 바꾸어 계산하는 문항이 출제될 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{pk}{n}\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_0^p f(x)\,dx$

나. 무한급수를 정적분으로 바꿀 때에는 x를 어떤 식에 대응시키느냐에 따라 다음과 같이 여러 가지로 나타낼 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{pk}{n}\right)\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_0^p f(a+x)dx=p\int_0^1 f(a+px)dx$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 수학(가) 48쪽 19번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = -f(-x)$이다.

(나) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)(\cos x - \sin x)dx = 36$

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

EBS 문항 분석

가. 함수의 그래프의 성질을 이용하여 정적분을 구하는 문제가 자주 출제된다.
나. 우함수와 기함수의 성질을 이용한 정적분 계산을 연습해 두는 것이 중요하다.
다. 주기함수인 경우 같은 주기상의 정적분 값이 같으므로 이를 이용하면 더 쉽게 접근할 수 있다.
라. 주기함수로는 다항함수 또는 삼각함수가 주로 이용되며 삼각함수인 경우 삼각함수 공식을 이용하여 피적분함수를 변형해서 적분해야 하는 경우가 많으므로 삼각함수의 여러 가지 공식들을 확실히 이해하고 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

가. $f(x) = f(-x)$ 이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

나. $f(x) = -f(-x)$ 이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

다. $f(x+p) = f(x)$ 이면 $\int_a^{a+p} f(x)dx = \int_{a+p}^{a+2p} f(x)dx$ (단, p는 상수)

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학(가) 49쪽 22번

음이 아닌 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

(가) $\int_0^1 f(x)dx = 7$

(나) 양수 a에 대하여 $\int_a^x f(t)dt = \frac{x^2-2x+b}{x+1}$ $(x \geq 0)$이다.

EBS 문항 분석

가. 정적분으로 나타내어진 함수 $\int_a^x f(t)dt$를 미분하는 문제이다.

나. $\int_a^a f(t)dt = 0$ 임을 이용하면 문제를 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

정적분으로 나타내어진 함수의 미분

가. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

나. $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt = f(x+a) - f(x)$

다. $\frac{d}{dx}\int_a^x x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + xf(x)$

라. $\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학B형 4번

$\int_{0}^{e} \frac{5}{x+e} dx$ 의 값은?

① $\ln 2$ ② $2\ln 2$ ③ $3\ln 2$ ④ $4\ln 2$ ⑤ $5\ln 2$

EBS 교재 2015 수능특강 적분과 통계 32쪽 1번

$\int_{0}^{\ln 4} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx + \int_{\ln 4}^{0} \frac{1}{e^x+1} dx$ 의 값은?

① $2-\ln 4$ ② $3-\ln 4$ ③ $2+\ln 4$
④ $3+\ln 4$ ⑤ $4+\ln 4$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항을 축소하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 정적분의 성질을 사용하여 식을 간단히 한 후 정적분의 값을 구한다. 변형된 기출 문항은 더욱 간단한 식을 제시하고 정적분의 값을 구하는 문제로 문항을 축소하여 출제한 문항이라고 할 수 있다.

문항풀이 Point !!

가. 정적분의 성질을 알고 있어야 한다.

나. 인수분해를 통해 식을 간단히 한 후 정적분의 기본정리를 이용하여 정적분의 값을 구한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2016학년도 대수능 6월 모의평가 수학가형 16번

$\int_{1}^{e} x(1-\ln x)dx$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}(e^2-7)$ ② $\frac{1}{4}(e^2-6)$ ③ $\frac{1}{4}(e^2-5)$ ④ $\frac{1}{4}(e^2-4)$ ⑤ $\frac{1}{4}(e^2-3)$

EBS 교재 2015 수능특강 미적분Ⅱ 103쪽 유제 7번

$\int_{1}^{2} x\ln x\,dx$의 값은?

① $2\ln 2-\frac{5}{4}$ ② $2\ln 2-1$ ③ $2\ln 2-\frac{3}{4}$

④ $2\ln 2-\frac{1}{2}$ ⑤ $2\ln 2-\frac{1}{4}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념을 사용하고 식의 모양도 거의 유사하게 출제

나. EBS교재에 있는 문항과 변형된 기출 문항은 식의 모양도 거의 유사하게 출제하였을 뿐 아니라 동일한 개념을 사용하는 문제이다. 단지 적분 구간이 달라졌으며 EBS문항모다 기출 문항이 조금 더 어려운 형태로 변형되었다. 두 문항 모두 적분을 통해 정적분의 기본정리를 사용하여 해결한다는 점에서 매우 유사한 문항이라 할 수 있다.

문항풀이 Point !!

가. $x\ln x$를 적분할 수 있어야 한다.

나. 정적분의 기본 정리를 사용하여 주어진 값을 구한다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 6번

$\displaystyle\int_0^3 \frac{2}{2x+1}dx$ 의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\ln 6$ ③ $\ln 7$ ④ $3\ln 2$ ⑤ $2\ln 3$

EBS 교재 2016년 수능완성 수학가형 46쪽 14번

$\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}dx$의 값은?

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 개념,원리 활용
나. 치환적분법을 이용하여 정적분값을 구할 수 있는지를 물어보는 문항이다.
다. 로그함수의 적분공식을 이용하여 해결할 수 있다.

문항풀이 Point !!

가. 치환적분법

$g(x)=t$ 이면 $g'(x)=\dfrac{dt}{dx}$ 이므로 $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$ 이다.

나. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_a^b$

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016 수능특강 미적분Ⅱ 105쪽 2번 변형

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\int_0^{\ln(n+2)}(e^x+1)dx$$

를 만족시킬 때, $a_{10}=\ln k$이다. 실수 k의 값은?(단, e는 자연로그의 밑이다.)

① $\frac{10}{9}e$ ② $\frac{11}{10}e$ ③ $\frac{12}{11}e$ ④ $\frac{11}{10}e^2$ ⑤ $\frac{12}{11}e^2$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 미적분Ⅱ 106쪽 4번 변형

닫힌 구간 $[1,2]$ 를 n등분하여 양 끝점을 포함한 각 등분점의 x 좌표를 차례로 $x_0(=1)$, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, $x_n(=2)$ 이라 하자. 함수 $f(x)=x^4$ 에 대하여 $F(n)=\sum_{k=1}^{n}(n+k)f(x_k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{F(n)}{1+2+3+\cdots+n}$ 의 값을 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학영역 가형 50쪽 25번 변형

연속함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 xf(x)dx$ 의 값은?

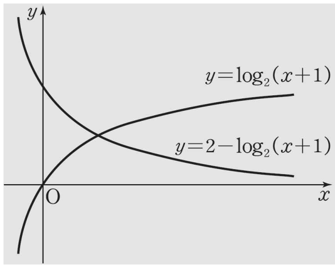
① $e-2$ ② $\frac{e-1}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $e-1$ ⑤ $\frac{e+1}{2}$

풀 이

09 정적분의 활용

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 미적분Ⅱ 111쪽 예제2번

그림과 같이 두 곡선 $y=\log_2(x+1)$, $y=2-\log_2(x+1)$ 과 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?



① $\dfrac{2}{\ln 2}-2$ ② $\dfrac{2}{\ln 2}-1$ ③ $\dfrac{2}{\ln 2}$

④ $\dfrac{4}{\ln 2}-2$ ⑤ $\dfrac{4}{\ln 2}-1$

EBS 문항 분석

가. 두 곡선과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제이다.

나. 주어진 곡선이 바로 적분되지 않으면 치환적분을 이용하여 구하고자 하는 식을 각각 구하여 쉽게 계산한다.

다시 보는 개념 !!

가. 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

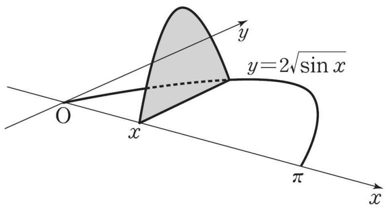
$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

나. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 미적분Ⅱ 113쪽 유제5번

그림과 같이 곡선 $y=2\sqrt{\sin x}$ $(0 \le x \le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반원일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π

④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

EBS 문항 분석

가. 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반원이므로 단면의 넓이 $S(x)$를 구해야 한다.

나. $S(x)$를 이용하여 정적분을 이용하여 부피를 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. 입체도형의 넓이

닫힌구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에서 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$이고, 함수 $S(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 이 입체도형의 부피 V는

$V=\int_a^b S(x)dx$ 이다.

나. 단면이 원인 입체도형의 넓이

닫힌구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에서 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반지름의 길이가 $f(x)$인 원일 때, 이 입체도형의 부피 V는

$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$ 이다.(단, $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이다.)

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(가) 53쪽 35번

자연수 n에 대하여 좌표평면의 원점에서 함수 $y=\ln x+n$의 그래프에 그은 접선의 접점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 함수 $y=\ln x+n$의 그래프와 x축 및 선분 AH로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

① $\frac{1}{e-1}$ ② $\frac{2}{e-1}$ ③ $\frac{3}{e-1}$ ④ $\frac{4}{e-1}$ ⑤ $\frac{5}{e-1}$

EBS 문항 분석

가. 곡선과 좌표축 사이의 넓이를 구하는 문제이다.
나. 접선을 이용하여 해당되는 부분의 넓이를 구하는 방법을 정확하게 숙지하고 있어야 한다.
다. 등비수열의 합 공식을 사용하여 문제를 풀이해야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

나. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a \neq 0)$의 수렴과 발산

(1) $|r|<1$ 일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$ 이다.

(2) $|r| \geq 1$ 일 때, 발산한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학(가) 54쪽 37번

양수 a에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \int_1^x \frac{2\ln t + a}{t} dt$의 최솟값이 $-\frac{9}{4}$이다. 함수 $g(x) = \ln x$에 대하여 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{2}{e^2}$ ③ $\frac{3}{e^2}$ ④ $\frac{4}{e^2}$ ⑤ $\frac{5}{e^2}$

EBS 문항 분석

가. 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 문제이다.

나. 정적분으로 나타내어진 함수의 미분에 대한 성질을 정확하게 숙지하고 이를 적용할 수 있어야 한다.

다. 부분적분법을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하면 된다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

나. $\int_a^x f(t)dt$를 포함하는 함수가 주어질 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x),\quad \int_a^x f(t)dt=0$$

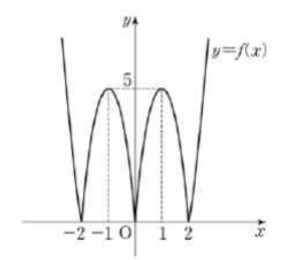
EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학B형 11번

[11~12] 함수

$$f(x)=\begin{cases}|5x(x+2)| & (x<0)\\ |5x(x-2)| & (x\ge 0)\end{cases}$$

의 그래프가 다음과 같다. 11번과 12번의 두 물음에 답하시오.



닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? [3점]

① $\frac{65}{6}\pi$ ② $\frac{35}{3}\pi$ ③ $\frac{25}{2}\pi$ ④ $\frac{40}{3}\pi$ ⑤ $\frac{85}{6}\pi$

EBS 교재 2015 수능특강 적분과 통계 53쪽 유제5번

닫힌 구간 $[0,\ \pi]$에서 정의된 함수 $y=\sin x$의 그래프와 이 그래프 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$과 원점을 지나는 직선으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는?

① $\frac{1}{12}\pi^2$ ② $\frac{1}{6}\pi^2$ ③ $\frac{1}{4}\pi^2$ ④ $\frac{1}{3}\pi^2$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi^2$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 곡선 $y=\sin x$와 이 그래프 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$과 원점을 지나는 직선으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 구한다. 변형된 기출 문항은 더욱 간단하게 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 이용하여 해결한다는 점에서 매우 유사한 문항이라 할 수 있다.

문항풀이 Point !!

가. 회전체의 부피에 대한 정적분 값을 계산할 수 있어야 한다.

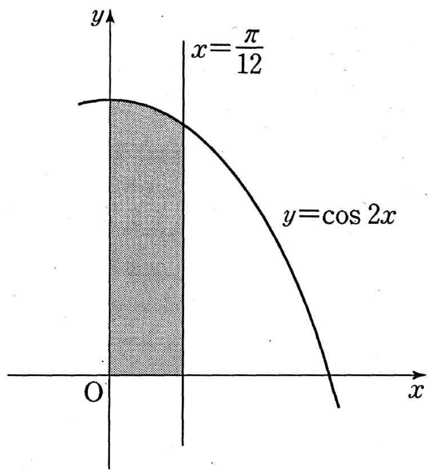
나. 단면이 원인 입체도형의 부피는 $V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$이다.(단, $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이다.)

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 13번

함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y=a$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2\pi}$ ② $\frac{1}{\pi}$ ③ $\frac{3}{2\pi}$ ④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{2\pi}$



EBS 교재 2016년 수능완성 수학가형 164쪽 10번

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 두 직선 $x=2$, $x=a$ $(a>2)$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\ln 5$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소, 확대, 변형
나. 곡선과 좌표축사이의 넓이를 정적분으로 나타낼 수 있는지를 물어보는 문항이다.
다. 분수함수의 정적분을 이용하여 넓이를 구한다.

문항풀이 Point !!

가. 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

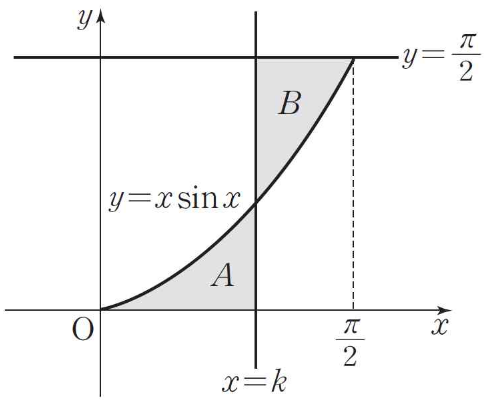
나. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_a^b$

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 미적분II 115쪽 2번 변형

그림과 같이 곡선 $y = x\sin x \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 이 곡선과 x축, 직선 $x = k$로 둘러싸인 영역을 A, 이 곡선과 직선 $x = k$, 직선 $y = \frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값은?(단, $0 \le k \le \frac{\pi}{2}$)



① $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$ ④ $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}$ ⑤ $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

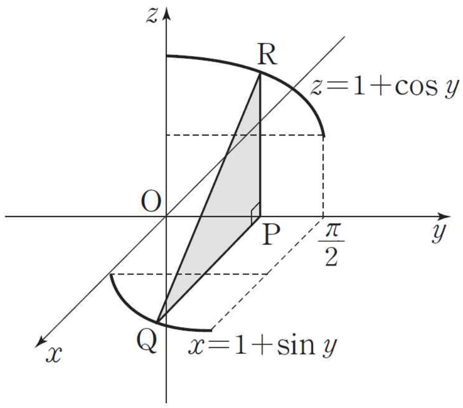
2016 수능특강 미적분Ⅱ 116쪽 2번 변형

좌표공간에서 xy 평면위의 곡선 C_1과 yz 평면 위의 곡선 C_2는 각각

C_1 : $x=1+\sin y,\ z=0$

C_2 : $z=1+\cos y,\ x=0$

이다. y축 위를 움직이는 점 P를 지나고 y축에 수직인 평면이 두 직선 C_1, C_2와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. 점 P가 원점 O에서 점 $\left(0,\ \frac{\pi}{2},\ 0\right)$까지 움직일 때, 삼각형 QPR가 나타내는 입체도형의 부피는?



① $\frac{\pi+1}{4}$ ② $\frac{\pi+2}{4}$ ③ $\frac{\pi+3}{4}$ ④ $\frac{\pi+4}{4}$ ⑤ $\frac{\pi+5}{4}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학영역 가형 54쪽 36번 변형

$x \neq 0$ 인 모든 실수에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(3) = -1,\ f(-3) = 1$
> (나) $x \neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) + xf'(x) = 0$이다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축으로 방향으로 5 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 그래프를 $y = g(x)$ 라 하고, 함수 $y = g(x)$ 의 역함수를 $y = h(x)$ 라 하자.
두 함수 $y = g(x),\ y = h(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $2(3\ln 3 - 1)$ ② $2(3\ln 3 - 2)$ ③ $6(\ln 3 - 1)$
④ $2(4 - 3\ln 3)$ ⑤ $2(5 - 3\ln 3)$

풀 이

VI. 평면곡선

기출 문항 분석

이 단원에서는 포물선, 타원, 쌍곡선 등 이차곡선의 정의와 기본 성질, 접선과 관련된 성질 등을 묻는 문제가 자주 출제되고 있다. 포물선, 타원, 쌍곡선의 정의를 정확하게 이해하여 방정식으로 표현할 수 있어야 하며 여러 가지 문제 상황을 좌표평면에 그림으로 나타내어 해결하도록 한다. 평면곡선의 접선의 방정식을 구하기 위하여 음함수의 미분법과 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 익히고 이와 관련된 문항을 연습해야 한다.

이차곡선의 정의에 대한 복잡한 문제는 이차곡선의 정의나 성질을 이용하면 쉽게 해결되는 경우가 많다. 또한 이차곡선의 방정식과 초점의 좌표, 꼭짓점의 좌표, 준선의 방정식, 장축 및 주축의 길이, 쌍곡선의 점근선 등 이차곡선과 관련된 용어를 정확하게 알아 둘 필요가 있다. 접선에 관한 문제는 각각의 이차곡선에 맞게 접선의 방정식을 구하는 공식을 정확하게 암기하여 구분해야 하며 실생활 문제는 문제 상황에 맞게 방정식을 세워 좌표평면 위에 그림으로 표현해보는 연습을 해 두는 것이 좋을 것이다.

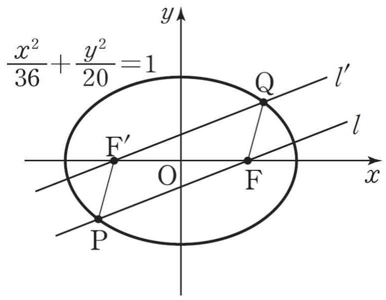
출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. B형. 8번	포물선의 접선의 기울기를 알 때 접선의 방정식을 구하여 활용하는 문제 (정답형 3점)
2014수능. B형. 13번	쌍곡선과 직선에 의해 둘러싸인 부분을 y축 둘레로 회전하였을 때 생기는 부피를 구하는 문제(정답형 3점)
2014수능. B형. 14번	회전변환에 의해 옮겨진 직선이 쌍곡선의 초점을 지나게 될 때, 회전각 θ를 구하는 문제(정답형 4점)
2014수능. B형. 27번	타원의 정의와 평면에서의 두 점 사이의 최단거리의 성질을 이용하는 문제(단답형 4점)
2015수능. B형. 10번	포물선의 성질을 이용하여 주어진 선분의 길이를 구하는 문제(정답형 3점)
2015수능. B형. 27번	타원의 정의를 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구하는 문제(단답형 4점)
2016수능. B형. 9번	포물선의 접선을 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. B형. 26번	타원의 정의와 코사인 제2법칙을 이용한 미지의 타원의 방정식을 구하는 문제(단답형4점)

10 이차곡선

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 기하와 벡터 14쪽 3번

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 의 두 초점이 F, F′ 이고 점 F를 지나는 직선 l은 타원과 제3사분면 위의 점 P에서 만나고, 점 F′을 지나는 직선 l'은 타원과 제1사분면 위의 점 Q에서 만난다. 두 직선 l과 l'이 서로 평행하고 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{15}$ 일 때, $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF}}$ 의 값은? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



① 8　② $6\sqrt{2}$　③ $4\sqrt{5}$　④ $2\sqrt{22}$　⑤ $4\sqrt{6}$

EBS 문항 분석

가. 타원의 방정식에서 초점의 좌표를 구하여 장축의 길이를 이용하는 문제로 전형적인 타원의 정의에 관한 문제이다.

나. 직각삼각형의 피타고라스 정리와 평행사변형의 성질을 이용하여 풀이가 가능하다.

다. 도형의 경우 수능에서 보조선을 이용하여 관계식을 찾는 문제는 반드시 출제된다.

다시 보는 개념 !!

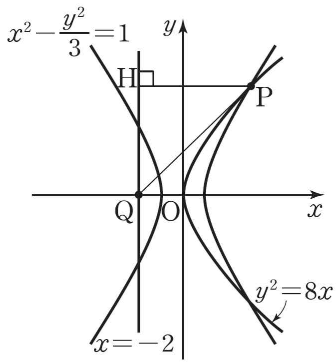
가. 타원 위의 임의의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같다.

나. 두 초점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$으로부터 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(단, $a>c>0$, $b^2=a^2-c^2$)이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 기하와 벡터 14쪽 4번

그림과 같이 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$과 포물선 $y^2=8x$의 한 교점을 P라고 하자. 직선 $x=-2$가 x축과 만나는 점을 Q라고 하고, 점 P에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PH}}$의 값은?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

EBS 문항 분석

가. 포물선의 정의와 쌍곡선의 정의를 동시에 이용하는 개념이해 문제이다.
나. 두 이차곡선의 정의를 복합적으로 물어보는 문제로 기본적인 이차곡선의 정의와 성질을 정확히 파악해야 하며 반드시 익혀두어야 하는 기본적인 유형의 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. 평면 위의 서로 다른 두 정점 F, F′으로부터 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라 하고, 두 정점 F, F′을 쌍곡선의 초점이라 한다.

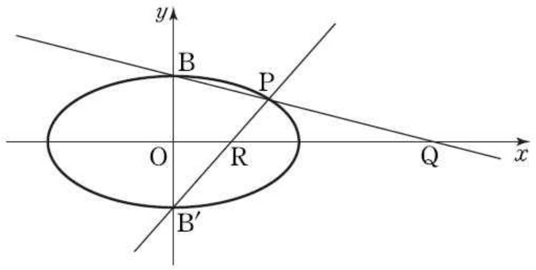
나. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점은 $(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$, $(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$ 이다.

다. 평면 위의 한 점 F와 점 F를 지나지 않는 한 직선 l에 대하여 점 F와 직선 l로부터 거리가 같은 점들이 나타내는 도형을 포물선이라고 한다.

라. 초점의 좌표가 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$(단, $p\neq0$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(가) 106쪽 08번

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(4,\ 2)$와 y축 위에 있는 타원의 두 꼭짓점 $\mathrm{B},\ \mathrm{B}'$에 대하여 두 직선 $\mathrm{PB},\ \mathrm{PB}'$이 x축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{Q},\ \mathrm{R}$라 하자. 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR}}=32$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, $b>2$)



EBS 문항 분석

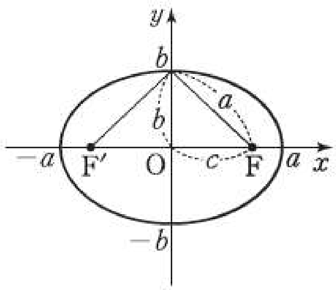
가. 타원의 정의와 타원 위의 한 점을 지나는 직선에 관한 문제로서 해석기하 문제이다.
나. 직선의 방정식을 이용하여 x절편을 직접 계산해서 관계식을 찾아 상수를 해결하는 것이다.
다. 타원의 경우 정의를 이용하는 문제가 있는 반면에 해석기하로서 복잡한 계산력을 요구하는 문제가 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$으로부터 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

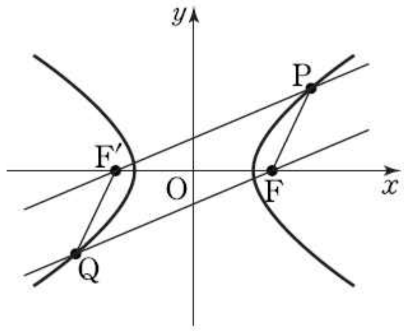
(단, $a>c>0,\ b^2=a^2-c^2$)이다.

① 초점: $\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$
② 장축의 길이: $2a$
③ 단축의 길이: $2b$



2017수능대비 EBS 대표 예제 4　　2016년 수능완성 수학(가) 108쪽 13번

그림과 같이 두 초점이 F, F$'$ 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ 위의 제 1사분면에 있는 점 P와 제 3사분면에 있는 점 Q에 대하여 직선 F$'$P와 직선 FQ가 서로 평행하고, 사각형 PF$'$QF의 넓이가 $120\sqrt{3}$ 일 때, 직선 F$'$P의 기울기는? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



① $\frac{\sqrt{3}}{4}$　② $\frac{3\sqrt{3}}{13}$　③ $\frac{3\sqrt{3}}{14}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{5}$　⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

EBS 문항 분석

가. 쌍곡선의 정의와 평행사변형의 성질을 이용하는 문제이다.

나. 평행사변형의 성질을 이용하여 점 P와 점 Q가 원점에 대한 대칭임을 이용하여 삼각형의 넓이가 서로 같다는 것을 구할 수 있고 평행사변형의 넓이를 이용하여 점 P의 y좌표를 구하는 문제이다.

다. 논증기하와 해석기하가 적절히 썩여있는 문제로서 쌍곡선의 기하학적 성질을 요구하는 문제이며 기출빈도가 높은 문항이다.

다시 보는 개념 !!

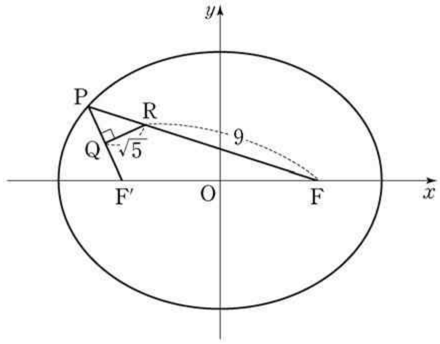
가. 평면 위의 서로 다른 두 정점 F, F$'$으로부터 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라 하고, 두 정점 F, F$'$을 쌍곡선의 초점이라 한다.

나. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점은 $(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$이다.

EBS 기출분석 1

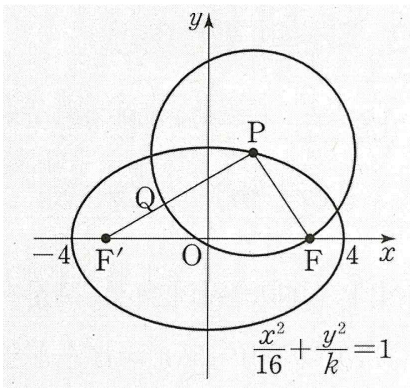
기출 문항 2016학년도 대수능 수학B형 26번

그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 위에 있고 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 PF'의 중점을 Q, 선분 PF를 $1:3$으로 내분하는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{RF}}=9$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 양수이다.) [4점]



EBS 교재 2015 수능특강 기하와 벡터 45쪽 1번

그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{k}=1$ $(0<k<16)$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하고, $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{OF}}$인 타원 위의 점 P를 중심으로 하고 점 F를 지나는 원과 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{P}$의 교점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{QF}'}=1$일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이고, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형

나. 타원 위의 한 점을 중심으로 초점을 지나는 원에 관한 문항으로 타원의 정의를 묻는 문제이다.

문항풀이 Point !!

가. 타원의 위의 한 점에서 두 초점사이의 거리의 합이 장축의 길이와 같음을 이해하고 있는지 알아보는 전형적인 타원의 정의를 묻는 문항이다.

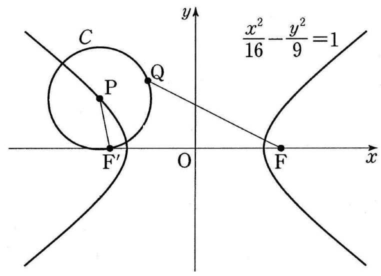
나. 타원의 방정식에서 초점의 좌표를 구할 수 있어야 한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학가형 18번

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 의 두 초점을 F, F′ 이라 하고, 이 쌍곡선 위의 점 P 를 중심으로 하고 선분 PF′ 을 반지름으로 하는 원을 C라 하자. 원 C위를 움직이는 점 Q 에 대하여 선분 FQ 의 길이의 최댓값이 14 일 때, 원 C의 넓이는? (단, $\overline{\mathrm{PF'}}<\overline{\mathrm{PF}}$) [4점]

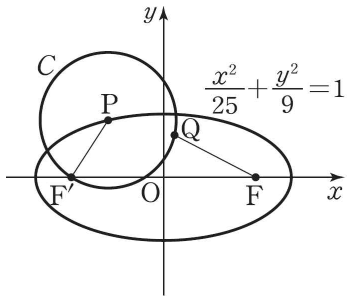
① 7π ② 8π ③ 9π ④ 10π ⑤ 11π



EBS 교재 2016 수능특강 기하와 벡터 13쪽 3번

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 의 두 초점을 F, F′ 이라 하고, 이 타원 위의 점 P 를 중심으로 하고 선분 PF′ 을 반지름으로 하는 원을 C라고 하자. 원 C 위의 점 Q 에 대하여 선분 FQ 의 길이의 최솟값이 4 일 때, 원 C의 넓이는? (단, $\overline{\mathrm{PF'}}<\overline{\mathrm{PF}}$ 이다.)

① 6π ② 7π ③ 8π
④ 9π ⑤ 10π



EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형
나. 원과 타원의 정의를 이용하여 두 점사이의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이다. 기하 분야에서 최적화 문제나 최댓값과 최솟값 문제는 가장 중요한 내용 중 하나이다.

문항풀이 Point !!

가. 타원의 정의를 이용하여 점 P에서 두 초점 사이의 거리가 10 임을 구하는 문제이다.
나. 원 밖의 한 점과 원주 위의 동점에 대한 최대 최소 문제는 원의 중심과 원 밖의 한 점 사이의 거리를 구하는 것이 문항풀이의 포인트이다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학가형 26번

타원 $4x^2+9y^2-18y-27=0$의 한 초점의 좌표가 $(p,\ q)$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. [4점]

EBS 교재 2016 수능특강 기하와 벡터 12쪽 1번

포물선 $y^2+6y-4x+17=0$의 초점이 $\mathrm{F}(a,\ b)$일 때, ab의 값은?

① -15 ② -12 ③ -9 ④ -6 ⑤ -3

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형

나. 수능특강의 문제는 포물선의 식을 통해 초점을 구하는 문항이며 6월 모의평가에서는 타원의 식을 통해 초점을 구하는 정의를 요구하는 기초문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 이차곡선의 일반형을 완전제곱 형태인 표준형으로 식을 변환할 수 있어야 한다.

나. 타원의 표준형과 포물선의 표준형에서 초점의 좌표를 구할 수 있어야한다.

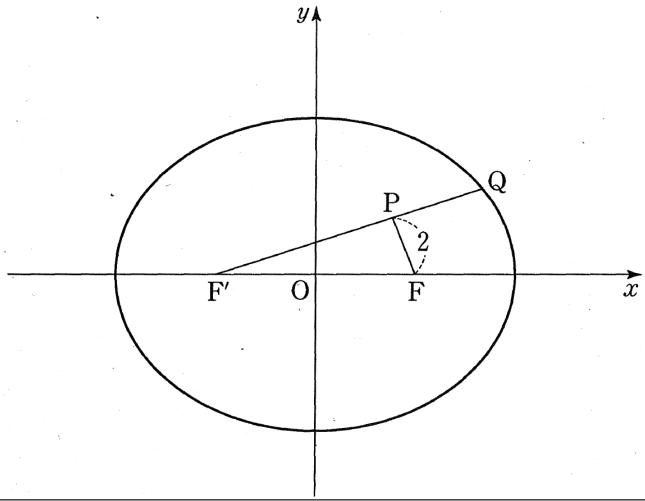
EBS 기출분석 4

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 27번

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$의 두 초점 F, F′이고, 제1사분면에 있는 두 점 P, Q는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{PF}}=2$
(나) 점 Q는 직선 PF′과 타원의 교점이다.

삼각형 PFQ의 둘레의 길이와 삼각형 PF′F의 둘레의 길이의 합을 구하시오.[4점]

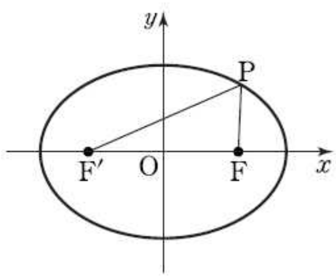


EBS 교재 2016년 수능완성 수학가형 106쪽 7번

그림과 같이 두 초점이 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$인 타원

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{64}=1$ $(a>0)$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여

$a-c=4$일 때, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는? (단, $c>0$)



① 28 ② 32 ③ 36
④ 40 ⑤ 44

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소, 확대, 변형

나. 타원의 정의를 이용하여 도형의 둘레의 길이를 구할 수 있는지를 물어보는 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 타원 위의 임의의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같다.

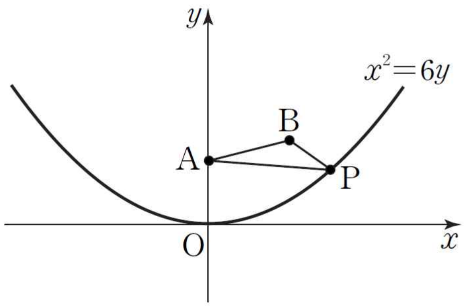
나. 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$으로부터 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(단, $a>c>0$, $b^2=a^2-c^2$)이다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016 수능특강 기하와 벡터 13쪽 2번 변형

그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$와 포물선 $x^2 = 6y$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 APB의 둘레의 길이의 최솟값은?



① $\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$　② $\dfrac{8+\sqrt{17}}{2}$　③ $\dfrac{9+\sqrt{17}}{2}$

④ $\dfrac{10+\sqrt{17}}{2}$　⑤ $\dfrac{11+\sqrt{17}}{2}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능특강 기하와 벡터 14쪽 2번 변형

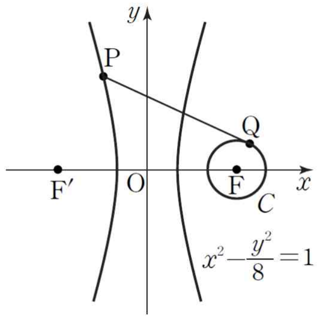
좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$이 있다. 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PB}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 수학가형 109쪽 16번 변형

그림과 같이 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 제2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점을 P라 하고, 점 P에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C에 접선을 그었을 때 한 접점을 Q라 하자.
$\overline{\mathrm{PF'}}=3$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는?



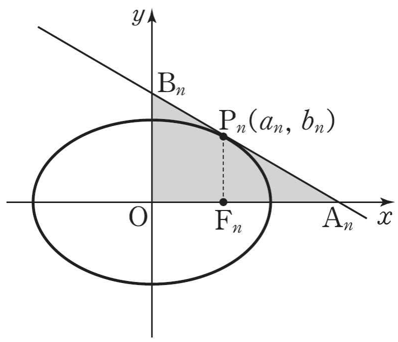
① $2\sqrt{3}$　② 4　③ $2\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{6}$　⑤ 5

풀 이

11 평면곡선의 접선

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 기하와 벡터 26쪽 2번

그림과 같이 자연수 n에 대하여 타원 $\frac{x^2}{4n^2}+\frac{y^2}{4n-1}=1$의 초점 중 x좌표가 양수인 점을 $\mathrm{F}_n(a_n,\ 0)$이라 하고, 타원 위의 점 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)\ (b_n>0)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라고 할 때, 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 S_n이라고 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

EBS 문항 분석

가. 타원의 방정식에서 초점의 좌표를 구하고 타원 위의 한 점에서 접선의 방정식을 구하는 문항이다.

나. 초점의 좌표 F_n과 타원 위의 한 점 P_n의 좌표가 수열의 일반항으로 표현되어 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 수열의 형태로 구할 수 있다. 포물선과 수열의 극한이 융합된 문항이지만 결국 포물선의 접선의 방정식을 구할 수 있으면 쉽게 해결할 수 있는 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 정점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$에서의 거리의 합이 $2a\ (a>c>0)$인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $b^2=a^2-c^2$)이다.

나. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점$(x_1,\ y_1)$에서 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 기하와 벡터 26쪽 4번

매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=t+1,\ y=t^3+t^2$$

위의 점 $(a+1,\ a^3+a^2)$에서의 접선과 y축과의 교점의 좌표를 $(0,\ g(a))$라고 할 때, $\lim_{a\to1}\dfrac{g(a)+8}{a^2-1}$의 값은?

① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

EBS 문항 분석

가. 매개변수로 표현된 곡선 위의 한 점에서 미분계수를 구하는 문항이다.

나. 매개변수로 표현된 곡선 위의 한 점에서 접선의 방정식을 구하여 y절편을 구하고 주어진 식의 극한값을 구하는 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 변수 x, y 사이의 관계가 변수 t를 매개로 하여 $x=f(t)$, $y=g(t)$의 꼴로 표현될 때, 변수 t를 매개변수라 하고, 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$를 매개변수로 나타내어진 함수라고 한다.

나. 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 이용하여 미분계수 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$를 구한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 수학(가) 112쪽 27번

함수 $f(t)=\sqrt{t}$ 에 대하여 매개변수 $t(t>0)$ 으로 나타내어진 곡선

$$x=\ln f(t),\ y=\frac{2\{f(t)-1\}\{f(t)+1\}}{f(t)}$$

위의 점$(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 m 이다. $10m$ 의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 매개변수로 표현된 곡선과 합성함수의 미분법에 관한 문항이다.
나. 로그함수의 미분법과 몫의 미분법, 매개변수로 표현된 함수의 미분법 등 여러 가지 함수의 미분법을 두루 알아야 해결할 수 있는 복합적인 계산을 요구하는 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 매개변수로 나타내어진 곡선 함수 $x=f(t),\ y=g(t)$ 에서 두 함수 $x=f(t),\ y=g(t)$ 가 $t=t_1$ 에서 미분가능하고 $f'(t_1)\neq 0$ 일 때, 곡선 위의 점$(f(t_1),\ g(t_1))$에서의 접선의 방정식은 $y-g(t_1)=\dfrac{g'(t_1)}{f'(t_1)}(x-f(t_1))$ 이다.

나. 두 함수 $f(x),\ g(x)$ 가 미분가능하고 $g(x)\neq 0$ 일 때, 몫의 미분법

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

를 이용하여 미분계수를 구한다.

다. 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u),\ u=g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$ 의 도함수는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ 또는 $y'=f'(g(x))g'(x)$ 이다.

라. 로그함수의 도함수

① $y=\ln|f(x)|$ 이면 $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (단, $f(x)\neq 0$)

② $y=\log_a|f(x)|$ 이면 $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$ (단, $a>0,\ a\neq 1,\ f(x)\neq 0$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(가) 113쪽 30번

매개변수 $t(t>0)$으로 나타내어진 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$에 대하여 미분가능한 두 함수 $f(t)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$, $f'(1)=1$, $f'(2)=e^2$
(나) 함수 $f(t)$의 역함수는 $g(t)$이다.

$t=2$에 대응되는 곡선 위의 점에서의 접선은 직선 $y=mx$와 서로 수직일 때, 상수 m의 값은?

① $-e$ ② $-2e$ ③ $-e^2$ ④ $-3e$ ⑤ $-2e^2$

EBS 문항 분석

가. 함수 $f(t)$와 $g(t)$가 역함수관계임을 이용하여 매개변수로 표현된 함수의 미분계수를 구하는 문항이다.

나. 복합적인 미분에 관한 내용이 포함되어 있어 조건에 맞는 값을 순차적으로 찾는 것이 중요하다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수의 역함수가 존재할 필요충분조건은 함수가 일대일대응이다.

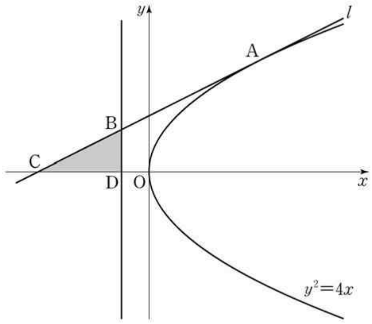
나. 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능하면

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))} \quad (\text{단, } f'(g(x))\neq 0)$$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학B형 9번

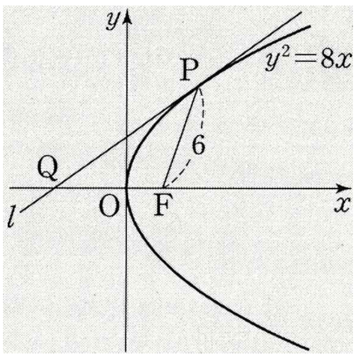
포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 4)$에서의 접선을 l이라 하자. 직선 l과 포물선의 준선이 만나는 점을 B, 직선 l과 x축이 만나는 점을 C, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 넓이는? [3점]



① $\frac{7}{4}$　② 2　③ $\frac{9}{4}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{11}{4}$

EBS 교재 2015 수능특강 기하와 벡터 39쪽 3번

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 한 점 P에서의 접선을 l이라 하고, 직선 l이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{FP}}=6$일 때, $\cos(\angle \mathrm{PQF})$의 값은? (단, 점 P는 제1사분면의 점이다.)



① $\frac{1}{6}$　② $\frac{\sqrt{3}}{6}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형
나. 포물선의 정의와 정리를 이용하여 접선과 관련된 다양한 성질을 묻는 문제이다.

문항풀이 Point !!

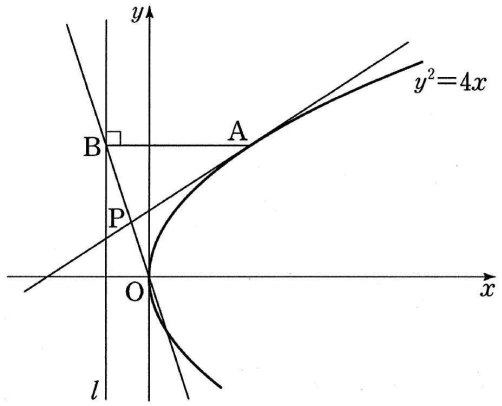
가. 포물선 위의 한 점 P에서 준선까지의 거리와 초점 F까지의 거리가 같음을 이용하는 문제이다.
나. 초점의 좌표와 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 이용하여 점 P의 y좌표 값을 구할 수 있다.
다. 포물선의 정의와 기하학적 성질을 이용하는 문제는 이미 여러 차례 기출 되었던 유형이다.

EBS 기출분석 2

기출 문항

2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학가형 17번

그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(t^2,\ 2t)$에서 이 포물선의 준선 l에 내린 수선의 발을 B라 하자. 다음은 점 A에서의 접선과 직선 OB가 만나는 점을 P라 할 때, 점 P의 좌표를 구하는 과정이다. (단, $t\neq 0$이고, O는 원점이다.)



포물선의 방정식 $y^2=4x$의 양변을 x에 대하여 미분하여 정리하면

$$\frac{dy}{dx}=\boxed{(가)}\quad (단,\ y\neq 0)$$

이므로 점 $\mathrm{A}(t^2,\ 2t)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$$y=\boxed{(나)}\times x+t \quad \cdots\cdots \ ㉠ \quad 이다.$$

$\mathrm{B}\left(\boxed{(다)},\ 2t\right)$이므로 직선 OB의 방정식은

$$y=\frac{2t}{\boxed{(다)}}x \quad \cdots\cdots \ ㉡ \quad 이다.$$

㉠, ㉡을 연립하여 점 P의 좌표를 구하면

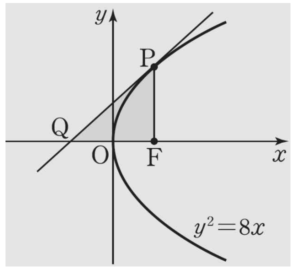
$$\left(\boxed{(다)}\times\frac{t^2}{2t^2+1},\ \frac{2t^3}{2t^2+1}\right) \quad 이다.$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(y)$, $g(t)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $f(a)\times g(a)$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

EBS 교재 2016 수능특강 기하와 벡터 19쪽 2번

그림과 같이 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 이 포물선의 초점을 F라고 할 때, 삼각형 PQF의 넓이는?



① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형

나. 포물선의 접선의 성질과 기하학적 성질에 관한 문제이다.

문항풀이 Point !!

가. 접점, 접점에서 x축에 내린 수선의 발, 포물선의 접선의 x, y절편, 원점과 초점으로 이루어진 닮음 삼각형, 이등변 삼각형에 대해 이해하고 암기하고 있으면 이런 유형의 문제를 쉽게 해결할 수 있다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016 수능특강 기하와 벡터 25쪽 2번 변형

포물선 $y^2=8x$ 와 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 의 교점 중 제1사분면에 있는 점을 A 라 하자.
점 A 를 지나고 포물선 $y^2=8x$ 와 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 에 접하는 두 직선이 서로 수직이 되도록 상수 a 의 값을 정할 때, a^2 의 값은?

① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ 8 ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 16

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 기하와 벡터 26쪽 3번 변형

두 점 $A(4,\ 0)$, $B(0,\ 4)$와 타원 $8x^2+3y^2=24$ 위의 점 $P(x,\ y)$에 대하여 삼각형 ABP 의 넓이의 최댓값은?

① $2+4\sqrt{11}$ ② $4+2\sqrt{11}$ ③ $6+2\sqrt{11}$ ④ $8+2\sqrt{11}$ ⑤ $8+4\sqrt{11}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학가형 112쪽 25번 변형

매개변수 t로 나타내어진 함수

$$x=(2t-1)^3,\ \ y=\sqrt[3]{t^2+7t}$$

의 그래프 위의 $t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

풀 이

VI. 평면벡터

기출 문항 분석

벡터 단원은 위치벡터와 벡터의 성분표현, 벡터의 내적과 수직, 평행조건 등 기본 개념만 확실히 알고 있으면 쉽게 풀 수 있는 문항에서부터 벡터의 연산에 대한 기하학적 의미를 평면도형과 결합하여 적용해야 해결할 수 있는 고난이도 응용문제들에 이르기까지 골고루 출제되고 있다. 또한 평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도 및 평면 위를 움직이는 점의 이동 거리에 관한 문제도 관심을 가져야 한다.

최근 수능에서는 벡터 단원에서 2문항이 출제되고 있으며 지난 3년 동안 출제된 4점짜리 문항을 분석해보면 원, 삼각형, 사각형 등 기본도형과 연계하여 평면도형의 성질과 복합적으로 응용되어져 문제가 출제되고 있다. 이를 해결하기 위해서는 중학교 때부터 배웠던 도형에 대한 기본적인 정의와 성질들을 숙지하고 있어야 하며, 벡터의 성분표현, 벡터의 평행·수직조건, 벡터의 내적의 정의, 벡터의 내적의 기하학적 의미, 직선의 방정식의 방향벡터와 두 직선이 이루는 각의 개념들을 동시에 활용하여 문제를 해결할 수 있어야 한다. 또한 단순한 벡터의 연산, 벡터의 성분 표현, 평행·수직 조건 등이 도형에 적용되지 않고 기본적인 벡터의 정의와 연산만을 묻는 문제도 출제되고 있기 때문에 기본 개념 또한 충실히 공부해 두어야 할 것이다.

이전 교육 과정에서는 평면벡터와 공간벡터의 구분이 없어 대부분 공간벡터에 관한 문제가 출제되었으나 올 해부터 적용되는 교육과정에서는 두 단원이 구분되어 있어 평면벡터에 관한 문항이 수능에서 출제될 것으로 예상된다.

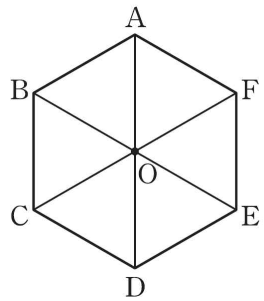
출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. B형. 6번	공간좌표에서 두 직선이 수직일 조건은 두 직선의 방향벡터의 내적이 0 임을 이용하여 주어진 변수를 구하는 문제 (정답형 3점)
2014수능. B형. 29번	정사영을 이해하고 평면의 방정식의 법선벡터를 이용하여 주어진 식의 최댓값을 구하는 문제(단답형 4점)
2015수능. B형. 19번	직선과 평면의 방정식을 이해하고 내적을 이용하여 점의 좌표를 구하는 문제 (정답형 4점)
2015수능. B형. 29번	두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여 정사영의 넓이의 최댓값을 구하는 문제(단답형 4점)

12 벡터의 연산

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 기하와 벡터 35쪽 4번

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 세 선분 AD, BE, CF의 교점을 O라고 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



< 보 기 >

ㄱ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$

ㄴ. $|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{DE}|=\sqrt{3}$

ㄷ. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EP}$를 만족시키는 점 P는 삼각형 OEF의 내부에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 문항 분석

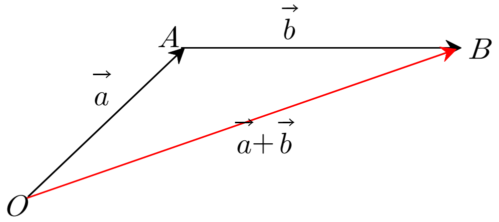
가. 위치벡터의 개념을 이용하여 벡터의 합과 차를 구하는 문항이다.
나. 두 벡터의 합은 삼각형의 법칙, 평행사변형의 법칙으로 풀 수 있는데 이 문제에 적용되는 기본적인 평행사변형의 법칙을 정확히 파악해야 한다.

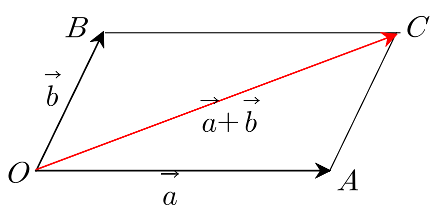
다시 보는 개념 !!

가. 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 평행이동하여 벡터 $\overrightarrow{CD}$와 겹칠 수 있을 때, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$이다.

나. 벡터의 덧셈

① 삼각형법 : 앞 벡터의 종점에 뒤 벡터의 시점을 일치시켜 구한다.
② 평행사변형법 : 두 벡터의 시점을 일치시켜 구한다.





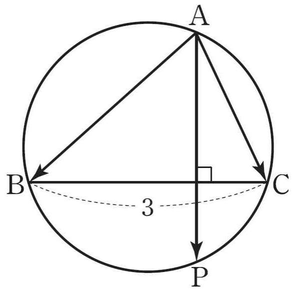
2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 기하와 벡터 36쪽 3번

그림과 같이 원에 내접하는 예각삼각형 ABC가 있다. 점 A를 지나고 선분 BC와 수직인 직선이 원과 만나는 점을 P라고 할 때, 점 P는

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

를 만족시킨다. $\overline{BC}=3$일 때, $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$의 값을 구하시오.



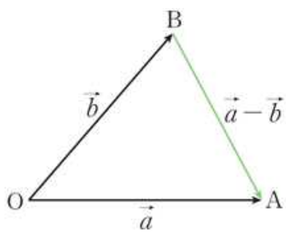
EBS 문항 분석

가. 원에 내접하는 삼각형과 원에 내접하는 사각형의 성질을 이용하여 벡터의 크기를 구하는 문항이다.

나. 등변사다리꼴의 성질과 도형의 닮음을 이용하여 닮음비로 길이를 구하는 문제로 벡터의 덧셈과 중학교 기하단원의 내용이 융합된 문항이다.

다시 보는 개념 !!

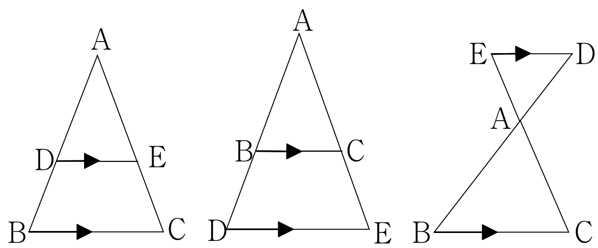
가. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$를 만족하는 벡터 $\vec{x}$에서 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라하고 기호로 $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$와 같이 나타낸다. 그림과 같이 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$하면 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$이므로 $\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$이고 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$이다. 즉, 벡터 $\overrightarrow{BA}$는 벡터 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차 $\vec{a}-\vec{b}$이다.



나. 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 방향이 같거나 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하고 기호로 $\vec{a}/\!/\vec{b}$로 나타낸다.

다. 평행선과 선분의 길이의 비

△ABC에서 변 BC에 평행한 직선이 두 직선 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라고 하면 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}=\overline{DE}:\overline{BC}$



2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(가) 117쪽 1번

좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표가 $(2\sqrt{3},\ 2)$일 때, $|6\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OA}|$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이다.)

EBS 문항 분석

가. 위치벡터로 표현된 벡터의 외분점의 정의를 이용하여 벡터의 크기를 구하는 문항이다.

나. 외분점의 정의를 이용하여 벡터 $\overrightarrow{OQ}$를 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 벡터 $\overrightarrow{OB}$로 나타내어 주어진 벡터의 크기를 구하면 된다.

다시 보는 개념 !!

가. 선분 AB의 길이를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기라고 하며, 이것을 기호로 $|\overrightarrow{AB}|$ 또는 $|\vec{a}|$와 같이 나타낸다.

나. 점 A, B, P의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$라 하면 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 외분하는 점 P의 위치벡터는 $\vec{p} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$ 이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(가) 117쪽 3번

삼각형 ABC 에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$, $\angle B=60^\circ$ 이다. 점 P 가 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$ 의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 점 A를 시점으로 한 위치벡터 표현에서 식의 변형을 통해 내분점의 표현으로 바꾸어 벡터의 크기를 기하학적으로 해결하는 문항이다.

나. 변형된 식 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=6\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$을 삼각형으로 나타내어 피타고라스의 정리를 이용하면 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 크기를 구할 수 있다.

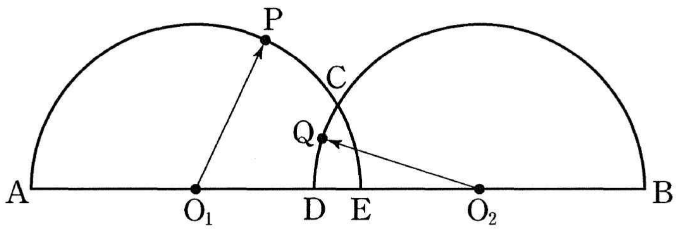
다시 보는 개념 !!

점 A, B, P 의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ 라 하면 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터는 $\vec{p}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$이다.

EBS 기출분석 1

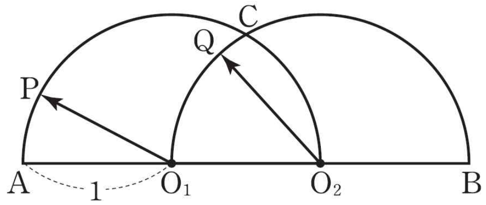
기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학가형 28번

그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{DB}}=2$ 인 두 점 D, E 가 있다. 두 선분 AE, DB 를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB 가 만나는 점을 C 라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{O_1A}}=\overline{\mathrm{O_2B}}=1$ 인 두 점을 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ 라 하자. 호 AC 위를 움직이는 점 P 와 호 DC 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}\right|$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 일 때, 선분 AB 의 길이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $1<\overline{\mathrm{O_1O_2}}<2$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



EBS 교재 2016 수능특강 기하와 벡터 36쪽 2번

그림과 같이 선분 AB 위의 두 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AO_1}}=\overline{\mathrm{O_1O_2}}=\overline{\mathrm{O_2B}}=1$ 일 때, 두 선분 $\mathrm{AO_2}$, $\mathrm{O_1B}$ 를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 $\mathrm{AO_2}$, $\mathrm{O_1B}$ 가 만나는 점을 C 라고 하자. 호 AC 위를 움직이는 점 P 와 호 $\mathrm{O_1C}$ 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}\right|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라고 할 때, Mm 의 값은?



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형
나. 도형 상에서 주어진 조건을 만족하는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 묻는 문제이다.

문항풀이 Point !!

가. 벡터의 연산을 변형하여 시점과 종점이 고정된 벡터와 고정되지 않은 벡터를 분류하여 표현하고, 벡터의 시점을 일치시키는 작업을 통해 한 평면 상에서 벡터의 연산이 이루어질 수 있도록 한다. 벡터의 종점이 변화할 때마다 벡터의 연산의 결과를 시각적으로 비교할 수 있어야 한다.
나. 위의 문제처럼 벡터의 단순한 덧셈, 뺄셈이 아닌 주어진 식이 최댓값과 최솟값이 되는 상황을 도형 상에서 판단할 수 있도록 벡터의 연산을 변형하여 시점과 종점을 바꾸어 해결하는 문제가 출제될 수 있다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 16번

직사각형 ABCD 의 내부의 점 P 가

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$$

를 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$

ㄴ. $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

ㄷ. 삼각형 ADP 의 넓이가 3 이면 직사각형 ABCD 의 넓이는 8 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 교재 2016 수능특강 기하와벡터 50쪽 1번

삼각형 ABC 의 내부의 한 점 P 에 대하여 $2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ 가 성립하고, 세 선분 AP, BP, CP 의 연장선이 각각 세 변 BC, CA, AB 와 만나는 점을 각각 D, E, F 라고 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $\overline{AF}:\overline{FB}=1:2$

ㄴ. $2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}$

ㄷ. 삼각형 APE 의 넓이가 3 이면 삼각형 AFP 의 넓이는 6 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소·확대·변형
나. 도형을 이용하여 벡터의 성질을 추론하는 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 벡터의 연산을 할 수 있다.

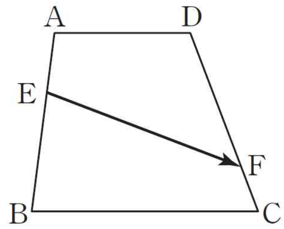
나. 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 하면 선분 AB의 중점의 위치벡터는 $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$이다.

나. 벡터의 실수배를 이해하고 변의 길이의 비를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항! 2016 수능특강 기하와 벡터 33쪽 6번 변형

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}} /\!/ \overline{\mathrm{BC}}$ 인 사다리꼴 ABCD 가 있다. $\overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{BC}} = 3:5$ 이고 변 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 E, 변 DC 를 $3:1$ 로 내분하는 점을 F 라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = a\overrightarrow{\mathrm{AB}} + b\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ 가 성립한다. 이때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 기하와 벡터 36쪽 1번 변형

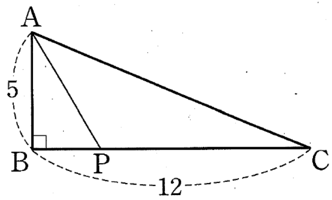
좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(3\sqrt{3},0)$ 과 원 $(x-\sqrt{3})^2+y^2=3$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}$ 의 종점 Q 가 나타내는 도형의 길이는?

① $\dfrac{\pi}{4}$ ② 1 ③ $\dfrac{\pi}{3}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{2\pi}{3}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학가형 117쪽 2번 변형

그림과 같이 $\angle B = 90^\circ$, $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$ 인 직각삼각형 ABC 가 있다. 선분 BC 위의 점 P 가 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AC}$ 를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



< 보 기 >

ㄱ. 삼각형 ACP 의 넓이는 삼각형 ABP 의 넓이의 3 배이다.

ㄴ. 점 P 에서 선분 AC 에 이르는 거리는 $\frac{40}{13}$ 이다.

ㄷ. $|3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}| = 15$

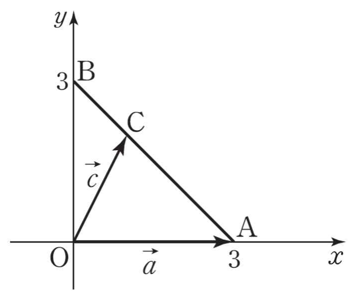
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀 이

13 평면벡터의 성분과 내적

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 기하와 벡터 50쪽 3번

그림과 같이 원점이 O 인 좌표평면 위의 두 점 A(3, 0), B(0, 3)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 C라 하고, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 하자.
$\vec{p}=\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{q}=\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{c}$라고 할 때, 등식 $|x\vec{p}+y\vec{q}|=2\sqrt{5}$가 성립하도록 하는 두 실수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표로 하는 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은?



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

EBS 문항 분석

가. 좌표평면에 표현된 벡터를 좌표 표현으로 바꾸어 해석기하로 풀이할 수 있는 문항이다.
나. 문자로 표현된 벡터의 크기를 구하면 타원의 방정식을 얻을 수 있다. 따라서 타원의 정의를 이용하여 장축의 길이와 단축의 길이를 구할 수 있다.

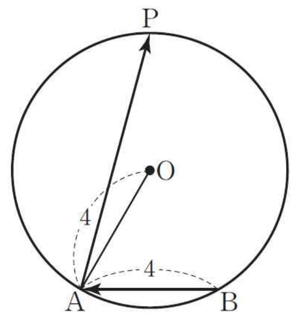
다시 보는 개념 !!

가. 두 점에 대한 공간벡터의 성분과 크기
두 점 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여
(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$
(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

나. 공간벡터의 내적과 성분
$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능완성 수학(가) 121쪽 14번

그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 4 인 원 위를 움직이는 점을 P 라 하고, 이 원 위의 두 점 A, B 사이의 거리가 4 일 때, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AP}$ 의 값이 최대가 되도록 하는 점 P 를 C 라 하자. 선분 AC 의 길이는?



① 4 ② $3\sqrt{2}$ ③ 5
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

EBS 문항 분석

가. 벡터의 내적의 연산법칙을 이용하여 두 벡터의 수직조건을 찾아내고, 벡터의 내적이 최댓값이 되기 위한 조건을 구하여 그 때의 내적을 계산하는 문제이다.

나. 문제에 제시된 벡터의 내적을 있는 그대로 구하기보다는 위의 문제와 같이 내적의 연산법칙을 이용하여 식을 변형하거나 벡터의 연산법칙을 이용하여 시점과 종점을 바꾸어서 두 벡터의 내적이 최대, 최소가 될 때를 도형 상에서 비교해 볼 수 있도록 변형하는 과정을 많이 묻고 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 벡터의 내적의 연산법칙

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 와 실수 k 에 대하여

(1) 교환법칙 : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(2) 결합법칙 : $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(3) 분배법칙 : $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

나. 벡터의 수직과 평행 조건

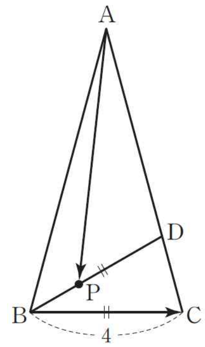
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 에 대하여

(1) 수직 조건 : $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

(2) 평행 조건 : $\vec{a} /\!/ \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{b} = k\vec{a}$ (단, $k \neq 0$ 인 실수)

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(가) 121쪽 15번

그림과 같이 $\overline{BC}=4$, $\angle ABC = \angle ACB = 75^\circ$ 인 이등변삼각형 ABC 에서 $\overline{BD}=\overline{BC}$ 가 되도록 선분 AC 위의 점 D 를 잡고, 선분 BD 위를 움직이는 점을 P 라 하자. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라할 때, $(M-m)^2$ 의 값을 구하시오.



EBS 문항 분석

가. 벡터의 시점이 다른 두 벡터의 최댓값과 최솟값을 구하는 문항이다.

나. 위치벡터의 개념을 이용하여 벡터 $\overrightarrow{AP}$ 를 두 벡터의 합으로 나타내어 내적의 성질을 이용해야 한다.

다. 위의 문제처럼 다양한 도형으로 된 벡터의 합의 최솟값과 최댓값을 구하는 문제가 출제될 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 점 A, B, D, P, Q 의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ 라 하면

(1) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$ 으로 내분하는 점 P 의 위치벡터 $\vec{p} = \dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

(2) 선분 AB 를 $m:n$ $(m>0, n>0)$ 으로 외분하는 점 Q 의 위치벡터 $\vec{q} = \dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

(3) 선분 AB 의 중점 D 의 위치벡터 $\vec{d} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학가형 12번

좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3},\quad \frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{3}$$

이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{6}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

EBS 교재 2016 수능특강 기하와 벡터 48쪽 5번

좌표평면에서 두 직선 $x+2=\frac{1-y}{5}$, $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{3}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라고 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① 1 ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 0

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형
나. 좌표평면에서 두 직선의 위치관계를 이해하는지 묻는 문제이다.
다. 좌표평면에서 직선의 방향벡터의 정의와 의미를 이해하고 이를 활용하여 문제해결을 하는 기본적인 유형의 문제이다.

문항풀이 Point !!

가. 직선의 방정식에서 방향벡터를 구하고 두 방향벡터가 이루는 각의 크기를 내적을 이용하여 구하는 문항이다.
나. 두 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$와 $\vec{v}$라 하면

두 벡터가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$이다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학가형 23번

두 벡터 $\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(-2,\ k)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$을 만족시키는 실수 k의 값을 구하시오. [3점]

EBS 교재 2015 수능특강 기하와 벡터 48쪽 3번

두 벡터 $\vec{a}=(k,\ -3)$, $\vec{b}=(2,\ k+2)$가 서로 수직이 되도록 하는 k의 값은?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형

나. 성분으로 표현된 벡터의 내적을 구하는 기본 계산 문항이다.

문항풀이 Point !!

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이려면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이다. 따라서 각각의 성분의 곱을 구하면 답을 얻을 수 있다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 8번

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$이고, 두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은?

① $-\frac{3}{10}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $-\frac{9}{10}$ ④ $-\frac{6}{5}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

EBS 교재 2016 수능특강 기하와벡터 45쪽 유제7

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{10}$, $|2\vec{a}+\vec{b}|=4$를 만족시킬 때, 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이 되도록 하는 실수 t의 값은?

① $\frac{1}{11}$ ② $\frac{1}{13}$ ③ $\frac{1}{15}$ ④ $\frac{1}{17}$ ⑤ $\frac{1}{19}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소·확대·변형

나. 두 벡터의 수직 조건과 벡터의 내적을 구할 수 있는지를 묻는 동일한 유형의 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 수직이면 $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$이다.

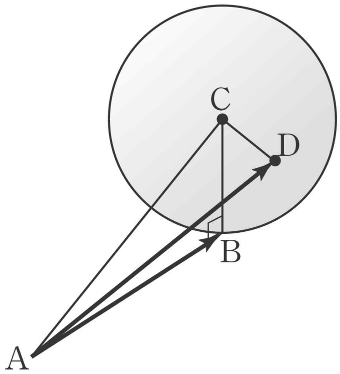
나. $\vec{a}\bullet\vec{a}=|\vec{a}|^2$, $\vec{a}\bullet(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{a}\bullet\vec{c}$임을 이용한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 기하와 벡터 43쪽 6번 변형

$\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$, $\angle B=90°$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 점 C 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1 인 구 위의 점 D 가 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$ 를 만족시킬 때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ 의 값은?
(단, 두 점 B, D는 서로 다른 점이다.)

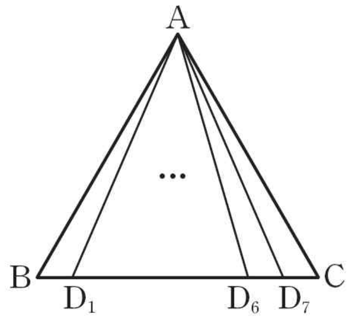


① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능완성 수학가형 119쪽 7번 변형

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에 대하여 선분 BC를 8등분 한 후 점 B에 가까운 점부터 차례대로 $D_1, D_2, \cdots, D_7$이라 할 때, $\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{AD_6}$의 값은?

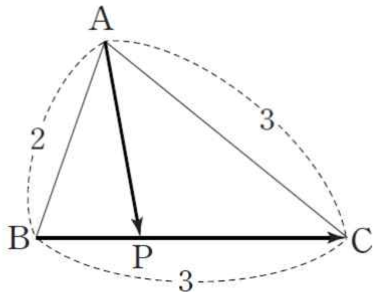


① $\frac{15}{8}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{21}{8}$ ④ 3 ⑤ $\frac{27}{8}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학가형 119쪽 9번 변형

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=3$ 인 삼각형 ABC 에 대하여 점 P 가 선분 BC 를 $1:2$ 로 내분하는 점일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BC}$ 의 내적 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}$ 의 값은?



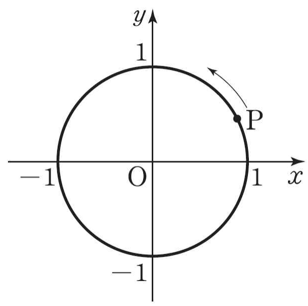
① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

풀 이

14 평면운동

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 기하와 벡터 62쪽 1번

그림과 같이 좌표평면 위에 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 점 $(1,\ 0)$을 출발하여 원 위를 시계 반대 방향으로 매초 두 바퀴씩 일정한 속력으로 회전할 때, 출발한 지 $\dfrac{1}{3}$초 후의 가속도는?



① $\left(-8\pi^2,\ 8\sqrt{3}\pi^2\right)$　② $\left(-4\pi^2,\ -4\sqrt{3}\pi^2\right)$
③ $\left(4\pi^2,\ 4\sqrt{3}\pi^2\right)$　④ $\left(8\pi^2,\ -8\sqrt{3}\pi^2\right)$
⑤ $\left(8\pi^2,\ 8\sqrt{3}\pi^2\right)$

EBS 문항 분석

가. 좌표평면 위를 움직이는 물체의 위치, 속도의 관계를 이해하는 문제이다.
나. 매개변수 함수의 미분법과 삼각함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.
다. 속도, 가속도 구하는 문제에서 위치를 나타내는 함수가 다항함수 뿐만 아니라 지수함수, 로그함수, 삼각함수로도 주어지므로 여러 가지 미분법과 여러 가지 함수의 도함수를 익혀 둘 필요가 있다.

다시 보는 개념 !!

좌표평면에서 반지름이 r인 원 위를 시계 반대 방향으로 매초 두 바퀴씩 일정한 속력으로 회전하므로 t초 후 의 점 P의 위치 $(x,\ y)$는 $x=\cos 2\pi t,\ y=\sin 2\pi t$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 기하와 벡터 62쪽 3번

$\ln 4 \le x \le \ln 8$ 에서 곡선 $y=\int_{0}^{x} \frac{(e^{t}+e^{-t})(x-t)}{2}dt$ 의 길이를 l 이라고 하면 $l=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

EBS 문항 분석

가. 주어진 함수의 식을 변형하여 곡선의 길이를 구하는 문제이다.

나. 곡선 $y=f(x)$ 의 길이는 $l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\{f'(x)\}^{2}}\,dx$ 임을 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)\,(a \le t \le b)$ 의 길이 l 은

$$l=\int_{a}^{b}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^{2}}\,dt = \int_{a}^{b}\sqrt{\{f'(t)\}^{2}+\{g'(t)\}^{2}}\,dt \text{ 이다.}$$

나. 곡선 $y=f(x)\,(a \le t \le b)$ 의 길이 l 은 $l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\{f'(x)\}^{2}}\,dx$ 이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(가) 125쪽 27번

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=t^3-2t,\ \ y=t^2$$

이다. 점 P의 시각 $t=a$에서의 속도와 가속도가 서로 수직일 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

EBS 문항 분석

가. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 함수의 속도와 가속도를 구하는 문항이다.
나. 매개 변수로 표현된 함수의 도함수와 이계도함수를 구할 수 있어야 한다.
다. 속도, 가속도 구하는 문제에서 위치를 나타내는 함수가 다항함수 뿐만 아니라 지수함수, 로그함수, 삼각함수로도 주어지므로 여러 가지 미분법과 여러 가지 함수의 도함수를 익혀 둘 필요가 있다.

다시 보는 개념 !!

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 좌표 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 주어질 때,

① 점 P의 시각 t에서의 속도 $(v_x,\ v_y)=(f'(t),\ g'(t))$

점 P의 시각 t에서의 속력(속도의 크기) $\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

② 점 P의 시각 t에서의 가속도 $(a_x,\ a_y)=(f''(t),\ g''(t))$

점 P의 시각 t에서의 가속도의 크기 $\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(가) 126쪽 30번

좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 위치 $(x,\ y)$ 가

$$x = \sqrt{t+1},\ y = \frac{1}{4}(t+1) - \frac{1}{4}\ln(t+1)$$

일 때, 점 P 가 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 움직인 거리는 $p+q\ln 2$ 이다. 두 유리수 $p,\ q$ 에 대하여 $60(p+q)$ 의 값을 구하시오. (단, $\ln 2$ 는 무리수이다.)

EBS 문항 분석

가. 좌표평면 위를 움직이는 점의 시각 t에서의 위치가 주어질 때, 점이 움직인 거리를 구하는 문항이다.

나. 매개변수로 표현된 함수식 $x=f(t),\ y=g(t)$ 을 시간 t 에 대한 도함수를 구하여 속도 $\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$ 를 구하고 이를 적분하여 이동거리를 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

시각 t 에서의 점 P 의 위치가 $x=f(t),\ y=g(t)$ 일 때, $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P 가 움직인 거리 $s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt$ 이다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 기하와 벡터 61쪽 3번 변형

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$일 때, 점 P가 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 움직인 거리는?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 기하와 벡터 61쪽 4번 변형

평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 $(x,\ y)$가

$$x=\frac{2t-t^2}{2},\ y=\frac{4}{3}t\sqrt{t}$$

로 나타내어질 때, $t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 그리는 곡선의 길이는?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 수학가형 125쪽 26번 변형

좌표평면 위의 동점 P 의 시각 t 에서의 위치가 $(t^2+1,\ 4t-t^2)$ 일 때, 점 P 의 속력의 최솟값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

풀 이

Ⅲ. 공간도형과 공간좌표

기출 문항 분석

이 단원에서는 공간도형에서의 삼수선의 정리, 이면각의 크기, 정사영의 원리를 이용한 도형의 응용문제, 공간좌표에서의 두 점 사이의 거리, 내분점, 외분점, 중점, 무게중심, 구의 방정식과 구와 평면사이의 관계와 구와 다양한 도형과의 통합문제를 묻는 문제가 자주 출제되고 있다. 특히 정사영의 원리를 이해하고 다양한 도형에서 그 원리를 적용하여 여러 가지 문제 상황을 그림으로 나타내어 해결하도록 해야 한다.

공간도형의 성질은 관찰과 직관에 의해 충분히 이해한 후 증명을 통해 이를 뒷받침하는 연습이 필요하며 공간좌표는 평면좌표를 확장하는 수준으로 접근하여 간다면 쉽게 해결방안을 찾을 수 있다. 특히 공간도형에서는 필요한 단면으로 절단하여 이해하고 한 평면으로 옮겨 문제를 해결하는 능력을 키울 필요가 있으며, 공간좌표에서는 실생활 문제를 문제 상황에 맞게 공간좌표 위에 그림으로 표현하는 연습을 해 두는 것이 좋을 것이다.

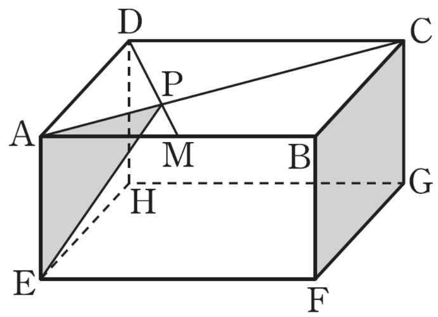
출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. B형. 3번	두 점을 지나는 선분의 내분점을 구하는 문제(정답형 3점)
2015수능. B형. 5번	공간좌표위의 두 점의 내분점을 구하는 문제(정답형 3점)
2015수능. B형. 12번	삼수선의 정리를 이용하여 점과 직선사이의 거리를 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. B형. 3번	세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심을 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. B형. 27번	좌표공간에서 주어진 조건을 만족하는 삼각형의 넓이를 구하는 문제(단답형 4점)

15 공간도형

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 | 2016년 수능특강 기하와 벡터 73쪽 3번

그림과 같이 $\overline{AD}=\overline{AE}=3$, $\overline{AB}=6$인 직육면체 ABCD−EFGH에서 선분 AB의 중점을 M, 두 선분 AC와 DM의 교점을 P라고 하자. 직선 PE와 평면 BFGC가 이루는 예각의 크기를 α, 두 평면 AEP와 BFGC가 이루는 예각의 크기를 β라고 할 때, $\cos^2\alpha\times\cos^2\beta$의 값은?



① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{4}{21}$ ③ $\frac{5}{21}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

EBS 문항 분석

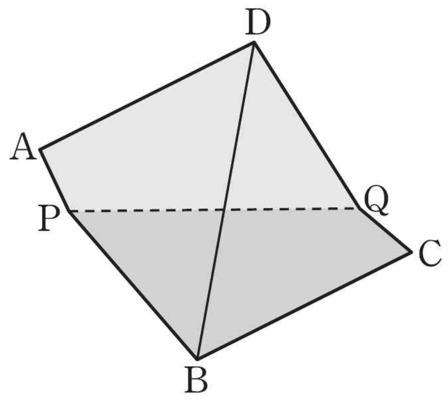
가. 직선과 평면 그리고 평면과 평면이 이루는 각의 크기를 모두 구하는 문항이다.
나. 평면 BFGC를 평행이동 하여 평면 AEHD와 이루는 각의 크기를 구하는 문항이다.
다. 삼각형 PAM과 삼각형 PCD가 닮음이라는 사실을 이용하면 쉽게 해결가능하다.

다시 보는 개념 !!

가. 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다. 또, 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영 전체로 이루어진 도형 F′을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.
나. 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB가 평면 α와 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$
다. 평면 α 위의 도형 F의 평면 β 위로의 정사영을 F′이라 하고, F, F′의 넓이를 각각 S, S′ 이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $S'=S\cos\theta$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 기하와 벡터 74쪽 1번

그림은 $\overline{AB}=7$, $\overline{BC}=6$인 직사각형 ABCD에서 $\overline{AP}=2$인 선분 AB 위의 점 P, $\overline{CQ}=2$인 선분 CD 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 접는 선으로 하여 평면 APQD와 평면 BCQP가 수직이 되도록 접어서 만든 도형이다. 선분 BD의 길이는?



① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $3\sqrt{5}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

EBS 문항 분석

가. 점 D에서 선분 PQ에 내린 수선을 발을 H라 하고 선분 PQ를 접는 선으로 하여 접었을 때, 점 D는 점 H를 중심으로 하고 선분 PQ에 수직인 평면 위의 원 위를 움직인다.
나. 직각삼각형의 닮음과 피타고라스정리를 이용하여 두 선분 DH와 BH를 구하면 선분 BD의 길이를 쉽게 구할 수 있다.
다. 이번 수능특강에 평면을 접었을 때의 상황에서 문제해결을 요구하는 문항이 2문항 제시되었다. 어떤 선분을 접는 선으로 하였을 때 다른 점들은 그 선분과 수직인 원을 경로로 가진다는 사실을 꼭 기억할 필요가 있다.

다시 보는 개념 !!

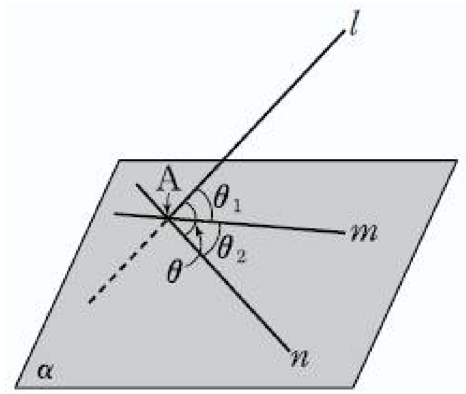
가. 제시된 도형에서 어떤 선분을 접는 선으로 하였을 때, 이동되는 점들은 접는 선과 수직인 평면위의 원을 경로로 가진다.
나. 공간도형의 문항을 해결할 때는 닮음과 피타고라스정리를 적절히 활용할 수 있어야 한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(가) 131쪽 4번

그림과 같이 평면 α와 직선 l의 교점을 A라 하고 직선 l의 평면 α 위로의 정사영을 m이라 하자. 평면 α 위에 점 A를 지나는 또 다른 직선 n이 있다.
직선 l과 직선 m이 이루는 예각의 크기가 θ_1이고,
직선 m과 직선 n이 이루는 예각의 크기가 θ_2이다.
직선 l과 직선 n이 이루는 예각의 크기 θ가

$\cos\theta = \sin\theta_1 \sin\theta_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 를 만족시킬 때,

$16\sin(\theta_1+\theta_2)$의 값은?



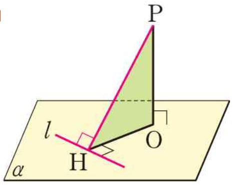
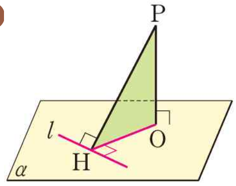
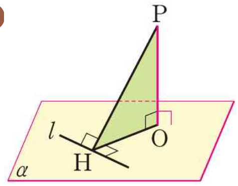
① $4\sqrt{10}$ ② $4\sqrt{11}$ ③ $8\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{13}$ ⑤ $4\sqrt{14}$

EBS 문항 분석

가. 직선 l위의 한 점에서 직선 m과 n에 각각 수선을 발을 내리고 삼수선의 정리를 이용하여야 해결 가능한 문항이다.
나. 직각삼각형의 성질을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 θ_1과 θ_2로 나타낼 수 있어야 한다.
다. 제시된 조건과 계산 결과를 정리하고 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 해결 가능한 문항이다.

다시 보는 개념 !!

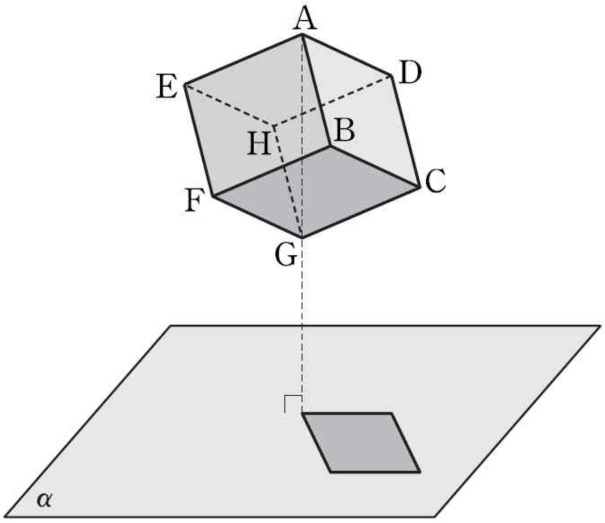
가. 삼수선의 정리

❶	❷	❸
		
$\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면 $\overline{PH}\perp l$	$\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 $\overline{OH}\perp l$	$\overline{PH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 $\overline{PO}\perp\alpha$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(가) 134쪽 12번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD－EFGH가 있다. 정사각형 ABCD의 직선 AG에 수직인 평면 α 위로의 정사영의 넓이는?



① $\frac{13\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{14\sqrt{3}}{3}$　③ $5\sqrt{3}$　④ $\frac{16\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{17\sqrt{3}}{3}$

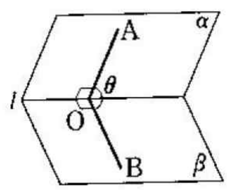
EBS 문항 분석

가. 정사영의 넓이를 구하기 위해서는 먼저 평면 ABCD와 직선 AG에 수직인 평면 α가 이루는 각의 크기를 구해야 한다.

나. 직각삼각형 AGC에서 $\angle$AGC가 평면 ABCD와 평면 α가 이루는 각이라는 사실을 알면 쉽게 해결 가능한 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 평면 α, β 위의 점 A, B와 교선 l 위의 점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}} \perp l$, $\overline{\mathrm{OB}} \perp l$일 때, $\angle$AOB의 크기를 두 평면 α, β가 이루는 이면각의 크기라고 한다.



EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학B형 27번

좌표공간에 서로 수직인 두 평면 α와 β가 있다. 평면 α 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{5}$이고 직선 AB는 평면 β에 평행하다. 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고, 평면 β 위의 점 P와 평면 α 사이의 거리는 4일 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오. [4점]

EBS 교재 2015 수능완성 214쪽 35번

좌표공간에서 평면 $\alpha : 2x+y+z+2=0$ 위에 점 $\mathrm{B}(-2,\ 2,\ 0)$이 있다. 점 $\mathrm{A}(2,\ -1,\ 1)$에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{BH}}^2$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형

나. EBS교재에서는 먼저 점과 평면사이의 거리공식을 이용하여 $\overline{\mathrm{AH}}$를 먼저 구한 후에 피타고라스의 정리를 이용하여 $\overline{\mathrm{BH}}^2$의 값을 구하도록 제시되었으나, 기출문항은 직관적으로 피타고라스 정리를 이용하여 삼각형의 높이를 구한 수 넓이를 구하도록 변형하여 출제되었다. 쉽게 해결 가능한 문항이지만 직관적인 공간지각력을 높일 수 있도록 꾸준히 노력하여야 할 것이다.

문항풀이 Point !!

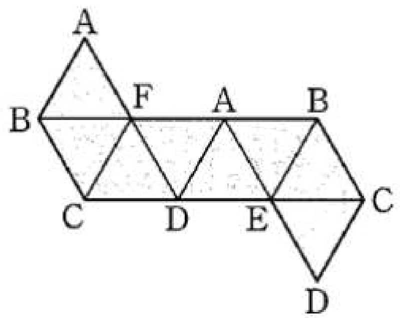
문항에서 제시되어 있는 조건들을 그림으로 나타내면 쉽게 해결 가능한 문항이다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 65쪽 예제1번 변형

그림과 같은 전개도로 만들어지는 정팔면체에 대한 보기의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$는 평행하다.

ㄴ. $\overline{AB}$와 $\overline{DE}$가 이루는 각의 크기는 60°이다.

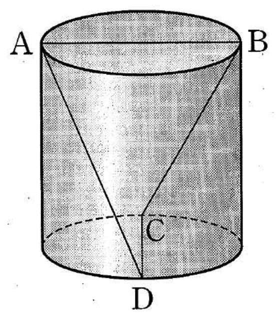
ㄷ. $\overline{AB}$와 평면 CDE는 평행하다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능완성 130쪽 01번 변형

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이와 높이가 모두 2인 원기둥이 있다. 두 선분 AB, CD는 각각 두 밑면의 지름이며, 두 직선 AB, CD는 서로 수직이다. 두 직선 AD, BC가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



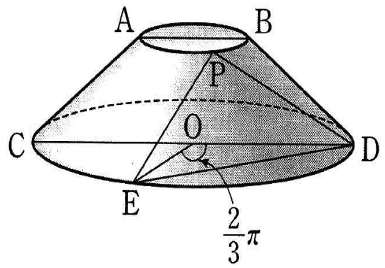
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 132쪽 06번 변형

그림과 같이 두 밑면의 지름의 길이가 각각 $\overline{AB}=4$, $\overline{CD}=12$이고 모선 AC의 길이가 5인 원뿔대가 있다. 선분 CD의 중점을 O라 하고 점 O를 포함하는 밑면에 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 ODE를 잡는다. 선분 AB를 포함하는 밑면의 원의 둘레 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 PED의 넓이의 최댓값은?



① $4\sqrt{34}$ ② $6\sqrt{17}$ ③ $12\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{85}$ ⑤ $3\sqrt{102}$

풀 이

16 공간좌표

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 기하와 벡터 86쪽 2번

좌표공간의 세 점 A(2, 3, 2), B(3, 4, −4), C(−2, 2, 1)에 대하여 두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점 중에서 점 C에서의 거리가 최소인 점을 P라고 할 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① $6\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

EBS 문항 분석

가. 두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점들의 자취는 직선이고 그 방정식은 $x+y=12$, $z=0$이라는 사실을 알 수 있어야 한다.

나. 직선위의 점들 중 점 C에서의 거리가 최소인 점을 P의 좌표는 두 점 사이의 거리공식 또는 수직조건 등을 이용하여 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

이다.

나. 좌표공간의 두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점들의 집합은 선분 AB의 중점을 지나고 직선 AB에 수직인 평면과 xy평면의 교선이다.

다. 공간의 직선 l 위의 점 중에서 직선 l 위에 있지 않은 점 C에서의 거리가 최소인 점은 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 기하와 벡터 86쪽 4번

두 자연수 a, b에 대하여 좌표공간에서 구 S : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-2az+b=0$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(-1,\ 1,\ 1)$을 지난다.
(나) xy평면, yz평면, zx평면 중 어느 한 평면과는 만나지 않는다.

구 S가 xy평면, yz평면, zx평면 중 두 평면과 만나서 생기는 두 원의 넓이의 합을 $k\pi$라고 할 때, k의 최솟값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 구와 평면사이의 위치관계를 이해하고 있는지를 묻고 있는 문항이다.
나. 구 S가 xy평면, yz평면, zx평면 중 두 평면과 만나기 위해서는 중심의 좌표와 반지름 사이의 대소관계를 이용하여야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 중심의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$이고, xy평면에 접하는 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2$$

이다.

나. 중심의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$이고, yz평면에 접하는 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2$$

이다.

다. 중심의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$이고, zx평면에 접하는 구의 방정식은

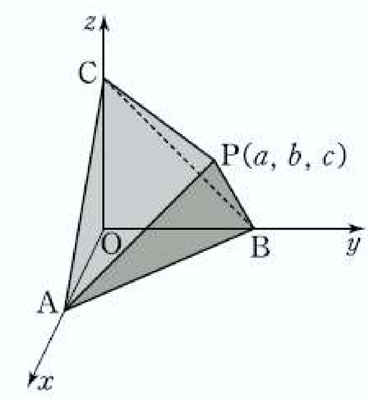
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2$$

이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 수학(가) 135쪽 15번

그림과 같이 좌표공간의 점 P(a, b, c)에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C라 하자. 사면체 PABC의 부피가 55일 때, 세 자연수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은? (단, $1<a<b<c$)



① 19　② 20　③ 21　④ 22　⑤ 23

EBS 문항 분석

가. 점 P(a, b, c)에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발 A, B, C의 좌표를 구할 수 있어야 한다.

나. 네 점 P, A, B, C의 좌표가 직육면체의 네 점이라는 사실을 이용하면 쉽게 해결 가능한 문항이다.

다. 직접 사면체 PABC의 부피를 직접 구하는 것보다 직육면체에서 세 개의 사면체의 부피를 빼준다면 쉽게 해결되는 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. P(a, b, c)에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$(a,\ 0,\ 0)$, $(0,\ b,\ 0)$, $(0,\ 0,\ c)$

이다.

나. P(a, b, c)에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$(a,\ b,\ 0)$, $(0,\ b,\ c)$, $(a,\ 0,\ c)$

이다.

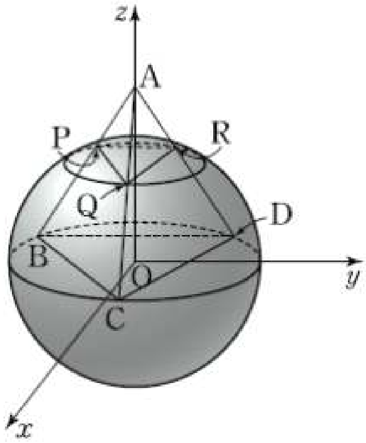
2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(가) 139쪽 29번

그림과 같이 좌표공간에서 z축 위의 점 A와 구 $x^2+y^2+z^2=1$위의 6개의 점 B, C, D, P, Q, R는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 사면체 ABCD, APQR는 모두 정사면체이다.
(나) 세 점 A, P, B는 한 직선 위에 있고, 세 점 O, B, C는 한 평면 위에 있다.

세 점 P, Q, R를 지나는 원의 반지름의 길이는? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

EBS 문항 분석

가. 구의 성질과 삼각형의 닮음을 이용하여 삼각형 PQR의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있어야 한다.

나. 직각삼각형 OAB에서 변 AB 위의 점 P는 $\overline{OB}=\overline{OP}$를 만족하므로 닮음을 이용하여 삼각형 PQR의 무게중심 G의 위치를 찾을 수 있다.

다. 공간좌표와 직선의 방정식 등을 이용하여도 해결 가능한 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 세 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $C(x_3,\ y_3,\ z_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의

무게중심 G의 좌표는 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{2}\right)$이다.

EBS 기출분석 1

기출 문항

2016학년도 대수능 수학B형 3번

좌표공간에서 세 점 $\mathrm{A}(a, 0, 5)$, $\mathrm{B}(1, b, -3)$, $\mathrm{C}(1, 1, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(2, 2, 1)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

EBS 교재　2015 수능완성 197쪽 15번

좌표공간 위의 세 점 $\mathrm{A}(3,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{B}(-1,\ 6,\ 3)$, $\mathrm{C}(a,\ a-1,\ a+3)$에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심 G가 zx평면 위에 있을 때, a의 값은?

① -4　② -5　③ -6　④ -7　⑤ -8

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소

나. EBS교재에서는 삼각형의 무게중심이 zx평면 위에 있다는 조건을 주고 상수 a의 값을 구하도록 하였으나, 기출문항은 삼각형의 무게중심의 좌표를 직접 제시하여 삼각형의 무게중심의 좌표를 구하는 공식을 알고 있다면 쉽게 해결 가능하도록 문항을 축소하여 출제하였다. 삼각형의 무게중심의 좌표를 구하는 공식은 꼭 기억하고 있어야 할 것이다.

문항풀이 Point !!

삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있으면 쉽게 해결 가능한 문항이다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 3번

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(1, 3, -6)$, $\mathrm{B}(7, 0, 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(a, b, 0)$이다. $a+b$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

EBS 교재 2016 수능완성 수학가형[실전편] 187쪽 5번

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(3, 1, -1)$, $\mathrm{B}(-3, 4, 2)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 (a, b, c)일 때, $a+b+c$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소・확대・변형
나. EBS교재에 있는 문항에서 숫자만 바뀐 동일한 문항으로 공간좌표에서 선분의 내분점을 구하게 하는 문항이다.

문항풀이 Point !!

공간좌표에서 내분점을 구할 수 있으면 쉽게 풀 수 있는 문항이다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016 수능특강 86쪽 4번 변형

구 $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+k=0$ 이 다음 두 조건을 만족시킬 때, 자연수 k 의 최솟값과 최댓값의 합은?

(가) zx 평면과 만난다.
(나) xy 평면과 만나지 않는다.

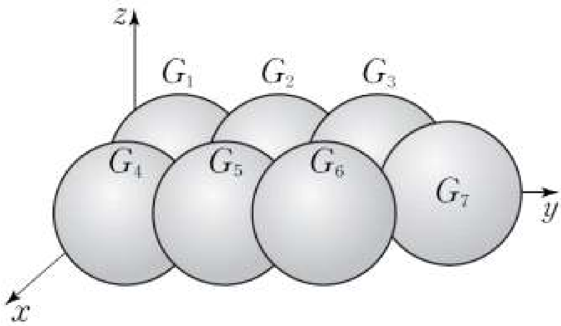
① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능특강 86쪽 1번 변형

좌표공간에 그림과 같이 크기가 같은 일곱 개의 구가 접하면서 xy 평면위에 놓여 있다. 두 개의 구 G_1, G_4 는 zx 평면과 접하고, 세 개의 구 G_1, G_2, G_3 는 yz 평면과 접한다. 또한, 구 G_7 은 두 구 G_3, G_6 과 동시에 접한다. 원점에서 구 G_6 의 중심까지의 거리가 $\sqrt{70}$ 일 때, 구 G_7 의 중심의 좌표는 $(a,\ b,\ c)$ 이다. $a+b+c$ 의 값은? (단, $a>0$, $b>0$, $c>0$)



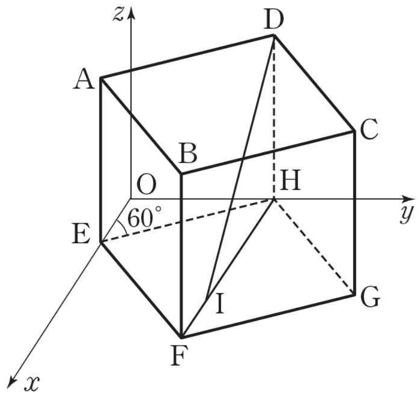
① $6\sqrt{2}+\sqrt{6}$ ② $7\sqrt{2}+\sqrt{6}$ ③ $8\sqrt{2}+\sqrt{6}$
④ $9\sqrt{2}+\sqrt{6}$ ⑤ $10\sqrt{2}+\sqrt{6}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능완성 135쪽 14번 변형

좌표공간에 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH가 있다. 이 정육면체의 꼭짓점 E와 H는 각각 x축, y축 위에 있고 모서리 AE와 DH는 각각 zx평면과 yz평면 위에 있으면서 $\angle \mathrm{OEH} = 60^\circ$이다. 선분 FH를 1 : 3으로 내분하는 점을 I라 할 때, 선분 DI가 평면 AEGC와 만나는 점의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하자. $a+b+c$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{4}{3}+\sqrt{3}$　② $\frac{5}{3}+\sqrt{3}$　③ $2+\sqrt{3}$　④ $\frac{7}{3}+\sqrt{3}$　⑤ $\frac{8}{3}+\sqrt{3}$

풀 이

Ⅶ. 공간도형의 방정식

기출 문항 분석

이 단원에서는 위치벡터와 벡터의 성분표현, 벡터의 내적과 수직, 평행조건 등 공간벡터의 성질을 이해하고 벡터의 연산에 대한 기하학적 의미를 공간도형과 결합하여 적용해야 해결할 수 있는 고난이도 응용문제들이 주로 출제되고 있다.

최근 수능에서 기출문항을 살펴보면 공간도형의 방정식과 관련하여 정답형 고난이도 문항(19번)과 단답형 고난이도 문항(29번)이 각각 1문항씩 출제되고 있다는 사실을 알 수 있다. 출제된 4점짜리 문항을 분석해보면 원, 삼각형, 사각형, 정사면체, 정육면체, 구 등 기본도형과 연계하여 공간도형의 성질과 정사영 등이 복합적으로 응용되어져 문제가 출제되고 있다. 이를 해결하기 위해서는 중학교 때부터 배웠던 도형에 대한 기본적인 정의와 성질들을 숙지하고 있어야 하며, 벡터의 성분표현, 벡터의 평행·수직조건, 벡터의 내적의 정의, 벡터의 내적의 기하학적 의미, 직선의 방정식의 방향벡터와 평면의 방정식의 법선벡터를 통한 두 직선이 이루는 각, 직선과 평면이 이루는 각, 두 평면이 이루는 각, 점과 평면 사이의 거리 개념들을 동시에 활용하여 문제를 해결할 수 있어야 한다. 또한 단순한 벡터의 연산, 벡터의 성분 표현, 평행·수직 조건 등이 도형에 적용되지 않고 기본적인 벡터의 정의와 연산만을 묻는 문제도 출제될 수 있기 때문에 기본 개념 또한 충실히 공부해 두어야 할 것이다.

출제 경향 포인트

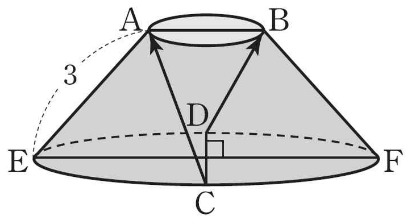
출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. B형. 6번	공간좌표에서 방향벡터의 내적으로 표현되는 두 직선의 수직일 조건을 이용하여 주어진 변수를 구하는 문제 (정답형 3점)
2014수능. B형. 19번	주어진 조건을 공간좌표를 이용하여 구의 반지름을 구하는 문제(정답형 4점)
2014수능. B형. 29번	정사영을 이해하고 평면의 방정식의 법선벡터를 이용하여 주어진 식의 최댓값을 구하는 문제(단답형 4점)
2015수능. B형. 19번	직선과 평면의 방정식을 이해하고 내적을 이용하여 점의 좌표를 구하는 문제 (정답형 4점)
2015수능. B형. 29번	두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여 정사영의 넓이의 최댓값을 구하는 문제(단답형 4점)
2016수능. B형. 19번	좌표공간에서 주어진 조건을 만족하는 점이 나타내는 도형의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 구하는 문제(단답형 4점)
2016수능. B형. 29번	좌표공간에서 주어진 조건을 만족하는 두 벡터의 내적의 최댓값을 구하는 문제(단답형 4점)

17 공간벡터

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 기하와 벡터 95쪽 4번

그림과 같이 서로 수직인 두 선분 AB, CD를 각각 두 밑면의 지름으로 하는 원뿔대가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{CD}}=6$이고, 선분 CD가 지름인 밑면에서 선분 CD와 수직인 지름의 양 끝점을 각각 E, F라고 할 때 $\overline{\mathrm{AE}}=3$이다. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $-\frac{5}{6}$　② $-\frac{2}{3}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{1}{3}$　⑤ $-\frac{1}{6}$

EBS 문항 분석

가. 도형에서 정의된 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구하는 문항이다.
나. 선분 DC와 EF를 각각 x축과 y축으로 생각하고 공간좌표를 이용하면 쉽게 해결할 수 있는 문항이다.
다. 공간좌표를 이용하지 않고 한 벡터를 평행이동하여 해결 할 수도 있다.

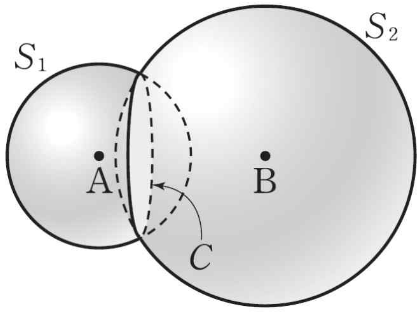
다시 보는 개념 !!

가. 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이 이루는 각의 크기를 θ $(0\le\theta\le\pi)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 기하와 벡터 96쪽 1번

좌표공간에서 두 구 $S_1 : x^2+y^2+z^2=25$, $S_2 : x^2+(y-6)^2+(z-8)^2=65$의 중심을 각각 A, B라 하고, 두 구 S_1, S_2가 만나서 생기는 원 C 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$를 만족시키는 점 Q가 나타내는 도형을 C'이라고 하자. 도형 C' 위를 움직이는 두 점 S, T에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{BS}}+\overrightarrow{\mathrm{BT}}|$의 최솟값을 구하시오.



EBS 문항 분석

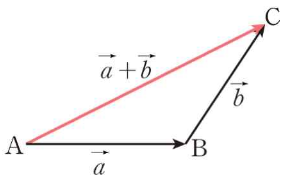
가. 두 벡터의 합을 만족하는 점 Q의 자취는 원이 된다는 사실을 알고 있는지 묻고 있는 문항이다.

나. 두 벡터의 합 $|\overrightarrow{\mathrm{BS}}+\overrightarrow{\mathrm{BT}}|$의 최솟값은 두 점 S와 T가 원 C'의 지름의 양 끝점일라는 사실을 알고 있어야 해결할 수 있는 문항이다.

다. 점 Q가 나타내는 도형을 찾은 후 다시 두 벡터의 합의 최솟값을 구하는 문항으로 두 단계에서 실수가 없어야 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

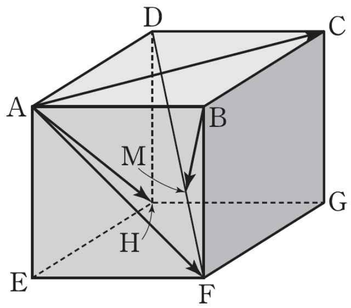
가. $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$일 때, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$이다.



나. 두 구가 만나서 생기는 도형은 두 구의 중심을 연결한 선분위에 중심이 있는 원이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3　　2016년 수능완성 수학(가) 143쪽 4번

그림과 같이 정육면체 ABCD－EFGH에서 선분 DF를 2 : 1로 내분하는 점을 M이라 할 때,
$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=p\overrightarrow{\mathrm{AC}}+q\overrightarrow{\mathrm{AF}}+r\overrightarrow{\mathrm{AH}}$를 만족시키는 세 상수 p, q, r에 대하여 $p^2+q^2+r^2$의 값은?



① $\frac{2}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{2}{3}$

EBS 문항 분석

가. 내분점으로 정의되어진 벡터를 세 벡터의 조합으로 나타낼 수 있는지를 묻고 있는 문항이다.

나. 주어진 조건 $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=p\overrightarrow{\mathrm{AC}}+q\overrightarrow{\mathrm{AF}}+r\overrightarrow{\mathrm{AH}}$의 모든 벡터들을 세 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$로 나타낸 후 좌변과 우변을 비교하면 쉽게 해결할 수 있는 문항이다.

다. 점 H를 원점으로 두고 좌표공간에서 좌표의 성질을 이용하여도 해결할 수 있는 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 이은 선분 AB를

① $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

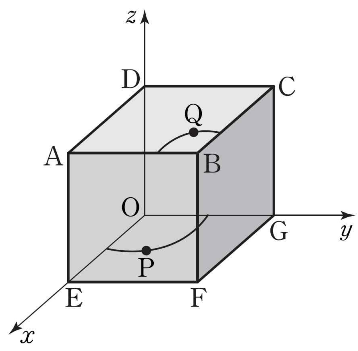
② $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학(가) 144쪽 8번

그림과 같이 좌표공간에 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD−EFGO가 있다. 면 EFGO 위에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 부채꼴의 호 위의 점을 P, 면 ABCD 위에서 점 B(4, 4, 4)를 중심으로 하는 부채꼴의 호 위의 점을 Q라 하자. $\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{BQ}=\vec{0}$일 때, $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{QF}$의 값은?



① −12 ② −14 ③ −16 ④ −18 ⑤ −20

EBS 문항 분석

가. 두 벡터의 합이 $\vec{0}$이면 두 벡터의 크기가 같고 방향이 반대인 경우라는 사실을 알고 있는지를 묻고 있는 문항이다.
나. 좌표공간을 이용하면 쉽게 해결할 수 있는 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 하면 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$이다.

나. 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여

① $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

② $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$

나. $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때,

① $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

② $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$

③ $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$ (단, k는 실수)

나. $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$이다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학B형 29번

좌표공간의 두 점 $A(2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$, $B(1,\ -\sqrt{2},\ 2\sqrt{3})$에 대하여 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

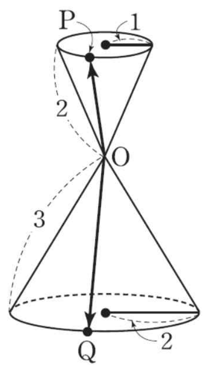
(가) $|\overrightarrow{AP}|=1$

(나) $\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{6}$이다.

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{33}$이다. $16(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

EBS 교재 2015 수능완성 208쪽 20번

그림과 같이 꼭짓점이 O, 밑면의 반지름의 길이가 각각 1, 2이고 모선의 길이가 각각 2, 3인 두 원뿔이 있다. 작은 원뿔의 밑면의 둘레인 원 위의 점 P와 큰 원뿔의 밑면의 둘레인 원 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최댓값은? (단, 점 O는 두 원뿔의 밑면의 중심을 이은 선분 위에 있다.)



① $1-\sqrt{15}$ ② $2-\sqrt{15}$ ③ $1-\sqrt{5}$
④ $3-\sqrt{15}$ ⑤ $2-\sqrt{5}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 확대

나. EBS교재와 기출문항 모두 주어진 조건을 만족하는 두 벡터의 내적의 최댓값을 구하는 문항이다. 하지만 EBS교재에서는 두 벡터가 그림으로 직접 제시되어 있지만 기출문항에서는 두 벡터의 내적의 최댓값을 구하는 것보다 주어진 조건을 만족하는 두 점 P와 Q를 그림으로 나타내는 것이 학생들에게는 매우 어렵게 느껴졌을 것으로 생각된다. 공간도형에서 출제되는 고난이도 문항들은 주어진 조건을 만족하는 도형을 이해하고 있는지를 묻고 있으므로 그림으로 나타내는 연습을 꾸준히 할 필요가 있다.

문항풀이 Point !!

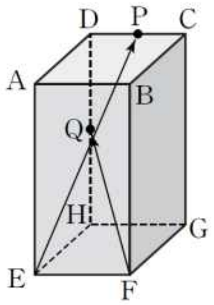
좌표공간에서 주어진 조건들을 만족하는 도형을 평면에 효과적으로 나타낼 수 있어야 한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 95쪽 3번 변형

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}=2$, $\overline{AE}=4$인 직육면체 ABCD−EFGH 에서 모서리 CD, 모서리 DH의 중점을 각각, P, Q라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{EP}$와 벡터 $\overrightarrow{FQ}$의 내적 $\overrightarrow{EP}\bullet\overrightarrow{FQ}$의 값은?



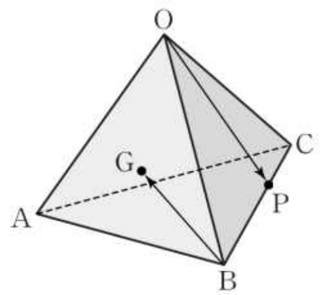
① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016 수능완성 144쪽 07번 변형

그림과 같이 한 모서리가 길이가 3인 정사면체 OABC가 있다. 삼각형 OAB의 무게 중점을 G, 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{BG}$와 벡터 $\overrightarrow{OP}$의 내적 $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값은?



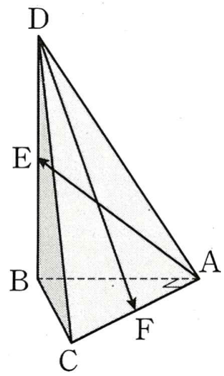
① -4　② $-\frac{7}{2}$　③ -3　④ $-\frac{5}{2}$　⑤ -2

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016 수능특강 93쪽 예제3번 변형

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=2$인 직각이등변삼각형 ABC가 밑면이고 $\overline{BD}=4$인 모서리 BD가 밑면 ABC에 수직인 삼각뿔 ABCD가 있다. 모서리 BD의 중점을 E, 모서리 AC의 중점을 F라 할 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DF}$의 내적 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}$의 값은?



① -15 ② -12 ③ -10 ④ 10 ⑤ 12

풀 이

18 도형의 방정식

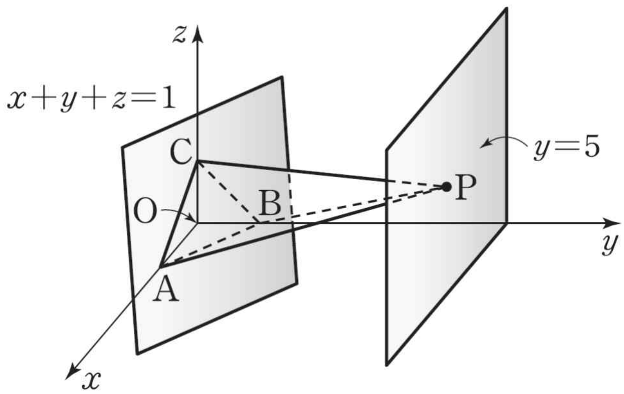
2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 기하와 벡터 108쪽 8번

좌표공간에서 평면 $x+y+z=1$이 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 할 때, 평면 $y=5$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ 5,\ b)$에 대하여 사면체 PABC는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 삼각형 PCA와 PCB의 넓이가 서로 같다.
(나) 사면체 PABC의 부피는 4이다.

$\dfrac{b}{a}$의 최댓값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 점과 평면사이의 거리공식 등을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 점의 좌표를 구할 수 있는지를 묻고 있는 문항이다.

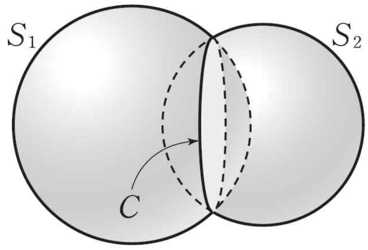
나. 두 삼각형 PCA와 PCB는 넓이가 서로 같고 두 변의 길이가 같으므로 합동이라는 사실을 이용하면 쉽게 해결 가능한 문항이다.

다시 보는 개념 !!

점 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 기하와 벡터 110쪽 6번

좌표공간에서 두 구 $S_1 : x^2+y^2+z^2-2x+6z=6$, $S_2 : x^2+y^2+z^2+6x=2$가 만나서 생기는 원 C 위의 임의의 점을 P라고 하자. 점 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$라고 할 때, 원 C 위의 모든 점 P에 대하여 항상 $|\vec{p}-\vec{a}|=4\sqrt{2}$가 성립한다. $a+b+c$의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)



① $-\dfrac{14}{5}$　② $-\dfrac{12}{5}$　③ -2　④ $-\dfrac{8}{5}$　⑤ $-\dfrac{6}{5}$

EBS 문항 분석

가. 점과 평면사이의 거리공식 등을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 점 A의 좌표를 구할 수 있는지를 묻고 있는 문항이다.

나. 원 C 위의 모든 점 P에 대하여 항상 $|\vec{p}-\vec{a}|=4\sqrt{2}$가 성립하도록 하는 점 A는 두 구의 중심을 연결한 직선위의 점이라는 사실을 알고 있어야 해결 할 수 있는 고난이도 문항이다.

다시 보는 개념 !!

두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 이은 선분 AB를

① $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

② $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학(가) 148쪽 20번

좌표공간에서 두 평면 $\alpha : 2x+y+z=2$, $\beta : x-y+2z=1$의 교선 l과 점 $\mathrm{A}(3,\ 1,\ -2)$를 지나는 직선 m이 한 점에서 만난다. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기가 θ일 때, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이다. 직선 m이 두 평면 α, β와 이루는 예각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 할 때, $\cos(\theta_1+\theta_2)$의 값은? (단, 두 직선 l, m이 만나는 점은 yz평면 위에 있지 않다.)

① $\dfrac{\sqrt{23}}{6}$　② $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　③ $\dfrac{5}{6}$　④ $\dfrac{\sqrt{26}}{6}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

EBS 문항 분석

가. 좌표공간에서 직선과 직선, 직선과 평면이 이루는 각을 방향벡터와 법선벡터를 이용하여 구할 수 있는지를 묻고 있는 문항이다.

나. 주어진 조건을 만족하는 직선 m의 방향벡터를 구해야 해결할 수 있는 고난이도 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$에 평행한 직선의 방정식은

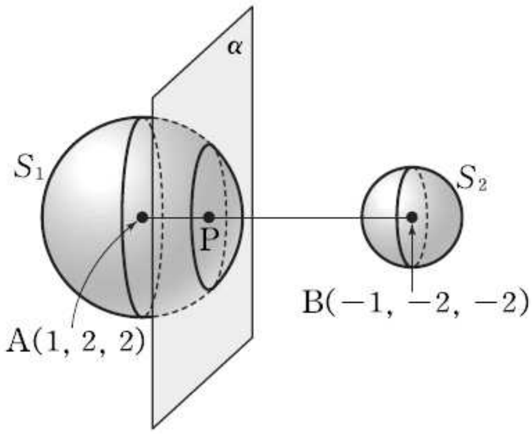
$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\ (\text{단, } abc\neq 0)$$

나. 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \iff ax+by+cz+d=0\ (\text{단, } d=-ax_1-by_1-cz_1)$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 | 2016년 수능완성 수학(가) 151쪽 28번

좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구 S_1과 점 $\mathrm{B}(-1,\ -2,\ -2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구 S_2가 있다. 선분 AB 위의 점 P를 지나고 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$에 수직인 평면을 α라 하자. 평면 α와 구 S_1이 만나는 점에서 구 S_1에 접하는 평면이 구 S_2에 접할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=t\ (0<t<2)$에 대하여 모든 실수 t의 값의 합은?



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

EBS 문항 분석

가. 두 구에 접하는 평면의 위치관계를 알고 있는지를 묻고 있는 문항이다.

나. 한 평면이 두 구에 접하고 있을 때 접점의 자취는 원이 된다는 사실을 이용하면 쉽게 접근할 수 있는 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 점 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

나. 구의 중심 C와 구 위의 임의의 점 P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{p}$라고 할 때, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식을 벡터로 나타내면

$$|\vec{p}-\vec{c}|=r \Leftrightarrow (\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학B형 19번

좌표공간에 점 $\mathrm{A}(2, 2, 1)$과 평면 $\alpha : x+2y+2z-14=0$이 있다. 평면 α 위의 점 P가 $\overline{\mathrm{AP}} \le 3$을 만족시킬 때, 점 P가 나타내는 도형의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는? [4점]

① $\frac{14}{3}\pi$ ② $\frac{13}{3}\pi$ ③ 4π ④ $\frac{11}{3}\pi$ ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

EBS 교재 2015 수능완성 실전편 45쪽 15번

좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=12$가 평면 $x+y+z=3$과 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는? [4점]

① $\sqrt{3}\pi$ ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ 3π ④ $3\sqrt{3}\pi$ ⑤ 6π

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형 및 확대

나. EBS교재와 기출문항 모두 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 묻고 있다. 다만 EBS교재에서는 구와 평면이 만나서 생기는 원을 제시하였지만, 기출문항에서는 원을 제시하지 않고 점 A로부터 거리가 3이하인 평면위의 점으로 나타내었다. 따라서 점 P가 나타내는 점들의 자취가 원이라는 사실을 알고 있어야 해결할 수 있는 문항이다.

문항풀이 Point !!

주어진 조건을 만족하는 점 P가 나타내는 도형이 원이라는 사실을 알고, 두 평면이 이루는 각을 이용하면 정사영의 넓이를 구할 수 있다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016 수능특강 105쪽 07번 변형

구 $(x-a)^2+y^2+z^2=4$ 가 평면 $x-y+\sqrt{7}z=10$ 에 접하도록 하는 모든 a 의 값의 곱은?

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016 수능완성 151쪽 26번 변형

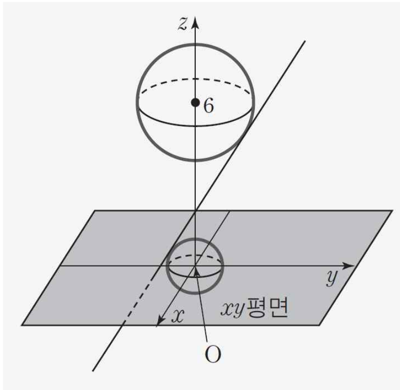
점 $(5,\ 0,\ 1)$ 을 지나고 직선 $l : x = \dfrac{y}{2} = z+1$ 과 수직인 평면 α 가 구 $x^2+y^2+z^2=25$ 와 만나서 생기는 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ $\sqrt{19}$ ⑤ 5

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016 수능완성 151쪽 28번 변형

그림과 같이 직선 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=z-n$ 이 두 구 $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+(z-6)^2=4$ 에 동시에 접할 때, $l^2+m^2+n^2$ 의 값은? (단, l, m, n 은 0 이 아닌 상수이고 $0<n<6$ 이다.)



① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$

④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

풀 이

Ⅷ. 확률

기출 문항 분석

이 단원에서는 중복조합, 조건부확률과 독립, 독립시행의 확률 문제가 주를 이루고 있다. 실생활의 다양한 상황 속에서 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제가 출제되고 있으며 중복조합을 활용한 방정식의 해 구하는 문제가 지속적으로 출제되고 있다.

또한, 확률의 곱셈정리를 이용한 계산문제, 조건부 확률을 구하는 문제, 독립시행의 확률에 대한 문제 등이 다양하게 출제되고 있다. 특히, 동전이나 주사위를 반복적으로 던졌을 때 문제의 조건을 만족시킬 확률을 구하는 기출문항을 꼼꼼히 풀어보는 것이 중요하며 소홀히 생각하다가 틀리는 경우가 많이 발생하므로 시험 직전까지 꾸준히 연습하는 것이 중요할 것이다.

출제 경향 포인트

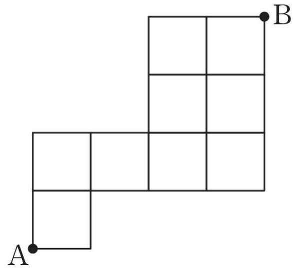
출제 연도	기출 문항의 형태
2014수능. B형. 5번	확률을 집합의 개념을 이용하여 푸는 문제, 확률의 기본성질을 이용해도 되고 벤다이어그램을 이용해도 되는 문제(정답형 3점)
2014수능. B형. 9번	중복조합을 이용해서 경우의 수를 구하는 문제 (정답형 3점)
2014수능. B형. 23번	부분집합이 2개인 표본공간의 벤다이어그램(표)을 이용한 조건부확률 문제(정답형 3점)
2015수능. B형. 8번	배반사건의 정의와 확률의 덧셈정리를 이용하여 푸는 문제(정답형 3점)
2015수능. B형. 15번	부분집합이 2개인 표본공간의 벤다이어그램(표)을 이용한 조건부확률 문제(정답형 3점)
2015수능. B형. 26번	중복조합의 정의와 중복조합의 수 계산방법을 이용하여 푸는 문제 (단답형 4점)
2016수능. B형. 5번	사건의 독립과 조건부확률을 이용하여 확률을 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. B형. 8번	독립시행의 확률을 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. B형. 14번	중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍 개수 구하는 문제(정답형 4점)

19 순열

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 확률과통계 15쪽 3번

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는?



① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

EBS 문항 분석

가. 직사각형으로 연결된 모양의 도로망에서 최단거리로 움직이는 경우의 수에 관한 문제이다.
나. 최단거리로 움직이는 경우에 반드시 지나가는 점을 잡아 경우를 나누어 같은것이 있는 순열로 해결한다.
다. 위의 문제처럼 도로망마다 잡아야하는 점이 다를 수 있으므로 다양한 문제를 해결하는 연습이 필요하다.

다시 보는 개념 !!

가. 같은것이 포함되어 있는 n개를 일렬로 나열하는 것을 같은 것이 있는 순열이라고 한다.
나. n개 가운데 같은 것이 각가 p개, q개, $\cdots$, r개 있을 때, 이들 모두를 일렬로 나열하는 같은 것이 있는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!\,q!\,\cdots\,r!}\,(\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 확률과통계 16쪽 1번

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는?

(가) $f(1) \neq f(2)$이고 $f(2) \neq f(3)$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 800 ② 810 ③ 820 ④ 830 ⑤ 840

EBS 문항 분석

가. 정의역의 원소와 공역의 원소간 대응에 관한 경우의 수를 묻는 문제이다.
나. 경우를 나누어 $f(1)=f(3)$인 경우와 $f(1) \neq f(3)$인 두 가지 경우로 나누어 문제를 접근해본다.
다. 함수의 대응에 관한 경우의 수 문제는 함수의 조건에 따라 다양한 경우의 수를 내포하는 문제를 출제할 수 있으므로 유사한 여러 가지 문제를 풀어볼 필요가 있다.

다시 보는 개념 !!

순열이란 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 배열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_nP_r$와 같이 나타낸다.

가. ${}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots (n-r+1)$ (단, $1 \le r \le n$)

나. ${}_nP_0 = 1,\ 0! = 1$

다. ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0 \le r \le n$)

라. ${}_nP_r = n \times {}_{n-1}P_{r-1}$ (단, $1 \le r \le n$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학가형 59쪽 6번

1 부터 6 까지의 자연수 중 서로 다른 세 수를 택하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 다음 조건을 만족시키는 자연수의 개수는?

(가) 모든 자리의 수의 합은 짝수이다.
(나) 일의 자리의 수가 홀수이면 십의 자리의 수는 3 의 배수이다.

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

EBS 문항 분석

가. 세 자리 자연수 중 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제이다.
나. 합이 짝수이거나 3의 배수라는 조건을 만족시키기 위해 각 자리수의 홀짝성은 몇 가지 종류가 가능한지 살펴본 후 곱의 법칙을 이용해 경우의 수를 구한다.
다. 문제의 조건이 변형되더라도 먼저 가능한 종류가 몇 가지 있을지 나누어보는 과정이 선행되어야 한다.

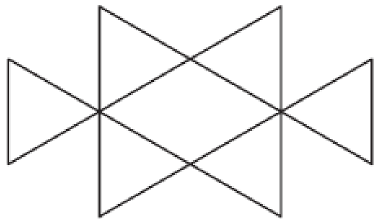
다시 보는 개념 !!

합의 법칙과 곱의 법칙

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고 두 사건 A, B가 모두 일어나는 경우가 없을 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이고 이를 합의법칙이라고 한다. 또 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고 각각의 경우에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 사건 A와 사건 B가 모두 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이고 이를 곱의 법칙이라고 한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학가형 60쪽 12번

그림과 같이 6개의 합동인 정삼각형으로 만든 도형이 있다. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 보라의 6가지 색을 모두 사용하여 6개의 정삼각형의 내부에 칠하려고 한다. 1개의 정삼각형의 내부에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 200 ② 240 ③ 280 ④ 320 ⑤ 360

EBS 문항 분석

가. 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보기 때문에 중복되는 경우의 수만큼 나누어주는 문제 원순열 문제이다.
나. 주어진 도형의 색칠하는 경우를 조금 더 간단한 도형으로 바꾸어 생각해보면 더 쉽게 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라 하고, 이 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ 이다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016년 수능특강 확률과통계 14쪽 4번

집합 $X=\{1,2,3,4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수는?

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=10$$

① 40　② 42　③ 44　④ 46　⑤ 48

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능특강 확률과통계 16쪽 4번

A도시와 B도시 사이에는 서로 다른 5개의 왕복도로가 있다. 갑은 A도시에 거주하며 B도시에 출퇴근하며 출근길과 퇴근길은 서로 다르다. 을은 반대로 B도시에 살며 A도시로 매일 출퇴근 하며 갑과 마찬가지로 출근길과 퇴근길은 서로 다르다. 갑과 을의 출근시간과 퇴근시간은 같을 때, 두 사람이 단 한 번 마주쳐 지나가는 경우의 수는?

① 60 ② 120 ③ 240 ④ 360 ⑤ 480

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 | 2016년 수능완성 수학가형 63쪽 20번

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는?

> (가) 짝수는 작은 순서대로 왼쪽부터 배열한다.
> (나) 소수는 큰 순서대로 왼쪽부터 배열한다.

① 72 ② 76 ③ 78 ④ 80 ⑤ 82

풀 이

20 조합

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 확률과통계 28쪽 1번

a, b, c, d, e의 문자를 중복 사용하여 5개의 문자를 택해 일렬로 나열할 때, 사용된 문자의 종류가 3가지인 경우의 수는?

① 1100 ② 1200 ③ 1300 ④ 1400 ⑤ 1500

EBS 문항 분석

가. 다섯 개의 문자 중 사용된 문자의 종류를 선택하는 것과 선택된 문자를 나열하는 것을 구분해야하는 문제이다.

나. 선택된 3개의 문자를 5개의 문자를 일렬로 나열하면 중복되는 경우를 나누어 구해야 한다.

다시 보는 개념 !!

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_nC_r$와 같이 나타낸다.

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \le r \le n) $$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 확률과통계 28쪽 3번

학생 A가 1, 2, 3, 4, 5중 중복을 허락하여 3개의 수를 택하고, 학생 B도 1, 2, 3, 4, 5 중 중복을 허락하여 3개의 수를 택할 때, 두 학생 A와 B가 택한 6개의 수가 짝수 2개, 홀수 4개인 경우의 수는? (단, 각 학생이 택한 3개의 수의 순서는 생각하지 않는다.)

① 304 ② 314 ③ 324 ④ 334 ⑤ 344

EBS 문항 분석

가. 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 조합과 중복조합을 활용해 구하는 문제이다.

나. 짝수 2개가 선택되는 것은 한 사람이 2개 모두 선택하거나, 1개씩 선택하는 두 가지 경우가 있으므로 합의법칙으로 나누어 경우의 수를 구한다.

다시 보는 개념 !!

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 중복조합이라고 하고, 이 중복조합의 수를 기호로 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$와 같이 나타낸다.

$${}_{n}\mathrm{H}_{r} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학가형 59쪽 6번

1부터 30까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 선택하여 크기순으로 배열할 때, 가운데 수가 n인 경우의 수를 a_n이라 하자. 예를 들어, a_{29}는 29와 29보다 큰 수 1개, 29보다 작은 수 1개를 택하는 경우의 수이므로 $a_{29}=28$이다. $\sum_{n=2}^{29} a_n$의 값은?

① 3980 ② 4020 ③ 4060 ④ 4100 ⑤ 4140

EBS 문항 분석

가. 30개의 수 중 서로 다른 3개의 수를 선택하는 조합의 경우의 수 문제이다.
나. 가운데의 수가 n이 되기 위한 경우의 수를 생각하여 일반항을 찾아 더하려면 문제가 어려워지므로 $\sum_{n=2}^{29} a_n$의 의미를 생각해본다.
다. 조합을 이용한 경우의 수는 보다 큰 관점에서 보면 쉽게 해결되는 경우가 많으므로 여러가지 관점에서 문제를 접근해보는 연습해볼 필요가 있다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학가형 67쪽 37번

다음 조건을 만족시키는 10개의 자연수 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$의 모든 순서쌍 $(a_1, a_2, \cdots, a_{10})$의 개수는?

(가) $a_{10} \le 5$
(나) $a_i \le a_{i+1} (i=1,2,3,\cdots 9)$

① 999 ② 1000 ③ 1001 ④ 1002 ⑤ 1003

EBS 문항 분석

가. 주어진 조건을 만족하는 순서쌍의 경우의 수를 구하는 문제이다.

나. $a_{10} \le 5$라는 조건을 통해 각 a_i의 값은 $1, 2, 3, 4, 5$중 하나의 값이며 $a_i \le a_{i+1}$을 만족시켜야 하므로 중복조합을 활용해 경우의 수를 구한다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 모의평가 수학 가형 문제 27번

사과, 감, 배, 귤 네 종류의 과일 중에서 8개를 선택하려고 한다. 사과는 1개 이하를 선택하고, 감, 배, 귤은 각각 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 과일은 8개 이상씩 있다.)

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 23쪽 예제 3번

연필 1개, 같은 종류의 볼펜 5개, 같은 종류의 만년필 5개, 같은 종류의 형광펜 5개 중에서 5개를 선택하는 경우의 수는?

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 27쪽 1번

같은 종류의 사과 주스 3개와 서로 다른 빵 3개를 5명에게 나누어 주려고 할 때,
사과 주스는 한 사람이 한 개씩만 받도록 남김없이 나누어 주고, 빵은 사과 주스를 받지 않은 사람에게만 하나씩 나누어 주는 경우의 수는? (단, 나누어 주고 남는 빵이 1개 있다.)

① 50 ② 60 ③ 70 ④ 80 ⑤ 90

EBS 문항 분석

가. 연계유형 – 문항의 축소·확대·변형

나. 중복조합을 통해 구별되지 않는 사과나 연필 등을 나누어주는 경우의 수를 중복조합으로 구하는 전형적인 문제이다.

문항풀이 Point !!

문제의 상황을 방정식 $x+y+z=k$의 해의 경우의 수로 나타내어 보고 중복조합을 사용하기 위해 각 x, y, z가 자연수해인지 등을 확인한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 19번

서로 다른 과일 5개를 3개의 그릇 A, B, C에 남김없이 담으려고 할 때, 그릇 A에는 과일 2개만 담는 경우의 수는? (단, 과일을 하나도 담지 않은 그릇이 있을 수 있다.)

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

EBS 교재 2016 수능특강 확률과통계 14쪽 2번

서로 다른 과일 5개를 네 접시 A, B, C, D에 남김없이 담으려고 할 때, 두 접시 A와 B에는 과일이 한 개씩만 담기는 경우의 수는? (단, 빈 접시가 있어도 된다.)

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소・확대・변형

나. 과일을 접시에 담는 방법의 수에 대해서 접시의 수를 하나 줄이고 과일을 담는 방법에 변화를 주어 순열의 수와 중복순열의 수를 이용하는 문제에서 조합의 수와 중복순열의 수를 이용하는 문제로 변형된 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 그릇 A에는 과일 2개만 담는 특수한 상황을 먼저 생각하여 식을 세워야 한다.

나. 조합의 수와 중복순열의 수를 구할 수 있어야 한다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 15번

각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7인 모든 자연수의 개수는?

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

EBS 교재 2016 수능특강 확률과통계 11쪽 예제4번

각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리 자연수 중 각 자리의 수의 합이 6인 자연수의 개수는?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소・확대・변형

나. EBS교재에 있는 문항에서 숫자만 바꾼 동일한 문항으로 각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리 자연수 중에서 생각한다는 점은 그대로 하여 각 자리의 수의 합을 다르게 변형한 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 네 자리 자연수의 각 자리의 수를 미지수로 하여 부정방정식을 세워야 한다.

나. 중복조합의 수를 이용하여 부정방정식의 해를 구한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항! 2016년 수능특강 확률과통계 27쪽 4번

방정식 $\dfrac{d+e+f}{a+b+c}=5$ 를 만족시키는 한 자리 자연수 a, b, c, d, e, f 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는?

① 2160 ② 2260 ③ 2360 ④ 2460 ⑤ 2560

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능특강 확률과통계 28쪽 2번

서로 다른 7개의 연필을 A, B, C 세 사람에게 각 사람이 적어도 한 개씩 받도록 남김없이 나누어 주려고 한다. 어느 한사람도 남은 두 사람이 받은 연필 개수의 합보다 많이 받지 않도록 나누어주는 경우의 수는?

① 1000 ② 1010 ③ 1020 ④ 1030 ⑤ 1050

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016년 수능완성 수학가형 66쪽 34번

방정식 $|x|+|y|+|z|=7$ 을 만족시키는 0 이 아닌 정수 x , y , z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는?

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

풀 이

21 이항정리와 분할

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

2016년 수능특강 확률과통계 40쪽 1번

$(2+x+x^2)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x의 계수는?

① 26 ② 30 ③ 34 ④ 38 ⑤ 42

EBS 문항 분석

가. 이항정리를 이용해 전개했을 때 특정 항의 계수를 구하는 문제이다.
나. 두 식의 곱을 전개했을 때 특정 항이 나올 수 있는 경우를 나누어 각각 구한 후 합의법칙으로 더하여 경우의 수를 구한다.
다. 이항정리의 전형적인 계수 구하는 문제이므로 숫자가 변형되거나 식이 바뀌더라도 구할 수 있도록 연습이 필요하다.

다시 보는 개념 !!

자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^n$을 전개한 식의 계수에 대한 아래와 같은 정리를 이항정리라고 한다.

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots {}_n\mathrm{C}_n b^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$$

이때, 각 항의 계수 ${}_n\mathrm{C}_0$, ${}_n\mathrm{C}_1$, ${}_n\mathrm{C}_2$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_r$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_n$을 이항계수라고 한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 확률과통계 41쪽 3번

$(x+1)^m+(x+1)^n$의 전개식에서 x의 계수가 12일 때, x^2의 계수가 최소가 되는 m의 값을 구하시오. (단, m, n은 모두 2이상의 자연수이다.)

EBS 문항 분석

가. 이항정리를 이용해 전개했을 때 특정 항의 계수와 관련된 문제이다.

나. 이항계수를 이용해 계수를 구하는 단순 계산 문제보다 위 문제처럼 이항정리를 이용해 구한 계수를 통해 함수의 최대최소나 그래프 문제 등으로 문제가 연결될 수 있어 단원 간 융합적인 사고가 필요하다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학가형 68쪽 39번

공을 넣어 두는 5개의 빈 상자가 있다. 10개의 공을 빈 상자 없이 5개의 상자에 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 공과 상자는 각각 서로 구별하지 않는다.)

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

EBS 문항 분석

가. 공을 상자에 넣는 경우의 수와 관련된 문제이다.

나. 공과 상자가 각각 구별이 되는지 여부를 문제 속에서 찾아보고, 조건에 맞는 경우의 수를 구한다.

다. 자연수의 분할과 관련되어 복잡한 경우 보다 위 문제처럼 간단한 경우 큰 수를 기준으로 경우를 나누어 세어보는 연습을 해볼 필요가 있다.

다시 보는 개념 !!

집합의 분할

가. 자연수를 순서를 생각하지 않고 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것

나. 자연수 n을 $k(1 \leq k \leq n)$개의 자연수로 분할하는 경우의 수 : $P(n, k)$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4　2016년 수능완성 수학가형 69쪽 45번

3 이상의 자연수 n에 대하여 $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{n+1}$의 전개식에서 x^{2n-4}의 계수를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=3}^{9}\frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\dfrac{7}{15}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{8}{15}$　④ $\dfrac{17}{30}$　⑤ $\dfrac{9}{15}$

EBS 문항 분석

가. 주어진 조건을 만족하는 순서쌍의 경우의 수를 구하는 문제이다.

나. $a_{10} \leq 5$라는 조건을 통해 각 a_i의 값은 $1, 2, 3, 4, 5$중 하나의 값이며 $a_i \leq a_{i+1}$을 만족시켜야 하므로 중복조합을 활용해 경우의 수를 구한다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 6월모의평가 수학 가형 문제 6번

$\left(x+\dfrac{1}{3x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{13}{9}$ ③ $\dfrac{14}{9}$ ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{16}{9}$

EBS 교재 2016 수능특강 확률과통계 38쪽 1번

$\left(x-\dfrac{3}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^4의 계수는?

① -18 ② -16 ③ -14 ④ -12 ⑤ -10

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소·확대·변형

나. 이항정리를 이용해 특정 차수의 계수를 구하는 문제로 EBS 연계 문항과 거의 동일한 문항이며 계산과정이 간단하므로 쉽게 해결할 수 있는 문제이다.

문항풀이 Point !!

$\left(x+\dfrac{1}{3x}\right)^6$ 처럼 이항정리를 이용하여 식을 전개할 때 두 항이 모두 x를 포함한 식일 때 특정 차수의 계수를 구할 수 있어야 한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 6월모의평가 수학 가형 문제 8번

자연수 6을 짝수 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

EBS 교재 2016 수능특강 확률과통계 37쪽 유제 8번

자연수 10의 분할 중 숫자 4를 포함하는 분할의 수는?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

EBS 문항 분석

가. 연계유형 – 문항의 축소・확대・변형

나. EBS교재의 문항에서 10의 분할이 항상 4를 포함해야 하므로 6을 분할하는 방법의 수를 묻는 대수능 기출문항과 거의 유사하다. 크지 않은 수의 분할이므로 빠뜨리지 않고 세는 것이 중요하다.

문항풀이 Point !!

가. 자연수를 몇 개의 수들의 합으로 나타낼 때 큰 수를 기준으로 경우의 수를 세어보는 것이 필요하며, 빠뜨리는 경우가 생기지 않도록 체계적인 세기가 필요하다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016년 수능특강 확률과통계 40쪽 5번

구별이 되지 않는 초콜릿 8개를 A종류의 같은 접시 3개와 B종류의 접시 2개에 빈 접시가 없도록 담는 경우의 수는?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능특강 확률과통계 41쪽 2번

$(1-x)+\frac{1}{2}(1-2x)^2+\frac{1}{3}(1-3x)^3+\cdots+\frac{1}{10}(1-10x)^{10}$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는?

① 1120 ② 1220 ③ 1320 ④ 1420 ⑤ 1520

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016년 수능완성 수학가형 70쪽 50번

자연수 n 에 대하여 $a_n = \sum_{r=1}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_r$ 라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{a_n + 1}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

22 확률

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 확률과통계 53쪽 2번

집합 $X=\{x\,|\,x$는 10이하의 자연수$\}$에 대하여 두 집합 A, B를

$A=\{x\,|\,x=2n,\ n\in X\}$, $B=\{x\,|\,x=2^n,\ n\in X\}$

라 하자. 집합 A의 원소 중에서 임의로 택한 원소를 a, 집합 B의 원소 중에서 임의로 택한 원소를 b라 할 때, $a+b$가 3의 배수일 확률은?

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{7}{20}$ ⑤ $\frac{9}{20}$

EBS 문항 분석

가. 두 집합에서 임의로 원소를 선택하였을 때 주어진 조건을 만족시킬 확률을 수학적 확률로 구하는 문제이다.

나. 3의 배수가 되기 위한 경우의 수를 먼저 나누어 구해본 뒤 전체 경우의 수로 나누어 수학적 확률을 구한다.

다. 수학적 확률에 관한 문제는 순열과 조합 단원과 연계되어 출제되므로 경우의 수를 구하는 기초를 탄탄히 해둘 필요가 있다.

라. 수학적 확률은 각 근원사건이 일어난 확률이 같은 경우에만 사용할 수 있으므로 단순히 전체 경우의 수만 구하면 틀릴 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 수학적 확률 : 어떤 시행의 표본공간 S에 대하여 각각의 원소가 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어날 확률을 기호로 $P(A)$로 나타내고, $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$로 정의한다.

나. 통계적 확률 : 같은 조건에서 동일한 시행을 n번 반복하여 사건 A가 r_n번 일어난다고 할 때, n이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 이 p를 사건 A의 통계적 확률이라고 한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2　　2016년 수능특강 확률과통계 54쪽 1번

1부터 9까지의 자연수가 각각 적혀 있는 9개의 구슬을 임의로 3개씩 3묶음으로 나누어 상자 A, B, C에 각각 한 묶음씩 넣을 때, 각 상자에 들어 있는 세 구슬에 적혀 있는 수의 합이 모두 홀수일 확률은?

① $\frac{1}{14}$　② $\frac{1}{7}$　③ $\frac{3}{14}$　④ $\frac{2}{7}$　⑤ $\frac{5}{14}$

EBS 문항 분석

가. 수학적 확률을 이용해 주어진 조건을 만족시킬 확률을 구하는 문제이다.
나. 세 묶음의 구슬들의 합이 모두 홀수이기 위한 경우를 나누어 보고 각 묶음에 구슬을 분배하는 경우의 수를 구한다.
다. 분배하는 경우 분배하는 물건이나 담는 상자가 구별이 되는지 여부를 잘 판단하여 전체 근원 사건의 경우의 수를 구하여야 한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3 2016년 수능완성 수학가형 68쪽 39번

영수네 학급 학생 35명 중 2017학년도 대학수학능력시험 과학탐구 영역에서 화학Ⅰ을 선택한 학생은 21명, 생명과학 Ⅱ를 선택한 학생은 15명이고, 화학 Ⅰ과 생명과학 Ⅱ 중 어느 것도 선택하지 않은 학생은 5명이다. 이 학급에서 임의로 한 명의 학생을 뽑을 때, 이 학생이 화학Ⅰ과 생명과학Ⅱ를 모두 선택한 학생일 확률은?

① $\frac{6}{35}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{8}{35}$ ④ $\frac{9}{35}$ ⑤ $\frac{2}{7}$

EBS 문항 분석

가. 확률의 기본성질과 덧셈정리를 이용해 해결하는 문제이다.

나. 화학Ⅰ과 생명과학 Ⅱ을 선택한 학생을 뽑는 사건을 각각 A, B라고 하면 주어진 상황을 잘 표현할 수 있다.

다. 여사건의 확률과 확률의 덧셈정리는 확률 계산의 기초이므로 틀리지 않도록 많은 연습을 해야 한다.

다시 보는 개념 !!

확률의 덧셈정리

가. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

나. 두 사건 A, B가 서로 배반사건, 즉 $A\cap B=\phi$ 이면 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학가형 78쪽 18번

‘시작’ 버튼을 누르면 ‘정지’ 버튼을 누를 때까지 다음 5개의 정수 중 하나를 1초에 하나씩 임의로 찍어내는 기계가 있다.

3, 12, 15, 17, 28

‘시작’ 버튼을 누른 후 5초가 된 직후에 ‘정지’ 버튼을 눌렀다. 이 기계가 찍어낸 5개의 수의 곱이 10으로 나누어떨어지는 수가 될 확률은?

① $\frac{378}{625}$ ② $\frac{379}{625}$ ③ $\frac{76}{125}$ ④ $\frac{381}{625}$ ⑤ $\frac{382}{625}$

EBS 문항 분석

가. 여사건의 확률과 확률의 덧셈정리를 활용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구하는 문제이다.

나. 10으로 나누어 떨어지지 않으므로 여사건의 확률로 생각하되 10의 소인수 2와 5를 모두 갖지 않도록 확률의 덧셈정리를 활용한다.

다시 보는 개념 !!

사건 A가 일어나지 않을 여사건 A^c의 확률 $P(A^c)=1-P(A)$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 6월 모의평가 수학가형 14번

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 이차함수 $f(x)=x^2-7x+10$에 대하여 $f(a)f(b)<0$이 성립할 확률은?

① $\frac{1}{18}$　② $\frac{1}{9}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{2}{9}$　⑤ $\frac{5}{18}$

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 53쪽 4번

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나온 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 이차함수 $f(x)=x^2-5x+6$에 대하여 $f(a)f(b)=0$이 성립할 확률은?

① $\frac{7}{18}$　② $\frac{4}{9}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{11}{18}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 – 문항의 축소・확대・변형

나. EBS교재에 있는 문항에서 숫자만 바뀐 동일한 문항이다. $f(a)f(b)<0$이거나 $f(a)f(b)=0$이 되려면 (a,b)의 순서쌍으로 가능한 경우가 모두 몇 가지인지 세어보는 간단한 문제로 쉽게 해결할 수 있다.

문항풀이 Point !!

$f(a)f(b)=0$이 되도록 하는 순서쌍 (a,b)가 몇 가지인지 직접 세어볼 수도 있지만 여사건을 활용해서 해결할 수도 있다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 4번

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

EBS 교재 2016 수능특강 확률과통계 52쪽 2번

서로 배반사건인 두 사건 A 와 B가

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{4},\ 2\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$의 값은?

① $\frac{1}{72}$ ② $\frac{1}{36}$ ③ $\frac{1}{24}$ ④ $\frac{1}{18}$ ⑤ $\frac{5}{72}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소・확대・변형

나. EBS교재에 있는 문항에서는 $\mathrm{P}(A)$와 $\mathrm{P}(B)$를 모두 구하도록 되어 있지만 기출문항에서는 $\mathrm{P}(A)$의 값을 주고 $\mathrm{P}(B)$의 값만 구하면 되도록 하여 더욱 쉽게 출제된 변형 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 배반사건의 정의를 알아야 한다.

나. 확률의 덧셈 정리를 이해하고 활용하여야 한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016년 수능특강 확률과통계 53쪽 4번

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 a, b라 하자.

삼차함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+x+1$에 대하여 $f(a)f(b)$의 값이 짝수일 확률은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능특강 확률과통계 54쪽 2번

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $Y=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$로의 함수 중에서 임의로 선택한 한 함수를 $f(x)$라 할때, $f(1)f(2)f(3)f(4)$가 4의 배수 또는 $f(1)\geq 4$이 성립할 확률은?

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{3}{64}$ ③ $\frac{5}{64}$ ④ $\frac{7}{64}$ ⑤ $\frac{9}{64}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016년 수능완성 수학가형 70쪽 50번

남학생 5 명과 여학생 3 명 중에서 임의로 4 명을 뽑을 때, 적어도 한 명이 여학생일 확률은?

① $\frac{13}{14}$ ② $\frac{6}{7}$ ③ $\frac{11}{14}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{9}{14}$

풀 이

23 조건부확률

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 확률과통계 66쪽 3번

서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B),\ \mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\frac{13}{16}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^c은 사건 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

EBS 문항 분석

가. 독립인 두 사건의 확률을 구하는 문제이다.
나. 확률의 덧셈정리나 여사건의 확률과 함께 묻는 것이 전형적인 문항이므로 유사한 문제를 반복적으로 연습해보아야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률 $\mathrm{P}(A\cap B)$는

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

나. 사건의 독립과 종속

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 것이 사건 B가 일어나는 확률에 영향을 주지 않을 때, 두 사건 A, B는 서로 독립이라고 한다. 즉, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$ 또는 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$ 일 때, 두 사건 A, B는 서로 독립이라고 하며 두 사건이 서로 독립이 아닐 때, 종속이라고 한다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 확률과통계 55쪽 1번

어느 학급의 학생 60명을 대상으로 조사한 결과, 일본, 중국을 방문한 적이 있는 학생의 수는 각각 30, 20이었다. 이들 60명 중 임의로 선택한 한 학생이 일본을 방문한 적이 있는 학생이었을 때 이 학생이 중국을 방문한 적이 있는 학생일 확률을 p_1, 이들 60명 중 임의로 선택한 한 학생이 중국을 방문한 적이 있는 학생이었을 때 이 학생이 일본을 방문한 적이 있는 학생일 확률을 p_2라 하자. $p_1+p_2=\frac{5}{4}$일 때, 60명의 학생 중 일본과 중국을 모두 방문한 적이 있는 학생의 수를 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 조건부 확률을 이용해 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구하는 문제이다.

나. 일본, 중국을 방문한 적이 있는 학생을 선택하는 사건을 각각 A, B라 할때 문제의 조건을 조건부 확률로 나타내어 본다.

다시 보는 개념 !!

가. 어떤 시행에서 표본 공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률이라 하고 $\mathrm{P}(B|A)$로 나타낸다.

나. $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ (단, $\mathrm{P}(A)>0$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 3　　2016년 수능완성 수학가형 81쪽 26번

어느 요가 수련원에 신규 등록한 회원은 남자 12명, 여자 28명이다. 이 중에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 뽑힌 사람이 남자 회원일 사건을 A, 50세 이상일 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A|B)=\frac{4}{13}$$

이다. 이 요가 수련원에 신규 등록한 회원 중에서 임의로 뽑은 한 명이 50세 미만일 때, 이 사람이 여자 회원일 확률은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{4}{7}$　③ $\frac{9}{14}$　④ $\frac{5}{7}$　⑤ $\frac{11}{14}$

EBS 문항 분석

가. 실생활에서의 상황을 확률로 구해보는 문제이다.

나. 문제의 풀이과정은 매우 간단하지만, 문제에서 구하려고 하는 확률을 수학적으로 표현해보는 연습이 필요하다.

다. 회원을 뽑는 상황처럼 실생활 속의 일들을 바탕으로 확률을 묻는 문제가 출제될 수 있다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 수학가형 85쪽 40번

좌표평면 위의 점 P 가 원점을 출발하여 다음 규칙에 따라 움직인다.

> 주사위 한 개를 던져 2 이하의 눈이 나오면 x축의 방향으로 1만큼 움직이고, 3이상의 눈이 나오면 y축의 방향으로 1만큼 움직인다.

위와 같은 시행을 5번 연속 실행하여 점 P 가 점 B$(2, 3)$에 도달했을 때, 점 P 가 점 A$(1, 2)$를 지나지 않고 점 B$(2, 3)$에 도달했을 확률은?

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

EBS 문항 분석

가. 주사위를 던지는 시행을 반복해서 하고 있으므로 독립시행의 확률을 이용하는 문제이다.

나. 주어진 규칙대로 점 P가 움직일 때, 점 $A(1, 2)$를 반드시 지나고 점 $B(2, 3)$에 도달하는 확률을 먼저 생각해본다.

다시 보는 개념 !!

독립시행의 확률

가. 동전이나 주사위를 여러 번 반복하여 던지는 경우와 같이 매회 같은 조건에서 어떤 시행을 반복할 때, 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 아무런 영향을 주지 않을 경우, 즉 매회 일어나는 사건이 서로 독립인 경우 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

나. 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p, 사건 A가 일어나지 않을 확률을 q라 하면 이 시행을 n회 반복한 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_{n}C_{r}p^{r}q^{n-r} \text{(단, } p+q=1,\ r=0, 1, 2, \cdots, n)$$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 수학 B형 문제 5번

두 사건 A, B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

EBS 교재 2015 수능특강 적분과통계 100쪽 2번

서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{4}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B^C)$의 값은?

(단, A^C, B^C은 각각 A, B의 여사건이다.)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소・확대・변형

나. 문제에서 주어진 식을 이용하여 여사건의 확률과 독립인 두 사건의 확률을 이용해 조건부확률을 구하는 전형적인 유형의 문제이다.

문항풀이 Point !!

가. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 서로 영향을 주지 않으므로 $\mathrm{P}(B|A^c)=\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

나. 서로 독립인 두 사건은 여사건과도 독립임을 이용하면 보다 쉽게 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2016학년도 대수능 수학 B형 문제 8번

한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수의 곱이 6일 확률은?

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

EBS 교재 2015 수능특강 적분과통계 100쪽 5번

한 개의 동전을 10번 던질 때, 앞면과 뒷면이 나올 횟수가 적어도 각각 2회 이상일 확률은?

① $\frac{495}{512}$ ② $\frac{497}{512}$ ③ $\frac{499}{512}$ ④ $\frac{501}{512}$ ⑤ $\frac{503}{512}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 – 문항의 축소・확대・변형

나. 동전을 여러 번 반복하여 던지는 독립시행의 확률로 기출문제와는 달리 주어진 조건이 여사건을 이용하여 구하는 방향으로 변형되긴 하였으나 유형은 같은 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 동전이나 주사위를 반복하여 던졌을 때 독립시행의 확률을 이용하여 구할 수 있어야 한다.

나. 문제의 조건을 만족시키려면 동전의 앞면이나 뒷면이 몇 번 나와야 하는지 먼저 경우를 나누어보고, 독립시행의 확률을 구한다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2016학년도 대수능 6월 모의평가 수학 가형 문제 9번

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{13}{16},\quad \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{6}{13}$ ③ $\frac{7}{13}$ ④ $\frac{8}{13}$ ⑤ $\frac{9}{13}$

EBS 교재 2016 수능특강 적분과통계 66쪽 3번

서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B),\ \mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\frac{13}{16}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^c은 사건 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소・확대・변형

나. 조건부 확률 $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$을 고려하며 $P(A\cap B)$의 확률을 구해야하는 과정이 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

여사건의 확률을 이용하면 $\mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\mathrm{P}((A\cap B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$이 성립하며,
두 사건 A, B가 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이 성립함을 이용한다.

EBS 기출분석 4

기출 문항 2016학년도 대수능 6월 모의평가 수학 가형 문제 19번

각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자를 던져 밑면에 적힌 숫자를 읽기로 한다. 이 상자를 3번 던져 2가 나오는 횟수를 m, 2가 아닌 숫자가 나오는 횟수를 n이라 할 때, $i^{|m-n|}=-i$일 확률은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $\frac{3}{8}$　② $\frac{7}{16}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{9}{16}$　⑤ $\frac{5}{8}$

EBS 교재 2016 수능특강 적분과통계 68쪽 3번

한 개의 주사위를 5번 던지는 시행에서 3의 배수인 눈의 수가 나오는 횟수를 m, 3의 배수가 아닌 눈의 수가 나오는 횟수를 n이라 할 때,

$$i^{|m-n|}=-i$$

를 만족시킬 확률은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{7}{27}$　③ $\frac{8}{27}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{10}{27}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소·확대·변형

나. EBS교재에 있는 문항의 $i^{|m-n|}=-i$ 조건은 같지만 던져서 나오는 주사위의 눈을 1, 2, 3, 4의 눈이 있는 정사면체 주사위로 변형한 문제이다. 하지만 $m-n=\pm 3$은 변하지 않아 거의 동일한 문제로 쉽게 해결되는 간단한 문제이다.

문항풀이 Point !!

가. 복소수 i을 거듭제곱해나갈 때 규칙성을 파악한다.

나. 주어진 조건을 만족시키기 위해 주사위의 눈 중 3의배수 혹은 2가 몇 개 나와야 하는지 빠트리지 않고 나누어 세어본다.

EBS 기출분석 5

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 12번

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 두 수의 곱 ab가 6의 배수일 때, 이 두 수의 합 $a+b$가 7일 확률은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

EBS 교재 2016 수능특강 확률과통계 66쪽 1번

한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수일 때, 두 눈의 수의 합이 짝수일 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소・확대・변형

나. 주사위를 두 번 던져 나온 두 수의 곱과 합을 이용한 거의 동일한 문항으로 두 수의 곱이 일정한 특징을 지닐 때 합이 주어지는 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 두 수의 곱이 6의 배수가 되는 경우의 수를 잘 세는 것이 중요하다.

나. 두 수의 곱이 6의 배수가 되는 경우에서 합이 7이 되는 경우를 찾는다.

다. 두 수의 곱이 6의 배수가 되는 경우를 빠뜨리지 않고 잘 나열하면 개수를 세는 것만으로 쉽게 정답을 찾을 수 있다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016년 수능특강 확률과통계 66쪽 1번

한 개의 동전과 한 개의 주사위를 차례로 던지는 시행에서 동전의 앞면이 나왔을 때, 주사위는 6의 약수의 눈이 나올 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능특강 확률과통계 68쪽 2번

한 개의 동전과 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 4회 반복할 때 동전의 뒷면이 나온 횟수를 a, 주사위 두 눈의 차가 1 이하인 횟수를 b라 하자. 두 수 a, b가 $3a+b \leq 4$를 만족시킬 확률이 $\dfrac{k}{16 \times 9^3}$일 때, k의 값은?

① 1225 ② 1226 ③ 1227 ④ 1228 ⑤ 1229

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016년 수능완성 수학가형 84쪽 37번

두 사건 A, B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(B \mid A^C)=\frac{3}{4},\ \mathrm{P}(A \cup B)=\frac{5}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A \cap B)$ 의 값은? (단, A^C 은 A 의 여사건이다.)

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

풀 이

Ⅸ. 통계

기출 문항 분석

이 단원에서는 이산확률변수와 연속확률변수의 확률분포를 이용하여 평균, 분산, 표준편차를 구하고, 확률분포를 이용하여 확률을 구하는 문제가 자주 출제되고 있다. 이산 확률분포인 이항분포와 연속확률분포인 정규분포의 정의와 기본 성질을 정확하게 이해 하고 이를 적용할 수 있어야 한다.

주로 표준정규분포표를 이용하여 문제를 해결하는 경우가 많은데, 각 경우에 대해 구분하여 정리해 두어야 한다. 즉, 정규분포에서 표준화하여 표준정규분포표를 이용하는 경우와 이항분포에서 정규분포로 근사화하여 표준정규분포를 이용하는 경우, 마지막으로 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출할 때 표본평균의 확률분포를 찾아 표준정규분포표를 이용하는 경우이다. 주로 실생활 문제가 많이 나오므로 문제를 정확하게 이해하고 각 상황에 맞게 연습을 해 두는 것이 좋을 것이다.

출제경향포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2013수능. 가형. 13번	정규분포에서 주어진 조건을 이용하여 표준정규분포표에서 확률을 구하는 문제(정답형 3점)
2013수능. 가형. 25번	정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 추출하였을 때 주어진 신뢰도와 신뢰구간을 이용하여 다른 신뢰도의 신뢰구간을 구하는 문제(단답형 3점)
2014수능. B형. 16번	확률밀도함수의 성질을 이용하여 주어진 평균에 대해 확률밀도함수를 구하는 문제(정답형 4점)
2014수능. B형. 26번	표본비율을 이용하여 95%의 신뢰도로 추정한 신뢰구간의 조건을 만족하는 모비율을 추론하는 문제(단답형 4점)
2015수능. B형. 11번	정규분포에서 주어진 조건을 이용하여 표준정규분포표에서 확률을 구하는 문제(단답형 3점)
2015수능. B형. 18번	확률변수 X에 대한 확률분포를 구한 다음, 이를 이용하여 표본평균을 이루는 각각의 경우의 확률을 구하여 더하는 문제(단답형 4점)
2016수능. B형. 18번	두 집단에서의 표분평균의 확률과 표준정규분포표를 이용하여 한 표본평균의 확률을 구하는 문제(단단형 4점)
2016수능. B형. 24번	확률변수의 정의역에서 확률민도함수의 면적이 1 임을 이용하여 상수값을 구하는 문제(단답형 3점)

24 이산확률분포

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 80쪽 2번

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다. $\mathrm{E}(X)=-\frac{1}{4}$ 일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

X	-1	0	1	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	a^2	1

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

EBS 문항 분석

가. 확률분포는 보통 확률질량함수 또는 확률분포표로 나타낸다. 따라서 확률질량함수와 확률분포는 서로 다르지 않으므로 확률분포표에서도 확률질량함수의 성질이 성립한다.

나. 확률변수 X의 평균(기댓값)을 이용하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률분포표

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$0 \le p_i \le 1$, $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ (단, $i=1, 2, \cdots, n$)

나. 기댓값과 분산

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i,\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2,\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 81쪽 3번

확률변수 X의 확률질량함수가 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{25}\mathrm{C}_x\,p^x(1-p)^{25-x}\quad(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 25)$$

확률변수 X의 평균이 5일 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값은? (단, $0<p<1$이다.)

① 27 ② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35

EBS 문항 분석

가. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(25,\ p)$을 따른다.

나. X가 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때 사용하는 계산식을 이용해 평균과 분산을 구한 후, 확률변수 X의 분산 계산식을 변형하여 문제를 풀어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$, $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

나. 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따른다. 이 때 $X=r$일 확률은 $\mathrm{P}(X=r)={}_nC_rp^rq^{n-r}\,(q=1-p)$이다.

다. X가 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르면 $\mathrm{E}(X)=np$, $\mathrm{V}(X)=npq$, $\sigma(X)=\sqrt{npq}\,(q=1-p)$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 89쪽 5번

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(nX+3)=17$일 때, $\mathrm{V}(nX+3)$의 값은? (단, n은 상수이다.)

① 28　② 30　③ 32　④ 34　⑤ 36

EBS 문항 분석

가. 확률분포는 확률질량함수 또는 확률분포표로 나타낸다. 따라서 확률질량함수와 확률분포는 서로 다르지 않으므로 확률분포표에서도 확률질량함수의 성질이 성립한다.

나. 확률변수 X의 평균(기댓값)과 분산을 이용하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률분포표

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$0 \le p_i \le 1,\ p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ (단, $i=1, 2, \cdots, n$)

나. 기댓값과 분산

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i,\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2,\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 90쪽 9번

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르고 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다고 한다. $\mathrm{V}(Y+5)>\mathrm{V}(2\mathrm{X})$가 성립하도록 하는 n의 최솟값은?

① 43 ② 44 ③ 45 ④ 46 ⑤ 47

EBS 문항 분석

가. $\mathrm{V}(X)$와 $\mathrm{V}(Y)$를 구해야 한다.

나. 두 확률변수 X, Y의 분산을 구한 후, 부등식을 이용하여 자연수 n의 값을 정할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. X가 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르면 $\mathrm{E}(X)=np$, $\mathrm{V}(X)=npq$, $\sigma(X)=\sqrt{npq}\,(q=1-p)$

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016년 수능특강 79쪽 9번 변형

확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)={}_{100}C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{100-x}\quad(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$$

일 때, 확률변수 X에 대하여 $E(2X-4)+V(2X+3)$의 값을 구하여라.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2

2016년 수능특강 82쪽 3번 변형

확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)=a+(-1)^x b \quad (x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 20)$$

이다. 확률변수 X의 기댓값이 $E(X)=12$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

풀 이

2016수능대비 EBS연계 예상문항3 2016년 수능완성 88쪽 3번 변형

5개의 제품 중에 3개의 불량품이 들어 있다. 이 중에서 2개의 제품을 꺼낼 때, 불량품의 개수를 확률변수 X라고 한다. X의 표준편차를 구하여라.

풀 이

2016수능대비 EBS연계 예상문항4 2016년 수능완성 90쪽 7번 변형

어느 공장의 제품은 4개 중 1개의 비율로 불량품이 있다고 한다. 또, 이 제품을 포장하는 상자는 5개 중 1개의 비율로 불량품이 있다고 한다. 한 상자에 제품을 2개씩 넣어 400상자를 만들 때, 제품과 포장 상자 모두 합격품인 상자의 개수를 확률변수 X라 하자. 이때, X의 분산을 구하시오.

풀 이

25 연속확률분포

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 89쪽 6번

어느 고등학교 학생의 하루 물 섭취량은 평균이 1300, 표준편차가 100인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 중 임의로 택한 1명의 하루 물 섭취량이 1450 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?
(단, 물 섭취량의 단위는 mL이다.)

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
④ 0.1587 ⑤ 0.3413

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

EBS 문항 분석

가. 하루 물 섭취량을 확률변수 X라 두고 정규분포를 이용하여 푸는 문제이다.
나. 확률분포 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1300, 10^2)$를 따름을 파악하고 이를 표준정규분포로 변환하여 이용한다.

다시 보는 개념 !!

가. X를 표준화한 확률변수 $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2 2016년 수능특강 93쪽 1번

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 6$이고, 확률변수 X와 그 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3+x)=f(3-x)$

(나) $0 \le x \le 3$인 실수 x에 대하여 $\mathrm{P}(x \le X \le 3)=a-\dfrac{x^2}{18}$

$\mathrm{P}(2 \le X \le 5)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{13}{18}$ ③ $\dfrac{7}{9}$ ④ $\dfrac{5}{6}$ ⑤ $\dfrac{8}{9}$

EBS 문항 분석

가. 확률밀도함수의 대칭성과 확률값을 이용하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. 연속확률변수 X가 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 값을 가질 때, X에 대한 확률분포를 나타내는 함수 $f(x)$가 확률밀도함수이면 다음 성질을 만족시킨다.

① $f(x)$의 정의역 $\alpha \le x \le \beta$에서 $f(x) \ge 0$

② $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=1$

③ $\mathrm{P}(a \le X \le b)=\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)dx$ (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 수학가형 94쪽 21번

어느 아파트 주민들이 일주일 동안 운동하는 시간은 평균이 98분, 표준편차가 a분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 아파트의 주민 중 임의로 1명을 선택할 때, 이 사람이 일주일 동안 운동하는 시간이 96분 이상 100분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하면 0.383이다. 상수 a의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

EBS 문항 분석

가. 일주일 동안 운동하는 시간을 확률변수 X라 두고 정규분포를 이용하여 푸는 문제이다.

나. 확률변수 X는 정규분포 $N(98, a^2)$를 따름을 파악하고 이를 표준정규분포로 변환하여 이용한다.

다시 보는 개념 !!

가. X를 표준화한 확률변수 $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4 2016년 수능완성 수학가형 91쪽 12번

구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하자.

함수 $f(x)$가 $0 \le x \le 2$일 때, $f(2-x)=f(2+x)$를 만족시킨다. $\mathrm{P}(0 \le X \le 1)=\dfrac{1}{6}$일 때,

$\mathrm{P}(2 \le X \le 3)$의 값은?

① $\dfrac{1}{12}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{12}$

EBS 문항 분석

가. 확률밀도함수의 대칭성과 확률값을 이용하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. 연속확률변수 X가 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 값을 가질 때, X에 대한 확률분포를 나타내는 함수 $f(x)$가 확률밀도함수이면 다음 성질을 만족시킨다.

① $f(x)$의 정의역 $\alpha \le x \le \beta$에서 $f(x) \ge 0$

② $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1$

③ $\mathrm{P}(a \le X \le b) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(x)dx$ (단, $\alpha \le a \le b \le \beta$)

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 B형 문제 24번

닫힌구간 $[0, 1]$의 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=kx(1-x^3) \qquad (0 \le x \le 1)$$

일 때, $24k$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) (3점)

EBS 교재 2015 수능완성 적분과 통계 157쪽 10번

$0 \le x \le 2$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=1+ax$로 주어질 때, 상수 a의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형

나. 기출문제와 EBS문제 모두 연속확률변수의 확률밀도함수의 성질을 묻는 문제이다.
확률밀도함수가 항상 0보다 크거나 같다는 성질과 확률밀도함수 아래쪽의 면적이 1임을 이용하여 풀이한다.

문항풀이 Point !!

가. 연속확률변수 X가 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 값을 가질 때, X에 대한 확률분포를 나타내는 함수 $f(x)$가 확률밀도함수이면 다음 성질을 만족시킨다.

① $f(x)$의 정의역 $\alpha \le x \le \beta$에서 $f(x) \ge 0$

② $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1$

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 28번

어느 실험실의 연구원이 어떤 식물로부터 하루 동안 추출하는 호르몬의 양은 평균이 30.2 mg, 표준편차가 0.6 mg 인 정규분포를 따른다고 한다. 어느 날 이 연구원이 하루 동안 추출한 호르몬의 양이 29.6 mg 이상이고 31.4 mg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.6247 ④ 0.7745 ⑤ 0.8185

EBS 교재 2016 수능특강 확률과통계 89쪽 유제6

어느 고등학교 학생의 하루 물 섭취량은 평균이 1300, 표준편차가 100 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 중 임의로 택한 1명의 하루 물 섭취량이 1450 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 물 섭취량의 단위는 mL이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
④ 0.1587 ⑤ 0.3413

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 축소・확대・변형

나. 정규분포를 따르는 확률변수 X를 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$를 이용하여 표준화한 뒤 확률을 구하는 동일한 유형의 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 정규분포 $N(m, \sigma)$를 따르는 확률변수 X의 표준화된 변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$는 정규분포 $N(0, 1)$를 따른다.

나. 표준정규분포곡선은 평균 0을 중심으로 좌우대칭이다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1

2016년 수능특강 92쪽 1번 변형

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ \dfrac{1}{3} & (1 \leqq x \leqq 3) \\ \dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}x & (3 \leqq x \leqq 4) \end{cases}$

일 때, $\mathrm{V}(\sqrt{6}X)$의 값을 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능특강 92쪽 3번 변형

확률변수 X가 정규분포 $N(10,\,4^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(t-4 \leqq X \leqq t+6)$이 최대가 되는 실수 t의 값을 구하시오.

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3

2016년 수능완성 95쪽 23번 변형

수직선의 원점 위에 말이 놓여있다. 주사위를 한 번 던져서 짝수의 눈이 나오면 양의 방향으로 2만큼, 홀수의 눈이 나오면 음의 방향으로 1만큼 말을 움직이는 게임을 하려고 한다. 주사위를 100번 던졌을 때, 말의 위치가 80 이상일 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

풀 이

26 통계적 추정

2017수능대비 EBS 대표 예제 1 2016년 수능특강 101쪽 6번

어느 공장에서 생산하는 전구의 수명은 모평균이 m시간, 모표준편차가 100시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 전구의 수명을 추정하기 위하여 크기가 n인 표본을 임의추출하여 얻은 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a \le 19.6$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오,
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

EBS 문항 분석

가. 모집단에서 임의추출한 표본평균 $\overline{X}$의 분포를 통해 모평균 등을 추측하는 것으로 보통 모평균의 값보다는 모평균이 속하는 범위를 추정한다.

나. 신뢰도 : 표본평균 $\overline{X}$를 통해 추정한 결과에 실제 모평균의 값이 포함되어 있을 확률

다시 보는 개념 !!

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본의 표본평균이 $\overline{X}$일 때, 모평균 m의 범위(신뢰구간)는 신뢰도에 따라 다음과 같이 정해진다.

가. 신뢰도 95% -> $\overline{X}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

나. 신뢰도 99% -> $\overline{X}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

2016년 수능특강 108쪽 2번

어느 통조림 공장에서 생산하는 통조림 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고,

$\mathrm{P}(|X-m| \le 9) = 0.9974$,

$\mathrm{P}(X \le 153) = 0.8413$

을 만족시킨다. 이 공장에서 생산하는 통조림 중에서 임의추출한 9개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \ge 153)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 0.0013 ② 0.0026 ③ 0.0124 ④ 0.0456 ⑤ 0.1336

EBS 문항 분석

가. 모집단이 정규분포를 이루면 표본평균도 정규분포를 이룸을 이용하는 문제이다.

나. 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$의 $\mathrm{E}(\overline{X}) = m$, $\mathrm{V}(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$이다. 이때 $\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$를 Z로 놓고

확률변수 $\overline{X}$를 표준화시켜서 문제를 푼다.

다시 보는 개념 !!

평균이 m, 분산이 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때

가. 모집단의 분포가 정규분포이면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \dfrac{\sigma^2}{n})$을 따른다.

나. 모집단의 분포가 정규분포가 아니더라도 표본의 크기 n이 충분히 크면, 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m, \dfrac{\sigma^2}{n})$을 따른다.

$\Rightarrow$ 이때 표본평균 $\overline{X}$를 표준화시켜 $\mathrm{P}(a \le \overline{X} \le b)$ 등의 확률을 구할 수 있다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

2016년 수능완성 99쪽 37번

어느 자동차 회사에서 개발한 신형 자동차의 연비는 모표준편차가 5인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 개발한 신형 자동차 중 n대를 임의추출하여 신뢰도 99%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a \le 2$가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은? (단, 연비의 단위는 km/L이고 Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.58) = 0.495$로 계산한다.)

① 163 ② 165 ③ 167 ④ 169 ⑤ 171

EBS 문항 분석

가. 모집단에서 임의추출한 표본평균 $\overline{X}$의 분포를 통해 모평균 등을 추측하는 것으로 보통 모평균의 값보다는 모평균이 속하는 범위를 추정한다.

나. 신뢰도 : 표본평균 $\overline{X}$를 통해 추정한 결과에 실제 모평균의 값이 포함되어 있을 확률

다시 보는 개념 !!

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본의 표본평균이 $\overline{X}$일 때, 모평균 m의 범위(신뢰구간)는 신뢰도에 따라 다음과 같이 정해진다.

가. 신뢰도 95% -> $\overline{X} - 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

나. 신뢰도 99% -> $\overline{X} - 2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + 2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

2016년 수능완성 97쪽 29번

어떤 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고 이 정규분포의 확률밀도함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(50-x)$를 만족시킨다. 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(X\le 19)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge 27)$이 성립할 때, $\mathrm{P}(24\le \overline{X}\le 26)$의 값을 오른쪽 표준정규분포를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
0.75	0.2734
1.0	0.3413
1.25	0.3944

① 0.3830 ② 0.4649 ③ 0.5468 ④ 0.6826 ⑤ 0.7357

EBS 문항 분석

가. 모집단이 정규분포를 이루면 표본평균도 정규분포를 이룸을 이용하는 문제이다.

나. 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$의 $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$이다. 이때 $\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$를 Z로 놓고 확률변수 $\overline{X}$를 표준화시켜서 문제를 푼다.

다시 보는 개념 !!

평균이 m, 분산이 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때

가. 모집단의 분포가 정규분포이면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

나. 모집단의 분포가 정규분포가 아니더라도 표본의 크기 n이 충분히 크면, 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

$\Rightarrow$ 이때 표본평균 $\overline{X}$를 표준화시켜 $\mathrm{P}(a\le \overline{X}\le b)$ 등의 확률을 구할 수 있다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2016학년도 대수능 B형 문제 18번

정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 8^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(75,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \le 53) + \mathrm{P}(\overline{Y} \le 69) = 1$일 때, $\mathrm{P}(\overline{Y} \ge 71)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (4점)

① 0.8413 ② 0.8644 ③ 0.8849 ④ 0.9192 ⑤ 0.9452

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.2	0.3849
1.4	0.4192
1.6	0.4452

EBS 교재 2015 수능완성 적분과 통계 132쪽 2번

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(|\overline{X}-m| > 3) < 0.0456$을 만족시키는 n의 최솟값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.4772$로 계산한다.)

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항의 변형

나. 기출문제와 EBS문제 모두 표본평균의 성질을 묻는 문제이다.
모집단이 정규분포를 이루면 표본평균도 정규분포를 이룸을 이용하여야 한다.

문항풀이 Point !!

크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$의 $\mathrm{E}(\overline{X}) = m$, $\mathrm{V}(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$이다. 이때 $\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$를 Z로 놓고 확률변수 $\overline{X}$를 표준화시켜서 문제를 푼다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 9월 모의평가 수학가형 28번

어느 고등학교에서 대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율을 알아보기 위하여 이 고등학교 학생 중 n명을 임의추출하여 조사한 결과 50%의 학생이 대중교통을 이용하여 등교하는 것으로 나타났다. 이 결과를 이용하여 구한 이 고등학교 전체 학생 중에서 대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le p \le b$이다. $b-a=0.14$일 때, n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

EBS 교재 2016 수능특강 확률과통계 108쪽 4번

어느 제과회사에서 새로 출시한 A제품에 대한 평가를 임의로 택한 n명을 대상으로 조사한 결과 80%가 만족한다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 얻은 A제품에 만족하는 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le p \le b$일 때, $b-a=0.3136$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.)

EBS 문항 분석

가. 연계유형 – 문항의 축소 · 확대 · 변형
나. 제품에 대한 만족도가 대중교통을 이용하는 비율로 바뀌었으나 표본비율을 이용하여 모비율에 대한 신뢰구간을 구하고 그 신뢰구간의 길이를 이용하여 표본의 크기 n을 구하게 하는 같은 유형의 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. 표본비율과 모비율의 관계를 이해할 수 있어야 한다.
나. 표본비율을 이용하여 모비율에 대한 신뢰구간을 구해보고 신뢰구간의 길이를 구한다.

EBS연계 예상문항

2017수능대비 EBS연계 예상문항1 2016년 수능특강 107쪽 5번 변형

평균이 m, 표준편차가 2인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의로 추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대한 확률 $\mathrm{P}\left(\overline{X} \le 1.64 \times \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$를 $f(m)$이라 하자. 표준정규분포표를 이용하여 $f(0)+f(0.8) \le 0.97$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.28	0.40
1.64	0.45
1.96	0.48

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항2 2016년 수능특강 101쪽 5번 변형

어느 동호회의 회원의 나이는 표준편차가 5세인 정규분포를 따른다고 한다. 이 동호회의 회원 중에서 100명을 임으로 뽑아 조사한 평균 나이가 28세일 때, 전체 회원의 평균 나이 m의 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구하시오. (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$)

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항3 2016년 수능완성 101쪽 41번 변형

어떤 모집단에서 임의로 100명을 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{10}-c,\ \frac{1}{10}+c\right]$ 이었다. 같은 모집단에서 n명을 임의로 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{9}-s(n),\ \frac{1}{9}+s(n)\right]$ 이고, $s(n)=\frac{50}{81}c$ 일 때, n의 값을 구하여라. (단, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$)

풀 이

2017수능대비 EBS연계 예상문항4

2016년 수능완성 99쪽 36번 변형

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이가 l이다. 신뢰구간의 길이를 $\dfrac{l}{k}$로 하기 위한 표본의 크기를 $f(k)$라 할 때, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{f(1)}+\sqrt{f(2)}+\cdots+\sqrt{f(10)}\right\}$의 값을 구하여라.
(단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.58)=0.495$)

풀 이

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

01. 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ②

지수함수 $y=a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y-c=a^{x-b}$ ……㉠

함수 ㉠의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는 함수 ㉠의 역함수와 같다.

㉠에 x 대신 y 를, y 대신 x 를 대입하면

$x-c=a^{y-b}$

즉, $y-b=\log_a(x-c)$ 이므로

$y=\log_a(x-c)+b$

따라서 $f(x)=\log_a(x-c)+b$ 이므로

$$\begin{aligned} f(a^2+c)-b &= \log_a(a^2+c-c)+b-b \\ &= \log_a a^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 12

곡선 $y=3\times2^{x-2}$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식은

$x=3\times2^{y-2}$

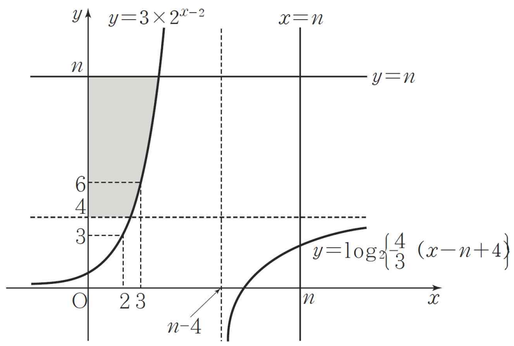
$2^{y-2}=\dfrac{x}{3}$

$y=\log_2\dfrac{x}{3}+2$

$\therefore\ y=\log_2\dfrac{4}{3}x$

곡선 $y=\log_2\left\{\dfrac{4}{3}(x-n+4)\right\}$ 는 곡선 $y=\log_2\dfrac{4}{3}x$ 를 x 축의 방향으로 $(n-4)$ 만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=\log_2\left\{\dfrac{4}{3}(x-n+4)\right\}$, x 축 및 직선 $x=n$ 으로 둘러싸인 도형은 곡선 $y=3\times2^{x-2}$, y 축 및 직선 $y=4$ 로 둘러싸인 도형과 합동이다.

따라서 $a-b$ 의 값은 다음 그림의 색칠된 부분(경계 중 직선 $y=4$ 는 제외)에 포함된 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.



$f(x)=3\times2^{x-2}$ 이라 하고 위 그림의 색칠한 부분에 포함된 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점 중에서 y 좌표가 k(k 는 5 이상의 정수)인 점의 개수를 $g(k)$ 라 하면 $f(2)=3$, $f(3)=6$, $f(4)=12$, $f(5)=24$ 이므로

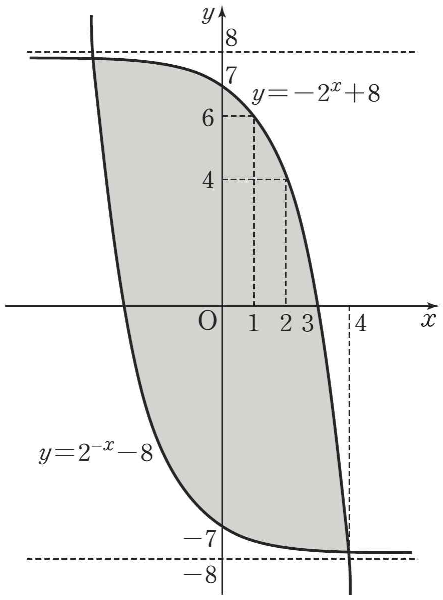
$$g(k)=\begin{cases} 3 & (k=5) \\ 4 & (6\le k\le 11) \\ 5 & (12\le k\le 23) \\ \vdots & \quad\vdots \end{cases}$$

$\displaystyle\sum_{k=5}^{12}g(k)=3+4\times6+5=32$ 이므로 $n=12$.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

두 곡선 $y=-2^x+8$, $y=2^{-x}-8$ 은 원점에 대하여 대칭이다.



두 곡선으로 둘러싸인 영역에서 $x>0$ 인 영역의 점 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은

$(1,\ 6),\ (1,\ 5),\ \cdots,\ (1,\ -7)$

$(2,\ 4),\ (2,\ 3),\ \cdots,\ (2,\ -7)$

$(3,\ 0),\ (3,\ -1),\ \cdots,\ (3,\ -7)$

이므로 그 개수는 $14+12+8=34$

두 곡선이 원점에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 영역에서 $x<0$ 인 영역의 점 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수도 34 이다.

또 두 곡선으로 둘러싸인 영역에서 y 축 위의 점 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은

$(0,\ 7),\ (0,\ 6),\ \cdots,\ (0,\ -7)$

의 15 개이다.

따라서 구하는 점의 개수는 $34\times2+15=83$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

$y=(g\circ f)(x)=-2\log_3 x-2a+3$

닫힌 구간 $[1,\ 27]$ 에서 함수 $y=(g\circ f)(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $-2a+3$ 을 가지므로

$-2a+3=9,\ a=-3$

즉, $(g\circ f)(x)=-2\log_3 x+9$ 이므로

$x=27$ 에서 최솟값 3 을 가진다. 따라서 $m=3$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ②

$\dfrac{W}{W_0}=\dfrac{1}{2}\times10^{at}(1+10^{at})$

$3=\dfrac{1}{2}\times10^{15a}(1+10^{15a})$

$10^{15a}=t\,(>0)$라 놓으면

$t^2+t-6=0$ 이고

$\therefore t=2$

따라서 $10^{30a}=t^2=4$ 이므로

$k=\dfrac{1}{2}\times10^{30a}(1+10^{30a})$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times4\times(1+4)$

$\quad=10$

EBS교재

[정답] ①

$P=440\times k^{n-49}$ 에서

$n=13$ 일 때 $P=55$ 이므로

$55=440\times k^{13-49}$

$k^{-36}=\dfrac{55}{440}=\dfrac{1}{8}$

$k^{36}=2^3$

$\therefore\ k=2^{\frac{3}{36}}=2^{\frac{1}{12}}\,(\because k>1)=\sqrt[12]{2}$

$\therefore\ P=440\times(\sqrt[12]{2})^{n-49}$

피아노 건반의 1 옥타브에서 ‘미’ 음이 가장 왼쪽으로부터 m 번째 건반이라 하면 ‘올림라’ 음은 $(m+6)$ 번째 건반이므로

$P_1=440\times(\sqrt[12]{2})^{m-49}$

$P_2=440\times(\sqrt[12]{2})^{m+6-49}$

$\therefore\ \dfrac{P_2}{P_1}=\dfrac{440\times(\sqrt[12]{2})^{m+6-49}}{440\times(\sqrt[12]{2})^{m-49}}=(\sqrt[12]{2})^6$

$\quad=\sqrt{2}$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ③

i) 진수조건에 의해 $x-1>0,\ 4x-7>0$ 이므로 $x>\dfrac{7}{4}$ 이다.

ii) 부등식 $\log_3(x-1)+\log_3(4x-7) \le 3$ 에서

$\log_3(x-1)(4x-7) \le \log_3 27$

$(x-1)(4x-7) \le 27$

$4x^2-11x-20=(x-4)(4x+5) \leqq 0$

이다. 따라서 $-\frac{5}{4} \le x \le 4$ 이다.

i) ii) 에 의해 $\frac{7}{4} < x \le 4$ 이고 만족하는 정수 x 는 2, 3, 4 로 3 개 이다.

EBS교재

[정답] 7

$\log_2(4-a)+\log_2(9-b)=\log_2(4-a)(9-b)$

이므로 두 자연수 a, b에 대하여 $4-a>0$, $9-b>0$이고 $0<(4-a)(9-b)<36$이다.

$\log_2(4-a)(9-b)$가 자연수가 되기 위해 가능한 $(4-a)(9-b)$의 값은 $2, 4, 8, 16, 32$이다.

i) $(4-a)(9-b)=2$일 때,

$4-a=2, 9-b=1$ 또는 $4-a=1, 9-b=2$ 로 두 가지 모두 가능하므로 가능한 순서쌍 (a, b)의 개수는 2개이다.

ii) $(4-a)(9-b)=4$일 때,

$4-a=2, 9-b=2$ 또는 $4-a=1, 9-b=4$ 는 가능하지만 $4-a=4, 9-b=1$은 a가 자연수라는 조건을 만족시키지 못하므로 불가능하다. 따라서 가능한 순서쌍 (a, b)의 개수는 2개이다.

iii) $(4-a)(9-b)=8$일 때,

$4-a=1, 9-b=8$ 또는 $4-a=2, 9-b=4$ 는 가능하지만 $4-a=4, 9-b=2$ 또는 $4-a=8, 9-b=1$은 a, b가 자연수라는 조건을 만족시키지 못하므로 불가능하다. 따라서 가능한 순서쌍 (a, b)의 개수는 2개이다.

iv) $(4-a)(9-b)=16$일 때,

$4-a=2, 9-b=8$만 가능하기 때문에 가능한 순서쌍 (a, b)의 개수는 1개이다.

v) $(4-a)(9-b)=32$일 때,

만족하는 a, b가 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)는 모두 $2+2+2+1=7$개다.

EBS연계 기출문항 3

[정답] 4

$3^{-x+2}=\frac{1}{9}$

$3^{-x+2}=3^{-2}$

$-x+2=-2$

$x=4$

EBS교재

[정답] ②

$4^x-18 \cdot 2^x+32<0$ 에서 $2^x=t\,(t>0)$라 하면 $t^2-18t+32<0$

$(t-2)(t-16)<0$

$\therefore 2<t<16$

즉, $2<2^x<16$ 이므로 $1<x<4$

$\therefore \beta-\alpha=3$

EBS연계 기출문항 4

[정답] 25

로그의 진수조건에 의해

$y=\log_2(x+5)$는 $x>-5$ 에서 정의되므로

점근선의 방정식은 $x=-5$이다.

따라서 $k^2=(-5)^2=25$ 이다.

EBS교재

[정답] ②

곡선 $y=2-\log_2(ax+b)$가 점 (2, 2)를 지나므로 $2=2-\log_2(2a+b)$

$\therefore \log_2(2a+b)=0$

$2a+b=1$ ……㉠

곡선 $y=2-\log_2(ax+b)$,

즉 $y=2-\log_2 a\left(x+\frac{b}{a}\right)$의 점근선이 $x=-1$

이므로 $-\frac{b}{a}=-1$ 즉, $a=b$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=b=\frac{1}{3}$ 이므로 $a+b=\frac{2}{3}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 3

$2n - \log_2(4^n + 1 - x) \le \log_2 x$ 에서

$$\log_2 \frac{4^n}{4^n + 1 - x} \le \log_2 x$$

밑이 1 보다 크므로

$4^n \le x(4^n + 1 - x)$

$(x-1)(x-4^n) \le 0$ 이므로 $1 \le x \le 4^n$

따라서 정수 x 의 개수는 4^n 이다.

그러므로 $4^n = 64$ 에서 $n = 3$ 이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

$n = a^x$ 일 때, $x = \log_a n$

$n+1 = a^x$ 일 때, $x = \log_a(n+1)$ 이므로

$A_n(\log_a n,\ n)$, $A_{n+1}(\log_a(n+1),\ n+1)$

$$S_n = \{\log_a(n+1) - \log_a n\}(n+1-n)$$
$$= \log_a \frac{n+1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{31}(S_n - S_{n+1}) = \sum_{n=1}^{31}\left(\log_a \frac{n+1}{n} - \log_a \frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{31}\left(\log_a\left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2}\right)\right)$$
$$= \log_a\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{32}{33}\right)$$

즉, $\log_a \frac{64}{33} = 2$ 이므로 $a^2 = \frac{64}{33}$ 이다.

따라서 $a = \frac{8\sqrt{33}}{33}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 3

$2^x = t$ 라 하면

$y = (t-4)^2 + 3$ 이고 $1 \le t \le 8$ 이므로

최솟값은 3 이다.

02. 지수함수와 로그함수의 도함수

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

함수 $f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e-2h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(e+h)-f(e)}{h} - \frac{f(e-2h)-f(e)}{h}\right\}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(e+h)-f(e)}{h} + \frac{f(e-2h)-f(e)}{-2h}\times 2\right\}$$
$$= f'(e) + 2f'(e)$$
$$= 3f'(e)$$

$f(x) = x\ln x - x$ 에서

$$f'(x) = (x\ln x - x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' - (x)'$$
$$= \ln x + \frac{x}{x} - 1$$
$$= \ln x$$

이므로 구하는 값은

$3f'(e) = 3\times \ln e = 3$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$

즉, $\lim_{x\to 1+}(\ln x + a) = \lim_{x\to 1-}(ae^x + b) = f(1)$

$a = ae + b$ ……㉠

또, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\frac{(\ln x + a) - (ae+b)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1+}\frac{(\ln x + a) - a}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1+}\frac{\ln x}{x-1}$$

$g(x) = \ln x$ 로 놓으면 $g(1)=0$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ 이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(ae^x+b)-(ae+b)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{ae^x-ae}{x-1}$$

$h(x)=ae^x$ 으로 놓으면

$h(1)=ae$, $h'(x)=ae^x$ 이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)=ae$$

$\displaystyle\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 에서

$1=ae$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$a=\dfrac{1}{e}$, $b=a-ae=\dfrac{1}{e}-1$

따라서

$$a+b=\frac{1}{e}+\left(\frac{1}{e}-1\right)=\frac{2}{e}-1$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 27

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{a^{2x}-1}{2x}\times\frac{3x}{\log_a(1+3x)}\times\frac{2}{3}\right\}=6(\ln3)^2$$

즉, $\dfrac{2}{3}(\ln a)^2=6(\ln3)^2$

$\ln a=3\ln3=\ln27$ 이므로 $a=27$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=e^{\frac{b}{a}}=\sqrt{e}$ 에서 $a=2b$

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{1}{b}+h\right)-f\left(\frac{1}{b}-3h\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{1}{b}+h\right)-f\left(\frac{1}{b}\right)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{1}{b}-3h\right)-f\left(\frac{1}{b}\right)}{h}$$

$$=f'\left(\frac{1}{b}\right)+3f'\left(\frac{1}{b}\right)=8e+8$$

따라서 $f'\left(\dfrac{1}{b}\right)=2e+2$

그런데 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+b(e^b)^x$ 이므로

$$\frac{1}{\frac{1}{b}}+b(e^b)^{\frac{1}{b}}=2e+2$$

즉, $b(e+1)=2(e+1)$ 이므로 $b=2$

따라서, $a=4$ 이므로 $a+b=6$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ②

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{3x}=\frac{5}{3}\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{5x}=\frac{5}{3}$$

EBS교재

[정답] ②

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times3}$$

이때 $2x=t$, $3x=s$ 로 놓으면 $x\to0$일 때, $t\to0$, $s\to0$ 이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}=\lim_{s\to 0}\frac{\ln(1+s)}{s}=1$$

이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)}=\frac{2}{3}\times\frac{\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ②

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}=2f'(3)$$

이다. $f(x)=\log_3 x$에서 $f'(x)=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{1}{x}$이므로

$$2f'(3)=\frac{2}{3\ln 3}$$

이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ①

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{-x}{1-x}}$$

이때 $\frac{1-x}{x}=t$라 하면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-1}=\frac{1}{e}$$

한편,

$$\lim_{x\to 1}f(2-x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2-x}\right)^{\frac{2-x}{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{2-x}\right)^{\frac{x-2}{x-1}}$$

이때 $\frac{x-1}{2-x}=t$라 하면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}f(2-x)=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-1}=\frac{1}{e}$$

따라서 $\lim_{x\to 1}f(x)f(2-x)=\frac{1}{e^2}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{18x}{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\cdots+\ln(1+nx)}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}(x+n)=n$$

이때

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{18x}{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\cdots+\ln(1+nx)}$$

$$=\frac{18}{1+2+\cdots+n}=\frac{36}{n(n+1)}$$

따라서 $\frac{36}{n(n+1)}=n$에서 $n=3$이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 4

$g(x)=f'(x)$으로부터 $g(x)=anx^{n-1}$

$g'(x)=an(n-1)x^{n-2}$

그런데 $\{g(x)\}^2=\{g'(x)\}^3$이므로 양변의 차수를 비교하면

$2(n-1)=3(n-2)$에서 $n=4$,

즉 $f(x)=ax^4$ 이다.

또 $\{g(x)\}^2=\{g'(x)\}^3$ 에서

$(4ax^3)^2=(12ax^2)^3$ 이므로

$4^2a^2=12^3a^3$

$a=\frac{1}{108}$이므로 $f'(x)=g(x)=\frac{1}{27}x^3$이고

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(6+h)-g(6)}{h}=g'(6)\text{에서}$$

$$g'(6)=\frac{1}{9}\times 6^2=4$$

Ⅱ. 삼각함수와 삼각함수의 도함수

01. 삼각함수의 뜻과 그래프

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 4

직선 $x+2y-3=0$의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이므로

$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$

즉, $\cot\theta=-2$이므로

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{1+\cos(\pi+\theta)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)-\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=-2\cot\theta$$

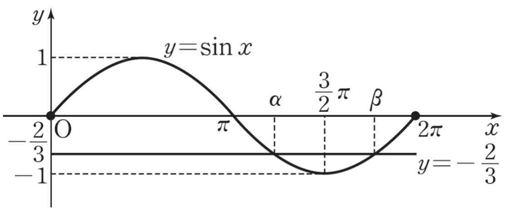
$$=-2\times(-2)$$

$$=4$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

$3\sin x=-2$에서 $\sin x=-\dfrac{2}{3}$이므로 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{2}{3}$를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



$0\le x\le 2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{2}{3}$의 교점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\alpha+\beta=3\pi$, 즉 방정식 $3\sin x=-2$를 만족시키는

모든 x의 값의 합 θ는

$\theta=\alpha+\beta=3\pi$

따라서

$$\cos\theta=\cos 3\pi=\cos(2\pi+\pi)$$
$$=\cos\pi=-1$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 36

원뿔의 모선의 길이는 부채꼴의 반지름의 길이와 같으므로 이를 R라 하면

$R^2=r^2+h^2$

$r:h=5:12$에서

$r=5k$, $h=12k\,(k>0)$으로 놓으면

$R=13k$ 그러므로 $r=\dfrac{5}{13}R$, $h=\dfrac{12}{13}R$

원뿔의 밑면의 둘레의 길이는 부채꼴의 호의 길이와 같으므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$2\pi r=2\pi\times\dfrac{5}{13}R=R\theta$

그러므로 $\theta=\dfrac{10}{13}\pi$

부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{2}R^2\theta=65\pi$에서

$\dfrac{1}{2}R^2\times\dfrac{10}{13}\pi=65\pi$

그러므로 $R=13$

이때 부채꼴의 둘레의 길이는

$2R+R\theta=26+10\pi$

따라서 $a+b=36$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sin^n\theta+\cos^n\theta)$$

$$= \frac{\sin\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta + \cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}$$

여기서 $\sin\theta + \cos\theta = a$라 두면

$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{a^2-1}{2}$ 이므로

$\dfrac{2(a-a^2+1)}{a^2-2a+1} = \dfrac{11}{2}$ 이고 $\quad a > 1$ 이므로

$a = \dfrac{7}{5}$ 이다.

EBS연계 기출문항 1

[정답] ①

□OACB 는 평행사변형이므로

$f(\theta) = 2\times(\triangle OAB$ 의 넓이$)$

$= 2\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta$

$= \sin\theta$

또, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$= (1,0)+(\cos\theta, \sin\theta)$

$= (1+\cos\theta, \sin\theta)$

이므로 $C\,(1+\cos\theta, \sin\theta)$ 이다.

따라서 $g(\theta) = \overline{OC}^2 = 2+2\cos\theta$ 이고

$f(\theta)+g(\theta) = \sin\theta+2+2\cos\theta$

$= \sqrt{5}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\sin\theta + \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta\right)+2$

$= \sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$

(단, $\tan\alpha = \sqrt{2}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$)

그러므로 $f(\theta)+g(\theta)$ 의 최댓값은

$\theta+\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ 일 때

$2+\sqrt{5}$ 이다.

EBS교재

[정답] ①

삼각형 ABD 의 넓이와 삼각형 ADC 의 넓이의 비가 $3:6=1:2$이므로 $\overline{BD} : \overline{DC} = 1:2$이다.

선분 AD 는 $\angle BAC$ 의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 1:2$

따라서 $\overline{AB} = a$라 하면

$\overline{AC} = 2a$

삼각형 ABD 의 넓이가 3이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\dfrac{\theta}{2} = 3$

$\dfrac{1}{2}\times a\times2\times\sin\dfrac{\theta}{2} = 3$

$\therefore\ a\sin\dfrac{\theta}{2} = 3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

삼각형 ABC 의 넓이는 삼각형 ABD 의 넓이와 삼각형 ADC 의 넓이의 합과 같으므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\theta = 3+6$

$\dfrac{1}{2}\times a\times2a\times\sin\theta = 9$

$\therefore\ a^2\sin\theta = 9 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{9}{3^2} = \frac{a^2\sin\theta}{a^2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$1 = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$2\cot\frac{\theta}{2} = 1$$

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2} = 1+\cot^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

따라서 $\operatorname{cosec}^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{5}{4}$에서 $\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{4}{5}$

$$\frac{1-\cos\theta}{2} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \cos\theta = -\frac{3}{5}$$

$\therefore\ \cos2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$= 2\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ①

$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=2$ 를 정리하면

$$\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2$$

$$1+\tan\alpha=2(1-\tan\alpha)$$

$$1+\tan\alpha=2-2\tan\alpha$$

$$3\tan\alpha=1$$

$$\tan\alpha=\frac{1}{3}$$

이다.

EBS교재

[정답] ②

$\cos x=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 x=\frac{1-\cos x}{2}$$

$$2\cos^2 x=1-\cos x$$

$$2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

$$(\cos x+1)(2\cos x-1)=0$$

$$\therefore\ \cos x=-1 \text{ 또는 } \cos x=\frac{1}{2}$$

(i) $\cos x=-1$ 일 때

(좌변) $=-1$, (우변) $=1$

(좌변) $\neq$ (우변) 이므로 $\cos x=-1$ 인 x 의 값은 주어진 방정식을 만족시키지 않는다.

(ii) $\cos x=\dfrac{1}{2}$ 일 때

(좌변) $=\dfrac{1}{2}$, (우변) $=\dfrac{1}{2}$

(좌변) $=$ (우변) 이므로 $\cos x=\dfrac{1}{2}$ 인 x 의 값은 주어진 방정식을 만족시킨다.

주어진 방정식의 한 실근이 α 이므로

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}$$

EBS연계 기출문항 3

[정답] ①

$\cos(x+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 에

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{5}{7}$ 을 대입하면

$$\frac{5}{7}=\frac{4}{7}-x$$

$$x=-\frac{1}{7}$$

이다.

EBS교재

[정답] ④

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{5}{7}$ ······㉠

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{7}$ ······㉡

㉠+㉡에서

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{7}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}\\&=\sqrt{1-\frac{25}{49}}\\&=\frac{2\sqrt{6}}{7}\left(0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\text{ 이므로}\right)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\tan\alpha+\tan\beta&=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\\&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\\&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\\&=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{\frac{4}{7}}\\&=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

EBS연계 기출문항 4

[정답] ④

$2\sin^2 x+3\cos x-3=0$을 변형하면

$$2(1-\cos^2 x)+3\cos x-3=0$$

$$2-2\cos^2 x+3\cos x-3=0$$

이다. $\cos x=t$ $(-1\leq t\leq 1)$라 하면

$-2t^2+3t-1=0$

$2t^2-3t+1=0$

$(2t-1)(t-1)=0$

$t=\frac{1}{2},\ t=1$

이다. $\cos x=\frac{1}{2}$ 일 때, $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$ 이고

$\cos x=1$ 일 때, $x=0$이다.

따라서 모든 근의 합은 $0+\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}=2\pi$이다

EBS교재

[정답] ④

$1+\tan^2 x=\sec^2 x$이므로 $\tan^2 x-2\sec x+1=0$ 에서

$\sec^2 x-2\sec x=0,\ \sec x(\sec x-2)=0$

$\sec x=0$ 또는 $\sec x=2$

(ⅰ) $\sec x=0$에서 $\frac{1}{\cos x}=0$이므로 x의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $\sec x=2$에서 $\frac{1}{\cos x}=2$이므로

$\cos x=\frac{1}{2}$

$0\le x\le 2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=2\pi$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

직선 $\sqrt{3}x-y+2=0$ 의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이므로 $\tan\theta=\sqrt{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin(\pi-\theta)$

$+\cos(\pi+\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta$

$=2\sin\theta=\sqrt{3}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

$2\pi\sin x=-\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$\sin x=-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}$ 이다.

$\sin x=-\frac{3}{4}$ 과 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3\pi}{2}$ 이므로

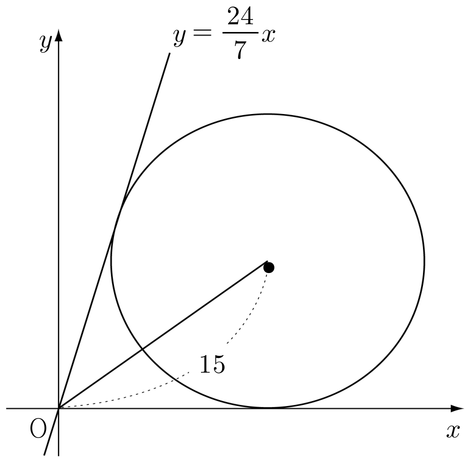
$\alpha+\beta=3\pi$ 이다.

같은 방법으로 하여 모든 근을 다 합하면

$3\pi+3\pi+\pi+\pi=8\pi$ 이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④



$y=\frac{24}{7}x$와 x축의 양의 방향과 이루는 각을 2θ라 하면

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{24}{7}$$

$$\frac{24}{7}(1-\tan^2\theta)=2\tan\theta$$

$$12\tan^2\theta+7\tan\theta-12=0$$

$$\tan\theta=\frac{3}{4}\ (\because\ \tan\theta>0)$$

이다. 그림에서 $\sin\theta=\frac{3}{5}=\frac{r}{15}$

$$5r=45$$

$$\therefore r=9$$

02. 삼각함수의 미분

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다. 즉, $f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$이다.

따라서

$$\begin{aligned}f(0)&=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x\left(e^{2x}-1\right)}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x\left(e^{2x}-1\right)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x\left(e^{2x}-1\right)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x\left(e^{2x}-1\right)(1+\cos x)}{\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2(1+\cos x)\right\}\\&=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)^2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2(1+\cos x)\right\}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)^2\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\lim_{x\to0}2(1+\cos x)\\&=\left(\frac{1}{1}\right)^2\times1\times2(1+1)=4\end{aligned}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하려면 $x=0$과 $x=\pi$에서 미분가능해야 한다.

(ⅰ) $x=0$에서의 미분가능성

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to0-}\left(e^x+bx+c\right)=\lim_{x\to0+}\pi\sin x=0$$

즉, $1+c=0$ ……㉠

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to0-}\frac{\left(e^x+bx+c\right)-0}{x-0}\\&=\lim_{x\to0-}\frac{e^x+bx-1}{x}\\&=\lim_{x\to0-}\frac{e^x-1}{x}+b\\&=1+b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\lim_{x\to0+}\frac{\pi\sin x-\pi\sin0}{x-0}\\&=\pi\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}\\&=\pi\end{aligned}$$

이때 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$의 값이 존재해야하므로

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 어야 한다.

따라서 $1+b=\pi$ ……㉡

(ⅱ) $x=\pi$에서의 미분가능성

함수 $f(x)$가 $x=\pi$에서 미분가능하면 $x=\pi$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to\pi-}f(x)=\lim_{x\to\pi+}f(x)=f(\pi)$$

$$\lim_{x\to\pi-}\pi\sin x=\lim_{x\to\pi+}a(x-\pi)\ln x=0$$

즉, $0=0=0$

$$\begin{aligned}f'(\pi)&=\lim_{x\to\pi-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}\\&=\lim_{x\to\pi-}\frac{\pi\sin x-\pi\sin\pi}{x-\pi}\\&=\lim_{x\to\pi-}\frac{\pi\sin x}{x-\pi}\end{aligned}$$

이때 $x-\pi=t$라 하면

$x\to\pi-$일 때 $t\to0-$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}&=\lim_{t\to0-}\frac{\pi\sin(\pi+t)}{t}\\&=-\pi\times\lim_{t\to0-}\frac{\sin t}{t}\\&=-\pi\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\pi+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi+}\frac{a(x-\pi)\ln x-0}{x-\pi}$$

$= a\ln\pi$

이때 $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$의 값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$$

즉, $-\pi=a\ln\pi$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$a=-\dfrac{\pi}{\ln\pi}$, $b=\pi-1$, $c=-1$

따라서

$$\frac{b-c}{a}=\frac{\pi-1-(-1)}{-\dfrac{\pi}{\ln\pi}}=-\ln\pi$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ⑤

선분 AB 와 선분 PQ 가 만나는 점을 H 라 하자. 삼각형 ABP 는 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로 $\overline{AP}=2\cos\theta$

삼각형 AHP 는 직각삼각형이므로

$\overline{AH}=\overline{AP}\times\cos\theta=2\cos^2\theta$

그러므로 $\overline{BH}=2-2\cos^2\theta$

또한 $\overline{PH}=\overline{AP}\times\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$ 이므로

$\overline{PQ}=2\overline{PH}=4\sin\theta\cos\theta$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{BH}$$

$$=\frac{1}{2}\times4\sin\theta\cos\theta\times(2-2\cos^2\theta)$$

$$=4\sin^3\theta\cos\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0^+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0^+}\frac{4\sin^3\theta\cos\theta}{\theta^3}$$

$$=4$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

$f'(x)=\sin x+x\cos x$ 이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}=f'(\pi)=-\pi$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

따라서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{f'(\pi)}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-\pi$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] 30

점 $P(\cos\theta,\sin\theta)$이므로 점 Q의 y좌표는 $\sin\theta$이다. 따라서 점 Q의 x좌표를 a라 하면 $\ln(a+1)=\sin\theta$ 이므로 $a=e^{\sin\theta}-1$이다.

따라서 $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin\theta(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)$이고

$L(\theta)=e^{\sin\theta}-1$이다.

그러므로

$$k=\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{1}{2}\sin\theta(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)}{e^{\sin\theta}-1}$$

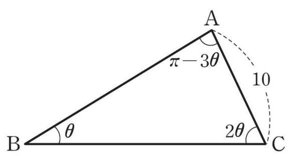
$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\cos\theta-e^{\sin\theta}+1}{\dfrac{e^{\sin\theta}-1}{\sin\theta}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $60k=30$이다.

EBS교재

[정답] 300

사인법칙에 의하여



$$\frac{10}{\sin\theta}=\frac{\overline{AB}}{\sin2\theta}$$

$$\therefore\ \overline{AB}=\frac{10\sin2\theta}{\sin\theta}$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\pi-3\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10\sin2\theta}{\sin\theta}\times10\times\sin3\theta$$

$$=\frac{50\sin2\theta\sin3\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{50\sin2\theta\sin3\theta}{\theta\sin\theta}$$

$$=50\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin3\theta}{3\theta}\times\lim_{\theta\to+0}\frac{6\theta}{\sin\theta}$$

$= 300 \lim\limits_{t \to +0} \dfrac{\sin t}{t} \times \lim\limits_{s \to +0} \dfrac{\sin s}{s} \times \lim\limits_{\theta \to +0} \dfrac{\theta}{\sin\theta}$

$= 300 \times 1 \times 1 \times 1$

$= 300$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

함수 $f(x)$는 열린 구간 $(-\pi,\ \pi)$에서 연속이므로 $x = \dfrac{\pi}{2}$에서 연속이고 $2x - \pi = t$라 하면 $f\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{t}{2}\right)$는 열린 구간 $(-3\pi,\ \pi)$에서 연속이다.

즉, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} f\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{t}{2}\right)$

또한,

$(2x - \pi) f(x) \cos x = 1 - \cos(2x - \pi)$에서

$t \cdot f\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{t}{2}\right) = 1 - \cos t$

$t \neq 0$일 때,

$f\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos t}{t\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{t}{2}\right)} = \dfrac{\cos t - 1}{t \sin \dfrac{t}{2}}$

이므로

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = -1$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

$2 + ae^{-1} = 3 + b\cos\dfrac{\pi}{2}$에서 $a = e$

또한, $x = 1$에서 미분가능하므로 $f'(1)$의 값이 존재해야 한다.

즉, $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{e^{1-x} - 1}{x - 1}$ 이므로

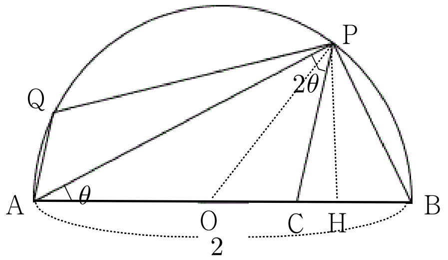
$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3 + \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{b\cos\frac{\pi}{2}x}{x - 1}$ 이므로 $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3 - \dfrac{b\pi}{2}$

따라서 $b = \dfrac{8}{\pi}$ 이므로 $ab = \dfrac{8e}{\pi}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①



선분AQ, CP가 평행함으로 $\angle PAQ = 2\theta$이다.

$\angle APB = \dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{AP} = 2\cos\theta$, $\overline{BP} = 2\sin\theta$

$\angle AQB = \dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{AQ} = 2\cos 3\theta$

삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$는

$\therefore\ S(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{AQ} \times \sin 2\theta$

$= \dfrac{1}{2} \times 2\cos\theta \times 2\cos 3\theta \times \sin 2\theta$

$= 2\sin 2\theta \cos\theta \cos 3\theta$

점 P에서 선분 AB에 수선의 발 H를 내리자.

선분 OP는 원의 반지름이므로 $\overline{OP} = 1$이고,

따라서 $\overline{PH} = \sin 2\theta$이다.

삼각형 BCP에서 사인법칙을 이용하면

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\theta\right)} = \dfrac{\overline{BP}}{\sin 3\theta}$

$\overline{BC} = \dfrac{2\sin\theta\cos 2\theta}{\sin 3\theta}$

$\therefore\ T(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{PH}$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2\sin\theta\cos 2\theta}{\sin 3\theta} \times \sin 2\theta$

$= \dfrac{\sin\theta\sin 2\theta\cos 2\theta}{\sin 3\theta}$

$\lim\limits_{\theta\to+0} \dfrac{S(\theta)}{T(\theta)} = \lim\limits_{\theta\to+0} \dfrac{2\sin 2\theta\cos\theta\cos 3\theta}{\dfrac{\sin\theta\sin 2\theta\cos 2\theta}{\sin 3\theta}}$

$= \lim\limits_{\theta\to+0} \dfrac{2\sin 2\theta\cos\theta\cos 3\theta\sin 3\theta}{\sin\theta\sin 2\theta\cos 2\theta}$

$= \lim\limits_{\theta\to+0} \left(2\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta} \cdot \dfrac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta}\right)$

$= 6$

Ⅲ. 여러 가지 미분법과 활용

05. 여러 가지 미분법

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

$f(x) = \dfrac{ax^2+1}{x^2+2}$ 에서

$f'(x)$

$= \dfrac{(ax^2+1)'(x^2+2)-(ax^2+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{2ax(x^2+2)-2x(ax^2+1)}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{2(2a-1)x}{(x^2+2)^2}$

$f'(1) = \dfrac{2(2a-1)}{9} = \dfrac{2}{3}$ 에서 $a=2$ 이므로

$f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+2}$, $f(1)=1$

$g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ 에서 $g'(x) = -\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$ 이므로

$g'(1) = -\dfrac{f'(1)}{\{f(1)\}^2} = -\dfrac{\frac{2}{3}}{1^2} = -\dfrac{2}{3}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

$f(x) = \cos x$, $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ 에서

$f'(x) = -\sin x$

$g'(x) = \dfrac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{-2(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$

$h(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x))$ 이므로

$h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = g'\left(f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$= g'(0)f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$= 2\times(-1)$

$= -2$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{g(x)-2}{x-2} = 2$ 에서 $x\to2$ 일 때, 극한값이 존재하고, (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다. 즉, $\lim\limits_{x\to2}\{g(x)-2\} = g(2)-2 = 0$ 이므로

$g(2)=2$

따라서 $f(2)=2$

$f(g(x)=x$ 의 양변을 x 에 대해서 미분하면

$f'(g(x))\times g'(x) = 1$

$x=2$ 를 대입하면

$f'(g(2))\times g'(2) = 1$

$f'(2)\times g'(2) = 1$

$g'(2) = 2$ 이므로 $f'(2) = \dfrac{1}{2}$

$h(x) = f(f(x))$ 라 하면

$h(2) = f(f(2)) = f(2) = 2$ 이고

$h'(x) = f'(f(x))\times f'(x)$ 이므로

$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{f(f(x))-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}$

$= h'(2)$

$= f'(f(2))\times f'(2)$

$= f'(2)\times f'(2)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

$f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$에서

$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$

$\quad = 2e^x \cos x$

$f''(x) = 2(e^x \cos - e^x \sin x)$

$\quad = 2e^x(\cos x - \sin x)$

$af(x) + bf'(x) + f''(x) = 0$이므로

$e^x(a\sin x + a\cos x) + e^x(2b\cos x)$

$+ e^x(2\cos x - 2\sin x) = 0$

$e^x\{(a-2)\sin x + (a+2b+2)\cos x\} = 0$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a - 2 = 0,\ a + 2b + 2 = 0$

두 식을 연립하여 풀면

$a = 2,\ b = -2$

따라서 $a + b = 0$

EBS연계 기출문항 1

[정답] 28

$f(x) = 4\sin 7x$ 에서

$f'(x) = 28\sin 7x$ 이므로

$f'(2\pi) = 28\cos(14\pi) = 28 \times 1 = 28$

EBS교재

[정답] 19

$f(x) = 4xe^{3x} + 5\sin 3x$ 에서

$f'(x)$

$= 4e^{3x} + 4xe^{3x} \times (3x)' + 5\cos 3x \times (3x)'$

$= 4e^{3x} + 12xe^{3x} + 15\cos 3x$

$\therefore\ f'(0) = 4 + 15 = 19$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ②

$f'(x) = 2xe^{-x+1} - (x^2 - 8)e^{-x+1}$

$\quad = -(x-4)(x+2)e^{-x+1}$

이므로

$x = -2$ 에서 극솟값 a, $x = 4$ 에서 극댓값 b를 갖는다.

$a = f(-2) = -4e^3$

$b = f(4) = 8e^{-3}$

따라서 $ab = -32$이다.

EBS교재

[정답] 9

$f(x) = e^{-x}(x^4 + ax^3 + 5x^2)$ 에서

$f'(x) = -e^{-x}(x^4 + ax^3 + 5x^2)$

$\quad + e^{-x}(4x^3 + 3ax^2 + 10x)$

$= e^{-x}\{-x^4 + (4-a)x^3 + (3a-5)x^2 + 10x\}$

$f'(1) = 0$ 에서

$f'(1) = e^{-1}(8 + 2a) = 0$

이므로 $a = -4$

이때, $f(x) = e^{-x}x^2(x^2 - 4x + 5)$

$f'(x) = e^{-x}(-x^4 + 8x^3 - 17x^2 + 10x)$

$\quad = -e^{-x}x(x^3 - 8x^2 + 17x - 10)$

$\quad = -e^{-x}x(x-1)(x-2)(x-5)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 5$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	$\frac{4}{e^2}$	↗	$\frac{250}{e^4}$	↘

$f(x)$는 $x = 1,\ x = 5$ 에서 극대이고

$f(5) - f(1) = \frac{250}{e^2} - \frac{2}{e} = \frac{2(125 - e^4)}{e^5} > 0$

이므로 $x \geq 0$일 때, $f(x)$는 $x = 5$ 에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $b = 5$ 이므로

$b - a = 5 - (-4) = 9$

EBS연계 기출문항 3

[정답] ④

$g(f(x)) = h(x)$라 하면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

이다.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$ 이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}}=\sqrt{e}$ 이다.

EBS교재

[정답] ③

$h(x)=f(g(x))$라 하면

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이다.

$g(1)=1$, $f(1)=4$이므로

$h(1)=f(g(1))=f(1)=4$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(g(x))-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)=f'(g(1))g'(1)$$
$$=f'(1)g'(1)$$

이때,

$$f'(x)=2(x^2-3)\cdot(x^2-3)'$$
$$=2(x^2-3)\times 2x$$
$$=4x(x^2-3)$$

$g'(x)=-\frac{1}{x^2}$이므로

$f'(1)=4\times 1\times(1-3)=-8$, $g'(1)=-1$

따라서 구하는 값은

$f'(1)g'(1)=(-8)\times(-1)=8$

EBS연계 기출문항 4

[정답] ④

$f(2x+1)=(x^2+1)^2$의 양변을 각각 미분하면

$$2f'(2x+1)=2(x^2+1)\times 2x$$

이다. 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f'(3)\times 2=2\times 2\times 2=8$$
$$f'(3)=4$$

이다.

EBS교재

[정답] ②

$f(2x+1)=g(-3x-3)$에 $x=0$을 대입하면

$f(1)=g(-3)=3$

$f(2x+1)=g(-3x-3)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(2x+1)=3g'(-3x-3)$

$x=0$을 대입하면

$2f'(1)=-3g'(-3)=12$

그러므로 $g'(-3)=-4$

따라서 $g(-3)-g'(-3)=3-(-4)=7$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

$f(x)=(2\sqrt{x}-1)^3$ 으로 놓으면

$f'(x)=3(2\sqrt{x}-1)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{(2\sqrt{1+h}-1)^3-(2\sqrt{1-h}-1)^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$
$$=2\times 3=6$$

EBS연계 기출문항 5

[정답] 4

$f'(x)=2+\cos x$이고

$$f'(2\pi)=2+\cos 2\pi=3$$
$$f(2\pi)=g^{-1}(2\pi)=4\pi$$

이므로 역함수 미분법에 의해

$$g'(4\pi)=\frac{1}{f'(2\pi)}$$

$$g'(4\pi)=\frac{1}{3}$$

이다. $p+q=4$ 이다.

EBS교재

[정답] ①

$$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\right\}$$

$$=g'(1)+g'(1)$$

$$=2g'(1)$$

$f(0)=1$이고 $f'(x)=1+e^x$에서

$g(1)=0,\ g'(1)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$이므로

$2g'(1)=1$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

$f(x)=\ln(x^2+x)$에서

$f'(x)=\dfrac{(x^2+x)'}{x^2+x}=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$이므로

$$f'(n)=\frac{2n+1}{n^2+n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(n)}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{2n+1}{n^2+n}}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 26

$|y|=\left|\dfrac{(3x+1)^6}{(x^2+1)^3(4x-1)^2}\right|$ 의 양변에

자연로그를 취하면

$\ln|y|=6\ln|3x+1|-3\ln|x^2+1|-2|4x-1|$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{6\times3}{3x+1}-\frac{3\cdot2x}{x^2+1}-\frac{2\times4}{4x-1}$$

$$y'=y\left(\frac{18}{3x+1}-\frac{6x}{x^2+1}-\frac{8}{4x-1}\right)$$

따라서 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{18}{1}-\frac{0}{1}-\frac{8}{-1}=26$$

06. 도함수의 활용

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ②

$f(x)=\sin(\ln x^2)+1$ 이라 하면

$$f'(x)=\cos(\ln x^2)\times(\ln x^2)'$$

$$=\frac{2\cos(\ln x^2)}{x}$$

$f'(1)=2$ 이므로 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-1=2(x-1)$$

즉, $y=2x-1$……㉠

따라서 직선 ㉠의 x절편은 $\dfrac{1}{2}$, y절편은 -1이므로 직선 ㉠과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{4}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 상수, $a\neq0$)이라 하자.

두 점 $(0,\ 4)$, $(1,\ 0)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(0)=d=4,\ f(1)=a+b+c+d=0$$

즉, $a+b+c=-4$……㉠

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이고 $f'(0)=0$ 이므로

$c=0$……㉡

$f''(x)=6ax+2b$ 이고 $f''(1)=0$ 이므로

$6a+2b=0$

즉, $3a+b=0$……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=2,\ b=-6$ 이므로

$f(x)=2x^3-6x^2+4$

$f'(x)=6x^2-12x$ 이고 $f'(1)=-6$ 이므로 점 $(1,\ 0)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 접선의 방정식은

$y-0=-6(x-1)$

즉, $y=-6x-6$……㉣

점 $(0,\ k)$ 가 직선 ㉣위의 점이므로 $k=6$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

$f(x)=ax-\ln(x^2+2)$에서

$$f'(x)=a-\frac{2x}{x^2+2}=\frac{ax^2-2x+2a}{x^2+2}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 $f'(x)\ge 0$, 즉 $ax^2-2x+2a\ge 0$이어야 한다.

$a>0$이므로 이차방정식 $ax^2-2x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-2a^2\le 0$$

$$2a^2\ge 1$$

$$a^2\ge\frac{1}{2}$$

이때 $a>0$이므로 $a\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 양수 a의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

$f(x)=(x^2+a)e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x=(x^2+2x+a)e^x$

$x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$

$f'(1)=(3+a)e=0$에서 $a=-3$

$g(x)=(x^2+a)e^{-x}=(x^2-3)e^{-x}$에서

$g'(x)=2xe^{-x}-(x^2-3)e^{-x}$

$=-(x^2-2x-3)e^{-x}$

$=-(x+1)(x-3)e^{-x}$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $g(x)$의 극솟값은 $g(-1)=-2e$이다.

EBS연계 기출문항 1

[정답] ⑤

곡선 $y=3e^{x-1}$ 위의 점 A 의 좌표를 $(t,3e^{t-1})$ 로 놓으면 $\dfrac{dy}{dx}=3e^{x-1}$ 이므로 접선의 기울기는 $3e^{t-1}$이다. 그러므로 접선의 방정식은 $y=3e^{t-1}(x-t)+3e^{t-1}$ 이다.

이 접선이 원점 $\mathrm{O}(0,0)$ 을 지나므로

$0=3e^{t-1}(-t)+3e^{t-1}$

$\therefore t=1$

따라서 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ 이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(1+9)}=\sqrt{10}$

EBS교재

[정답] ①

$f(x)=e^{2x}$ 으로 놓으면 $f'(x)=2e^{2x}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{2t})$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2e^{2t}=2$

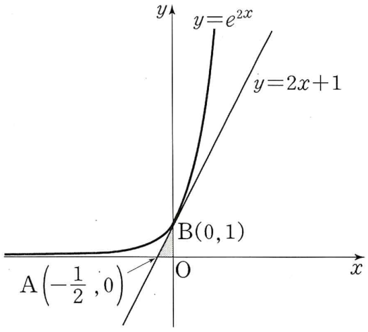
$e^{2t}=1$

$\therefore\ t=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=2(x-0)$

$\therefore\ y=2x+1$



이 접선이 x축과 만나는 점 A의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, y축과 만나는 점 B의 좌표는 (0, 1)이므로 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{4}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

$f(x)=e^x+x^{15}+7x-5$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$ 에서 연속이고

$f(0)=1-5=-4$, $f(1)=e+3$ 이므로

$f(0)f(1)=\boxed{-4(e+3)}<0$

그러므로 중간값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 열린구간 $(0,\ 1)$ 에 존재한다.

그 실근을 α 라 하고 α 가 아닌 다른 실근 β 가 존재한다고 하자.

즉, $\alpha\neq\beta$, $f(\beta)=0$ 인 β 가 존재한다면 함수 $f(x)$ 는 연속이고 미분가능하며 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 실수 c 가 적어도 하나 존재한다.

그런데 $f'(x)=\boxed{e^x+15x^{14}+7}>0$ 이므로 모순이다.

따라서 열린 구간 $(0,\ 1)$ 에서 방정식 $f(x)=0$ 은 $\boxed{1}$ 개의 실근을 갖는다.

그러므로 $a=-4(e+3)$,

$h(x)=e^x+15x^{14}+7$, $b=1$ 이므로

$a+h(1)+b=-4(e+3)+(e+22)+1$

$=-3e+11$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

$f'(x)=2\cos x-2x\sin x$

ㄱ. $f'(0)=2$이므로 $a\neq 0$이다.

또한, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\frac{\pi}{2}-\pi\sin\frac{\pi}{2}=-\pi$이므로

$a\neq\frac{\pi}{2}$이다.

$f'(a)=2\cos a-2a\sin a=0$

$\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{2}{2a}$

$\tan a=\frac{1}{a}$(참)

ㄴ. 함수 $f'(x)$는 $0\leq x\leq\pi$에서 연속이고

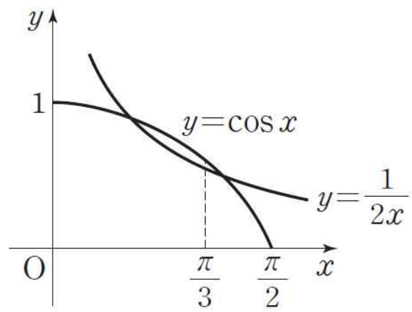
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)>0$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi<0$

이므로 중간값의 정리에 의하여 $f'(a)=0$인 실수 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right)$에 존재한다.

즉, $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가 상태에서 감소상태로 변하므로 극댓값을 가지는 a가 구간$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right)$에 있다. (참)

ㄷ. $2x\cos x=1$에서 $x\neq 0$이므로 $\cos x=\frac{1}{2x}$



$x=\frac{\pi}{3}$일 때 $\cos\frac{\pi}{3}>\frac{3}{2\pi}$이므로 $y=\cos x$의 그래프가 $y=\frac{1}{2x}$의 그래프 위에 존재한다.

따라서 그림과 같으므로 구간$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

$y=ax^2+3x+1+\sin x$에서

$y'=2ax+3+\cos x$, $y''=2a-\sin x$

그런데 주어진 곡선이 변곡점을 갖기 위해서는

$y''=0$인 x가 존재하고,

그 점의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌어야 한다.

그러므로 열린 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 y''의 최댓값은 양수, 최솟값은 음수이어야 한다. 즉,

(y''의 최댓값)$=2a+1>0$

$\therefore a>-\dfrac{1}{2}$ $\cdots$ ㉠

(y''의 최솟값)$=2a-1<0$

$\therefore a<\dfrac{1}{2}$ $\cdots$ ㉡

㉠,㉡에서 $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$

Ⅳ. 적분

07. 부정적분

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ②

$f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$에서 $(1+x^2)'=2x$이므로

$$f(x)=\int\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$=\ln|1+x^2|+C$$

(단, C는 적분상수)

이때 $1+x^2>0$이므로

$$f(x)=\ln(1+x^2)+C$$

$f(0)=\ln 1+C=-2$이므로

$$C=-2$$

이때 방정식 $f(x)=0$에서

$$\ln|1+x^2|-2=0$$

$$\ln|1+x^2|=2$$

$$1+x^2=e^2$$

$$x^2=e^2-1$$

따라서 $x=\pm\sqrt{e^2-1}$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은

$$\sqrt{e^2-1}\times(-\sqrt{e^2-1})=-(e^2-1)$$

$$=1-e^2$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

$f'(x)=(x-1)e^2=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 가지므로 $f(1)=0$이다.

$$f(x)=\int(x-1)e^x\,dx=(x-1)e^x-\int e^x\,dx$$

$=(x-1)e^x-e^x+C=(x-2)e^x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=-e+C=0$에서 $C=e$

따라서 $f(x)=(x-2)e^x+e$

이므로 $f(2)=0\times e^2+e=e$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

조건 (나)의 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{e}{x}-1 & (x>0)\\ 2x+k & (x<1)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}e\ln x-x+C_1 & (x>1)\\ x^2+kx+C_2 & (x<1)\end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $f(1)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)$이므로

$$\lim_{x\to1+}(e\ln x-x+C_1)=\lim_{x\to1-}(x^2+kx+C_2)$$

$$-1+C_1=1+k+C_2$$

$$C_1=2+k+C_2\cdots㉠$$

조건 (가)의 $f(0)=-1$에서

$$C_2=-1\cdots㉡$$

㉠, ㉡에서 $C_1=1+k$

$f'(x)=0$에서 $x=e$ 또는 $x=-\dfrac{k}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

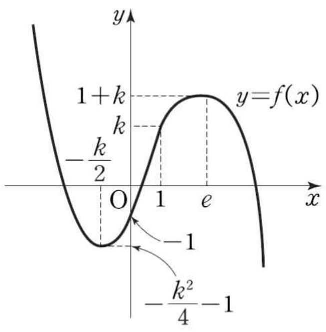
x	$\cdots$	$-\dfrac{k}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	k	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{k}{2}$에서 극솟값

$$f\left(-\frac{k}{2}\right)=\frac{k^2}{2}-\frac{k^2}{2}+C_2$$
$$=-\frac{k^2}{4}-1$$

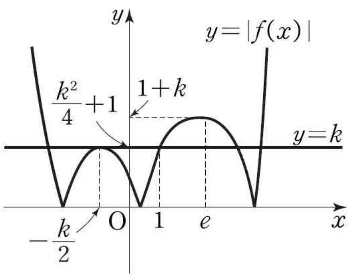
을 갖고, $x=e$에서

극댓값 $f(e)=e\ln e-e+C_1=1+k$를 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 [그림1]과 같다.



[그림 1]

조건 (다)에서 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수가 5이려면 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림2]와 같아야 하므로



[그림 2]

$$k=\frac{k^2}{4}+1$$
$$k^2-4k+1=0$$
$$(k-2)^2=0$$

따라서 $k=2$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

$\int e^x f(x)dx=e^x-F(x)+1$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^x f(x)=e^x-f(x)$$
$$(e^x+1)f(x)=e^x$$
$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

이 때 $f(x)=F'(x)$이므로

$$F(x)=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$e^x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$F(x)=\int\frac{1}{t}dt=\ln t+C$$
$$=\ln(e^x+1)+C$$

(단, C는 적분상수)

$F(0)=\ln(e^0+1)+C=\ln 2+C=\ln 2$에서

$C=0$

따라서 $F(x)=\ln(e^x+1)$이므로

$$F(\ln 2)=\ln(e^{\ln 2}+1)=\ln 3$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ③

$$g(x)=\frac{4}{e^2}\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$$
$$=\frac{2}{e^2}\int_1^x 2te^{t^2}\frac{f(t)}{t}dt$$

이 때, $u'=2te^{t^2}$, $v=\dfrac{f(t)}{t}$라 하고 부분적분하면

$$g(x)=\frac{2}{e^4}\left\{\left[e^{t^2}\frac{f(t)}{t}\right]_1^x-\int_1^x t^2dt\right\}$$
$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\frac{f(x)}{x}-ef(1)-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x\right\}$$
$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\frac{f(x)}{x}-ef(1)-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\right)\right\}$$
$$g(2)=\frac{2}{e^4}\left(e^4\frac{f(2)}{2}-\frac{10}{3}\right)$$
$$=f(2)-\frac{20}{3e^4}$$

따라서 $f(2)-g(2)=\dfrac{20}{3e^4}$ 이다.

EBS교재

[정답] ④

$xf'(x)-f(x)=x^2\cos x$ 에서

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\cos x$$
$$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=\cos x$$
$$\frac{f(x)}{x}=\int\cos x\,dx$$
$$\frac{f(x)}{x}=\sin x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$
$$f(x)=x(\sin x+C)$$

$f(x)=\pi(\sin\pi+C)=\pi$ 에서

$\pi(0+C)=\pi$

$C=1$

따라서 $f(x)=x(\sin x+1)$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}+1\right)=\frac{\pi}{2}(1+1)=\pi$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

$\int f(x)dx=(x+1)f(x)-x^4-4x+3$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면,

$$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-4x^3-4$$
$$(x+1)f'(x)=4(x^3+1)$$

$x>0$ 이므로

$$f'(x)=\frac{4(x^3+1)}{x+1}=\frac{4(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$
$$=4x^2-4x+4$$

$$\therefore\ f(x)=\int(4x^2-4x+4)dx$$
$$=\frac{4}{3}x^2-2x+4x+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$
$$\therefore\ f(3)-f(1)=(30+C)-\left(\frac{10}{3}+C\right)$$
$$=\frac{80}{3}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

$f'(x)=|x-2|+3x=\begin{cases}4x-2 & (x\ge 2)\\ 2x+2 & (x<2)\end{cases}$ 이므로

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-2x+C_1 & (x\ge 2)\\ x^2+2x+C_2 & (x<2)\end{cases}$$

(C_1, C_2는 적분상수)

$f(3)=17$ 이므로 $18-6+C_1=17$ 에서

$C_1=5$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-0}f(x)=\lim_{x\to2+0}f(x)=f(2)$ 에서

$$\lim_{x\to2-0}(x^2+2x+C_2)=\lim_{x\to2+0}(2x^2-2x+5)$$

$4+4+C_2=8-4+5 \qquad \therefore\ C_2=1$

(ⅰ) $x\ge 2$일 때,

$f'(x)=4x-2>0$ 이므로

$f(x)\ge f(2)=9$

(ⅱ) $x<2$일 때,

$f'(x)=2x+2=0$ 에서 $x=-1$ 이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최소이고, 최솟값은 $f(-1)=1-2+1=0$ 이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

$F(x)=xf(x)+(x-1)e^x$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+e^x+(x-1)e^x$$
$$xf'(x)=-xe^x$$

이때 $x\ne0$ 이면 $f'(x)=-e^x$ 이고, 주어진 조건에서 $f'(0)=-1$ 이므로 모든 실수 x에 대하여

$f'(x) = -e^x$ 이다.

$$\therefore\ f(x) = \int (-e^x)dx = -e^x + C$$

(C는 적분상수)

$f(0) = -1 + C = -1$에서 $C = 0$

$$\therefore\ f(x) = -e^x$$

$$\therefore\ f(\ln 2) = -e^{\ln 2} = -2$$

08. 정적분

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

$f(x) = |\cos 2x|$ 라 하면

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x & \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}\right) \\ -\cos 2x & \left(\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 2x|\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} \times \frac{1}{n}$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \Big[\ln x\Big]_1^2$$

$$= \ln 2 - \ln 1$$

$$= \ln 2$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

조건 (가)에서 $f(x) = -f(-x)$이므로

$f(0) = 0$, $f'(x) = f'(-x)$

조건 (나)의 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)(\cos x - \sin x)dx = 36$

에서

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f'(x)\cos x - f'(x)\sin x\}dx = 36 \cdots ㉠$$

함수 $y = f'(x)\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 함수 $y = f'(x)\sin x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 ㉠에서

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x dx = 36$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x dx = 18 \cdots ㉡$$

$u(x) = \cos x$, $v'(x) = f'(x)$로 놓으면

$u'(x) = -\sin x$, $v(x) = f(x)$이므로 ㉡에서

$$\Big[f(x)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)(-\sin x)dx = 18$$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = 18$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 250

$$\int_a^x f(t)dt = \frac{x^2 - 2x + b}{x+1} \cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x = a$를 대입하면

$$\int_a^a f(t)dt = \frac{a^2 - 2a + b}{a+1}$$

$$0 = \frac{a^2 - 2a + b}{a+1}$$

$a>0$이므로 $a^2-2a+b=0\cdots$㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$\int_a^0 f(t)dt=b\cdots㉢$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$\int_a^1 f(t)dt=\frac{-1+b}{2}\cdots㉣$$

㉣-㉢을 하면

$$\int_a^1 f(t)dt-\int_a^0 f(t)dt=\frac{-1+b}{2}-b$$

$$\int_a^1 f(t)dt+\int_0^a f(t)dt=\frac{-1-b}{2}$$

$$\int_0^1 f(t)dt=\frac{-1-b}{2}$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{-1-b}{2}$$

조건(가)에서 $\int_0^1 f(x)dx=7$이므로

$$\frac{-1-b}{2}=7,\ b=-15$$

$b=-15$를 ㉡에 대입하면

$$a^2-2a-15=0$$

$$(a+3)(a-5)=0$$

$a>0$이므로 $a=5$

따라서 $a^2+b^2=5^2+(-15)^2=250$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ⑤

$$\int_0^e \frac{5}{x+e}dx=5[\ln(x+e)]_0^e$$
$$=5\ln 2e-5\ln e$$
$$=5\ln 2$$

EBS교재

[정답] ②

$$\int_0^{\ln 4}\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx+\int_{\ln 4}^0\frac{1}{e^x+1}dx$$

$$=\int_0^{\ln 4}\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx-\int_0^{\ln 4}\frac{1}{e^x+1}dx$$

$$=\int_0^{\ln 4}\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$$

$$=\int_0^{\ln 4}\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$$

$$=\int_0^{\ln 4}(e^x-1)dx$$

$$=\left[e^x-x\right]_0^{\ln 4}$$

$$=(e^{\ln 4}-\ln 4)-(e^0-0)$$

$$=(4-\ln 4)-1$$

$$=3-\ln 4$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ⑤

$x=f'(x)$, $1-\ln x=g(x)$라 하면

$$\int_1^e x(1-\ln x)dx$$

$$=[f(x)g(x)]_1^e-\int_1^e f(x)g'(x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2(1-\ln x)\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)+\int_1^e\frac{1}{2}x\,dx$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{4}(e^2-3)$$

EBS교재

[정답] ③

$\int_1^2 x\ln x\,dx$에서

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ 이므로

$$\int_1^2 x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x\,dx$$

$$=(2\ln 2-0)-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2$$

$$= 2\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$
$$= 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

EBS연계 기출문항 3

[정답] ③

$$\int_0^3 \frac{2}{2x+1}dx = [\ln|2x+1|]_0^3$$
$$= \ln 7 - \ln 1 = \ln 7$$

EBS교재

[정답] ④

$\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}dx = \int_0^{\ln 3} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$에서

$e^{2x}+1 = t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx} = 2e^{2x}$이고

$x = 0$일 때 $t = e^0 + 1 = 2$,

$x = \ln 3$일 때 $t = e^{2\ln 3} + 1 = e^{\ln 9} + 1 = 10$이므로

$$\int_0^{\ln 3} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$$
$$= \int_2^{10} \frac{1}{t}dt = \Big[\ln t\Big]_2^{10} = \ln 10 - \ln 2 = \ln 5$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \displaystyle\int_0^{\ln(n+2)} (e^x+1)dx$에서

$n = 10$일 때,

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = \displaystyle\int_0^{\ln 12} (e^x+1)dx \cdots$ ㉠

$n = 9$일 때,

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 = \displaystyle\int_0^{\ln 11} (e^x+1)dx \cdots$ ㉡

㉠-㉡에서

$$a_{10} = \int_0^{\ln 12} (e^x+1)dx - \int_0^{\ln 11} (e^x+1)dx$$
$$= \int_0^{\ln 12} (e^x+1)dx + \int_{\ln 11}^{0} (e^x+1)dx$$
$$= \int_{\ln 11}^{\ln 12} (e^x+1)dx$$
$$= \Big[\, e^x + x \,\Big]_{\ln 11}^{\ln 12} = (12 + \ln 12) - (11 + \ln 11)$$
$$= 1 + \ln\frac{12}{11}$$
$$= \ln\frac{12}{11}e = \ln k$$
$$\therefore\ k = \frac{12}{11}e$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 21

$x_k = 1 + \dfrac{k}{n}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots, n)$이므로

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} (n+k)f(x_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (n+k)f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (n+k)\left(\frac{n+k}{n}\right)^4$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+5)^5}{n^4}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{1+2+3+\cdots+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)^5}{n^4}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)^5}{n^5(n+1)}$$
$$= 2\lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^5 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\right\}$$
$$= 2\int_1^2 x^5 dx \times \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$
$$= 2\left[\frac{x^6}{6}\right]_1^2 \times 1$$
$$= 2 \times \frac{63}{6} = 21$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

$f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)dt$ 에서 $\int_0^1 tf(t)dt=a$ 라 하면 $f(x)=e^{x^2}+a$ 이므로

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 tf(t)dt \\ &= \int_0^t t\left(e^{t^2}+a\right)dt \\ &= \int_0^1 \left(te^{t^2}+at\right)dt \\ &= \int_0^1 te^{t^2}dt + \left[\frac{a}{2}t^2\right]_0^1 \\ &= \int_0^1 te^{t^2} + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$t^2=z$ 로 놓으면

$t=0$ 일 때 $z=0$, $t=1$ 일 때 $z=1$ 이고, $2t=\frac{dz}{dt}$ 이므로

$$\int_0^1 te^{t^2}dt = \int_0^1 \frac{e^z}{2}dz = \left[\frac{e^z}{2}\right]_0^1 = \frac{e}{2}-\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}+\frac{a}{2}$ 에서 $a=e-1$

$\therefore \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 tf(t)dt = a = e-1$

09. 정적분의 활용

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

$\log_2(x+1)=2-\log_2(x+1)$에서

$\log_2(x+1)=1$

$x+1=2$, 즉 $x=1$

두 곡선 $y=\log_2(x+1)$, $y=2-\log_2(x+1)$과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \{2-\log_2(x+1)-\log_2(x+1)\}dx$$

$$=\int_0^1 \{2-2\log_2(x+1)\}dx$$

$x+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=1$이므로

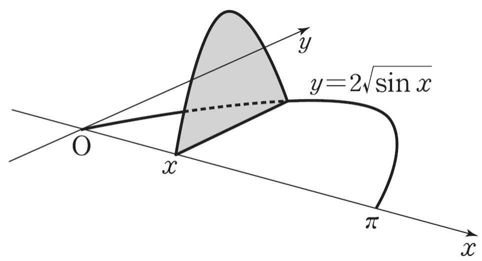
$$\begin{aligned} \int_0^1 \log_2(x+1)dx &= \frac{1}{\ln 2}\int_1^2 \ln t\,dt \\ &= \frac{1}{\ln 2}\left[t\ln t - t\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{\ln 2}\{(2\ln 2-2)-(0-1)\} \\ &= 2-\frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \{2-2\log_2(x+1)\}dx \\ &= \int_0^1 2dx - 2\int_0^1 \log_2(x+1)dx \\ &= \left[2x\right]_0^1 - 2\left(2-\frac{1}{\ln 2}\right) \\ &= \frac{2}{\ln 2}-2 \end{aligned}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③



이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반원이고, 이 반원의 지름의 길이가 $2\sqrt{\sin x}$ 이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\pi}{2}\times(\sqrt{\sin x})^2=\frac{\pi}{2}\sin x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^\pi \frac{\pi}{2}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\left[-\cos x\right]_0^\pi = \pi$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

$y=\ln x+n$에서 $y'=\frac{1}{x}$

함수 $y=\ln x+n$의 그래프 위의 점 A의 좌표

를 $A(t,\ \ln t + n)$이라 하면 점 A에서의 접선의 방정식은

$$y-(\ln t+n)=\frac{1}{t}(x-t)\ \cdots\ ㉠$$

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$$0-(\ln t+n)=\frac{1}{t}(0-t)$$

$$-\ln t-n=-1$$

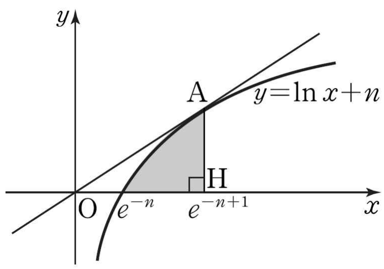
$$\ln t=-n+1$$

$$t=e^{-n+1}$$

따라서 점 $A(e^{-n+1},\ 1)$에서 x축에 내린 수선의 발 H의 좌표는 $H(e^{-n+1},\ 0)$이다.

한편, 함수 $y=\ln x+n$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$0=\ln x+n$에서 $x=e^{-n}$



따라서 함수 $y=\ln x+n$의 그래프와 x축 및 선분 AH로 둘러싸인 부분의 넓이 S_n은

$$S_n=\int_{e^{-n}}^{e^{-n+1}}(\ln x+n)dx$$

$$=\Big[x\ln x-x+nx\Big]_{e^{-n}}^{e^{-n+1}}$$

$$=e^{-n+1}\ln e^{-n+1}-e^{-n+1}+ne^{-n+1}-(e^{-n}\ln e^{-n}-e^{-n}+ne^{-n})$$

$$=e^{-n}=\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④

$f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{2\ln t+a}{t}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{2\ln x+a}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $2\ln x+a=0$

$$\ln x=-\frac{a}{2}$$

$$x=e^{-\frac{a}{2}}$$

$x=e^{-\frac{a}{2}}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=e^{-\frac{a}{2}}$에서 극소이면서 최소이다.

$$f(x)=\int_1^x\frac{2\ln t+a}{t}dt=\int_1^x\frac{2\left(\ln t+\frac{a}{2}\right)}{t}dt$$

에서

$\ln t+\dfrac{a}{2}=s$로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$이고

$t=1$일 때 $s=\dfrac{a}{2}$, $t=x$일 때

$s=\ln x+\dfrac{a}{2}$이므로

$$f(x)=\int_1^x\frac{2\left(\ln t+\frac{a}{2}\right)}{t}dt$$

$$=\int_{\frac{a}{2}}^{\ln x+\frac{a}{2}}2s\,ds$$

$$=\Big[s^2\Big]_{\frac{a}{2}}^{\ln x+\frac{a}{2}}$$

$$=\left(\ln x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$=(\ln x)^2+a\ln x$$

$x=e^{-\frac{a}{2}}$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $-\dfrac{9}{4}$이므로

$$f\left(e^{-\frac{a}{2}}\right)=\left(\ln e^{-\frac{a}{2}}\right)^2+a\ln e^{-\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}$$

$$=-\frac{a^2}{4}=-\frac{9}{4}$$

$$a^2=9$$

이때 $a>0$이므로 $a=3$

$f(x) = (\ln x)^2 + 3\ln x$ 이므로
두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는

$$(\ln x)^2 + 3\ln x = \ln x$$
$$(\ln x)^2 + 2\ln x = 0$$
$$(\ln x + 2)\ln x = 0$$
$$\ln x = -2 \text{ 또는 } \ln x = 0$$
$$x = e^{-2} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S = \int_{e^{-2}}^{1} [\ln x - \{(\ln x)^2 + 3\ln x\}]\,dx$$
$$= \int_{e^{-2}}^{1} \{-(\ln x)^2 - 2\ln x\}dx$$
$$= -\int_{e^{-2}}^{1} (\ln x)^2 dx - \int_{e^{-2}}^{1} 2\ln x\,dx$$

$\int_{e^{-2}}^{1} (\ln x)^2 dx$에서 $u(x) = (\ln x)^2$, $v'(x) = 1$로 놓으면

$u'(x) = (2\ln x) \times \frac{1}{x}$, $v(x) = x$이므로

$$S = -\int_{e^{-2}}^{1} (\ln x)^2 dx - \int_{e^{-2}}^{1} 2\ln x\,dx$$
$$= -\left\{[x(\ln x)^2]_{e^{-2}}^{1} - \int_{e^{-2}}^{1} 2\ln x\,dx\right\}$$
$$- \int_{e^{-2}}^{1} 2\ln x\,dx$$
$$= -\{0 - e^{-2}(\ln e^{-2})^2\} = \frac{4}{e^2}$$

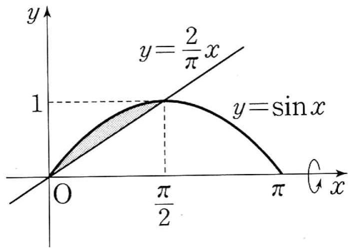
EBS연계 기출문항 1

[정답] ④
회전체의 부피를 V라 하면

$$V = \pi\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$$
$$= \pi\int_0^1 25x^2(x-2)^2 dx$$
$$= 25\pi\int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)dx$$
$$= 25\pi\left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \frac{40}{3}\pi$$

EBS교재

[정답] ①



점 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$과 원점을 지나는 직선은 $y = \frac{2}{\pi}x$이고 구하는 부피를 V라 하면 함수 $y = \sin x$의 그래프와 x축 및 직선 $x = \frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피에서 밑면의 반지름의 길이가 1, 높이가 $\frac{\pi}{2}$인 원뿔의 부피를 빼면 되므로 구하는 부피를 V라 하면

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx - \frac{1}{3}\times\pi\times 1^2\times\frac{\pi}{2}$$
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx - \frac{\pi^2}{6}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^2}{6}$$
$$= \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{12}\pi^2$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ③
함수 $y = \cos 2x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x = \frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{4}$$

이다. x축, y축 및 직선 $x = \frac{\pi}{12}$와 $y = a$에 의하여 둘러싸인 직사각형의 넓이는 $\frac{\pi}{12}\times a$ 이므로

$$\frac{1}{8}=\frac{\pi}{12}\times a$$

$$a=\frac{3}{2\pi}$$

이다

EBS교재

[정답] ③

$\int_{2}^{a}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_2^a=\ln a-\ln 2=\ln 5$에서

$\ln a=\ln 10$ 따라서 $a=10$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

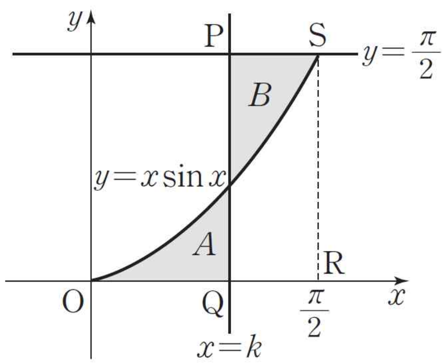
그림에서 두 영역 A와 B의 넓이가 같으므로 직사각형 $PQRS$의 넓이는 곡선 $y=x\sin x$와 x축, 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

즉, $\left(\frac{\pi}{2}-k\right)\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx$$

$$=-\left[-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\therefore k=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$$



2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

점 P의 좌표를 $(0,\ t,\ 0)\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$이라 하자. 점 P를 한 꼭짓점으로 하는 삼각형 QPR의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}(1+\sin t)(1+\cos t)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}\sin 2t$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)dt$$

$$=\left[\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{8}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}-0+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi+5}{4}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

(나)에서 $x\neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+xf'(x)=0$이므로 $\{xf(x)\}'=0$

$\therefore xf(x)=k$(단, k는 상수)

$x>0$일 때, $xf(x)=k_1$에 $x=3$을 대입하면 (가)에서 $f(3)=-1$이므로 $3f(3)=-3$

$\therefore k_1=-3$

$x<0$일 때, $xf(x)=k_2$에 $x=-3$을 대입하면 (가)에서 $f(-3)=1$이므로 $-3f(-3)=-3$

$\therefore k_2=-3$

$$\therefore f(x)=\frac{-3}{x}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프가 $y=g(x)$이므로 $g(x)=\frac{-3}{x-5}+1$

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$$\frac{-3}{x-5}+1=x$$

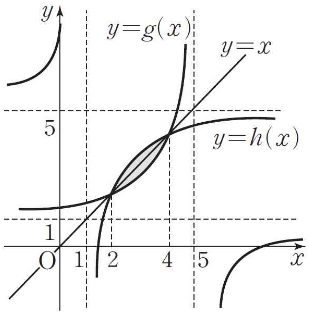
$$x^2-6x+8=0$$

$$(x-2)(x-4)=0$$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

$2 \le x \le 4$에서 $g(x) \le x$이므로
두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프로
둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하면

$$S = 2\int_2^4 \left(x - \frac{-3}{x-5} - 1\right)dx$$
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} + 3\ln|x-5| - x\right]_2^4$$
$$= 2(4 - 3\ln 3)$$



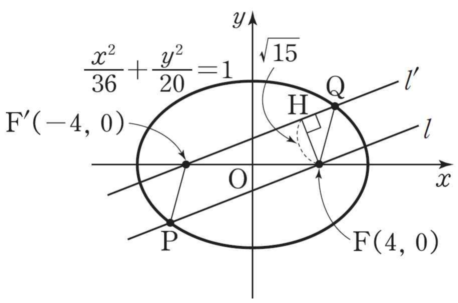
Ⅰ. 평면곡선

10. 이차곡선

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$의 두 초점은
$\mathrm{F}'(-\sqrt{36-20},\ 0)$, $\mathrm{F}(\sqrt{36-20},\ 0)$
즉, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$, $\mathrm{F}(4,\ 0)$
점 F에서 직선 l'에 내린 수선의 발을 H라고 하면 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리가 $\sqrt{15}$이므로 $\overline{\mathrm{FH}}=\sqrt{15}$



직각삼각형 $\mathrm{F'FH}$에서

$$\overline{\mathrm{FF'}}=8,\ \overline{\mathrm{FH}}=\sqrt{15}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{F'H}}=\sqrt{64-15}=\sqrt{49}=7$$

이때 타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$의 장축의 길이는

$$2\times 6=12$$

이므로 $\overline{\mathrm{HQ}}=p$, $\overline{\mathrm{QF}}=q$라고 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{F'H}}+\overline{\mathrm{HQ}}+\overline{\mathrm{QF}}$$
$$=7+p+q=12$$
$$p+q=5 \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

또한 직각삼각형 FHQ에서

$$q^2-p^2=15$$

즉, $(q+p)(q-p)=15$

$$5(q-p)=15$$
$$q-p=3 \quad \cdots\cdots \ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

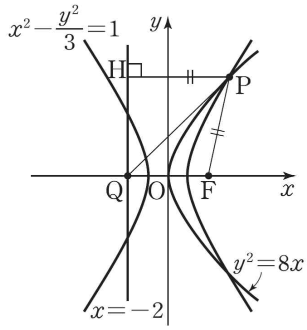
$$p=1,\ q=4$$
$$\overline{\mathrm{QF}}=q=4$$

점 P와 점 Q는 서로 원점에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=4$
따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF}}=8$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$의 두 초점의 좌표는
$(-\sqrt{1+3},\ 0)$, $(\sqrt{1+3},\ 0)$
즉, $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$이므로
점 $\mathrm{Q}(-2,\ 0)$은 쌍곡선의 한 초점이다.
또한 $y^2=4\times 2x$에서 이 포물선의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.



따라서 $F(2,\ 0)$으로 놓으면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PH}=\overline{PF}$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PQ}-\overline{PF}=2\times1=2$$

따라서 $\overline{PQ}-\overline{PH}=2$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 40

점 $P(4,\ 2)$는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

위의 점이므로 $\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1$,

즉 $4a^2+16b^2=a^2b^2\cdots$ ㉠

타원의 두 꼭짓점 B, B′의 좌표는

$B(0,\ b)$, $B'(0,\ -b)$ $(b>2)$이므로

직선 PB의 방정식은 $y=\dfrac{2-b}{4}x+b$

$y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{2-b}{4}x+b$에서 $x=\dfrac{4b}{b-2}$ 이므로

점Q의 좌표는 $Q\left(\dfrac{4b}{b-2},\ 0\right)$

직선 BP′의 방정식은 $y=\dfrac{2+b}{4}x-b$

$y=0$을 대입하면 $0=\dfrac{2-b}{4}x-b$이므로

점 R의 좌표는 $R\left(\dfrac{4b}{b-2},\ 0\right)$

$\overline{OQ}\times\overline{OR}=\dfrac{4b}{b-2}\times\dfrac{4b}{b+2}=\dfrac{16b^2}{b^2-4}$

㉠에서 $16b^2=a^2b^2-4a^2$이므로

$\overline{OQ}\times\overline{OR}=\dfrac{a^2b^2-4a^2}{b^2-4}=\dfrac{a^2(b^2-4)}{b^2-4}=a^2$

$\overline{OQ}\times\overline{OR}=32$이므로 $a^2=32$

$a^2=32$를 ㉠에 대입하면

$4\times32+16b^2=32b^2$, $16b^2=128$

$$b^2=8$$

따라서 $a^2+b^2=32+8=40$

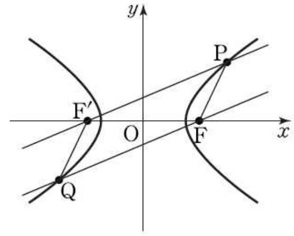
2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$에서 두 초점 F, F′의 좌표를 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$으로 놓으면 $c^2=64+36=100$에서 $c=10$이므로

$F(10,\ 0)$, $F'(-10,\ 0)$이고

$\overline{F'F}=10-(-10)=20$이다.



두 초점 F, F′은 원점에 대하여 서로 대칭이고 직선 F′P와 직선 FQ가 서로 평행이므로 쌍곡선 위의 두 점 P, Q도 원점에 대하여 서로 대칭이다. 따라서 삼각형 PF′F의 넓이와 삼각형 QFF′의 넓이는 서로 같다. 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 사각형 PF′QF의 넓이 $120\sqrt{3}$은 삼각형 PF′F의 넓이의 2배이고 $\overline{F'F}=20$이므로

$2\times\left(\dfrac{1}{2}\times\overline{F'F}\times\overline{PH}\right)=20\times\overline{PH}=120\sqrt{3}$에서

$\overline{PH}=6\sqrt{3}$

점 P의 y좌표는 $6\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{(6\sqrt{3})^2}{36}=1$에서

$$\frac{x^2}{64}=4$$

$$x^2=64\times4=256$$

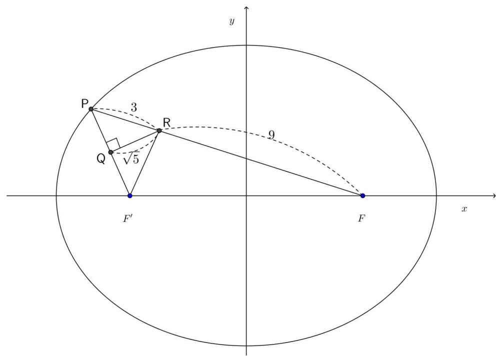
$x>0$이므로 $x=16$이고 $P(16,\ 6\sqrt{3})$이다.

따라서 두 점 $F'(-10,\ 0)$, $P(16,\ 6\sqrt{3})$을 지나는 직선 F′P의 기울기는

$$\frac{6\sqrt{3}-0}{16-(-10)}=\frac{3\sqrt{3}}{13}$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] 104



$\overline{\mathrm{PR}}=3$ 이고 $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{5}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2$, $\overline{\mathrm{PF'}}=4$ 이다.

타원의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$ 이므로 $a=8$ 이다.

한편 $\angle \mathrm{RPF'}=\theta$ 라 하면

$\triangle \mathrm{PQR}$ 에서 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ 이고

$\triangle \mathrm{FPF'}$ 에서 $\cos\theta=\dfrac{16+144-4c^2}{2\times4\times12}$ 이므로

$$\frac{16+144-4c^2}{2\times4\times12}=\frac{2}{3}$$

정리하면 $c^2=24$ 이고 $b^2=a^2-c^2=40$ 이다.

그러므로 $a^2+b^2=104$ 이다.

EBS교재

[정답] ②

$\overline{\mathrm{PF'}}=a$, $\overline{\mathrm{PR}}=b$ 라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}=b$ 이고,

$\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PQ}}=a-b$ 이다.

타원의 장축의 길이가 $2\times4=8$ 이므로

타원의 정의에 의하여

$$a+b=8 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{QF'}}=1$ 이므로

$$b-(a-b)=2b-a=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$a=5,\ b=3$$

따라서 $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{PF}}=3$ 이므로 두 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-3,\ 0)$ 이다.

$16-k=3^2$ 이므로 $k=16-9=7$

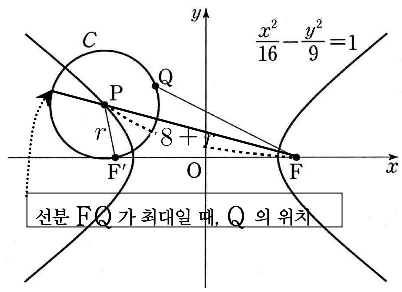
EBS연계 기출문항 2

[정답] ③

원 C 의 반지름의 길이를 r 라 할 때,

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{FP}}-\overline{\mathrm{F'P}}=8$ 이고 $\overline{\mathrm{F'P}}=r$ 이므로 $\overline{\mathrm{FP}}=8+r$ 이다.

선분 FQ 의 길이가 최대일 때의 점 Q 는 그림과 같다.



선분 FQ 의 길이의 최댓값은 $8+2r$ 이므로

$$8+2r=14$$

$$r=3$$

이다. 따라서 원 C 의 넓이는 9π 이다.

EBS교재

[정답] ④

타원 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ 위의 점 P 와 두 초점 F, F′ 에서 타원의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원 C 위의 점 Q 에 대하여

$\overline{\mathrm{FQ}}\ge\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}$ 이고 선분 FQ 의 길이의 최솟값이 4 이므로

$$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$2\overline{\mathrm{PF'}}=6$$

$$\overline{\mathrm{PF'}}=3$$

따라서 구하는 원 C 의 넓이는 9π 이다.

EBS연계 기출문항 3

[정답] 6

$$4x^2+9y^2-18y-27=0$$

$$4x^2+9(y^2-2y+1)-36=0$$

$$4x^2+9(y-1)^2=36$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

초점의 좌표를 $(c,\ 1)$라 하면

$c^2=9-4=5$ 이므로

$c=\sqrt{5}$, $p=\sqrt{5}$, $q=1$

$p^2+q^2=6$

EBS교재

[정답] ③

$y^2+6y-4x+17=0$ 에서

$(y+3)^2=4(x-2)$

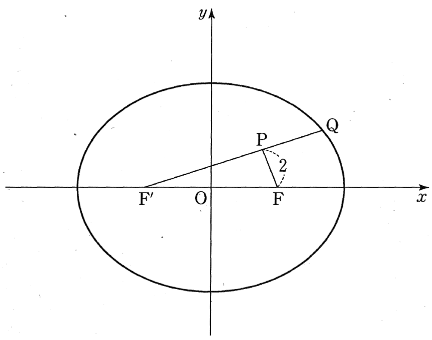
이 곡선은 초점이 $(1,\ 0)$인 포물선 $y^2=4x$ 를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 포물선이므로 구하는 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(3,\ -3)$이다.

따라서 $a=3,\ b=-3$ 이므로 $ab=-9$

EBS연계 기출문항 4

[정답] 22

타원의 장축의 길이는 12이고 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$이다.



삼각형 PFQ의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$

이고 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FF'}}+\overline{\mathrm{F'P}}$

이다. $\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}$는 장축의 길이이므로

$\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}=12$

$\overline{\mathrm{F'F}}=6$

이고 주어진 조건 (가)에 의해 $\overline{\mathrm{PF}}=2$이다.

따라서 두 삼각형의 둘레의 길이의 합은

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FF'}}+\overline{\mathrm{F'P}}$

$=\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{FF'}}+2\overline{\mathrm{PF}}$

$=12+6+4=22$

이다.

EBS교재

[정답] ②

$\overline{\mathrm{FF'}}=c-(-c)=2c$이고, 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=2a$

$a^2-c^2=64$에서 $(a-c)(a+c)=64$

$a-c=4$이므로 $a+c=16$

따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

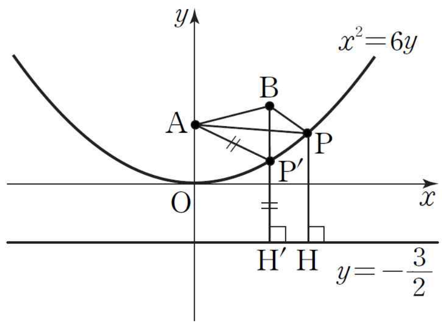
$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'F}}+\overline{\mathrm{PF}}\\&=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{F'F}}\\&=2a+2c\\&=2(a+c)\\&=2\times16\\&=32\end{aligned}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ①

$x^2=6y=4\times\frac{3}{2}y$ 이므로 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$은 이 포물선의 초점이고 준선의

방정식은 $y=-\frac{3}{2}$ 이다.



점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H, 점 B에서 준선에 내린 수선의

발을 H′, 포물선과 만나는 점을 P′이라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$ 이므로 삼

각형 APB의 둘레의 길이 l은

$l=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PH}}$

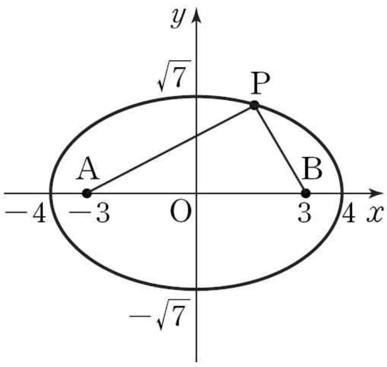
$\geq\frac{\sqrt{17}}{2}+\overline{\mathrm{BP'}}+\overline{\mathrm{P'H'}}$

$$= \frac{\sqrt{17}}{2} + \left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$$

이므로 l의 최솟값은 $\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$ 이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 23



타원 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$ 의 초점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$ 이므로 A, B 는 타원의 두 초점이다.

$\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}} = 2 \times 4 = 8$ 이고 $1 \le \overline{\mathrm{PA}} \le 7$

$$\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PA}} \times (8 - \overline{\mathrm{PA}})$$
$$= -(\overline{\mathrm{PA}} - 4)^2 + 16$$

이므로 $\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PB}}$ 는 $\overline{\mathrm{PA}} = 4$ 일 때 최댓값 16 을 갖고, $\overline{\mathrm{PA}} = 1$ 또는 7 일 때 최솟값 7 을 갖는다. 따라서 $M = 16$, $m = 7$ 이므로

$$M + m = 16 + 7 = 23$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}} - \overline{\mathrm{PF'}} = 2$

이때, $\overline{\mathrm{PF'}} = 3$

$$\overline{\mathrm{PF}} = 3 + 2 = 5$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2 - \overline{\mathrm{FQ}}^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$$

11. 평면곡선의 접선

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

$4n^2 - (4n-1) = (2n-1)^2$ 이므로

타원 $\dfrac{x^2}{4n^2} + \dfrac{y^2}{4n-1} = 1$ 의 초점의 좌표는

$(-2n+1,\ 0)$, $(2n-1,\ 0)$

이때 x 좌표가 양수인 초점은 $\mathrm{F}_n(2n-1,\ 0)$ 이므로 $a_n = 2n-1$

점 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$ 이 타원 위의 점이므로

$$\frac{{a_n}^2}{4n^2} + \frac{{b_n}^2}{4n-1} = 1$$

$$\frac{(2n-1)^2}{4n^2} + \frac{{b_n}^2}{4n-1} = 1$$

$$\frac{{b_n}^2}{4n-1} = \frac{4n-1}{4n^2}$$

${b_n}^2 = \dfrac{(4n-1)^2}{4n^2}$ 이고 $b_n > 0$ 이므로

$$b_n = \frac{4n-1}{2n}$$

주어진 타원 위의 점 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$ 에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{a_n x}{4n^2} + \dfrac{b_n y}{4n-1} = 1$ 이므로

$$\frac{2n-1}{4n^2}x + \frac{1}{2n}y = 1$$

이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점이 각각 A_n, B_n 이므로

$$\mathrm{A}_n\left(\frac{4n^2}{2n-1},\ 0\right),\ \mathrm{B}_n(0,\ 2n)$$

따라서 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ 의 넓이 S_n 은

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{4n^2}{2n-1} \times 2n = \frac{4n^3}{2n-1}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3}{(2n-1)n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n-1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{4}{2} = 2$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

$x = t+1$, $y = t^3 + t^2$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 1,\ \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=3t^2+2t$$

점 $(a+1,\ a^3+a^2)$은 $t=a$에 대응하는 점이므로

점 $(a+1,\ a^3+a^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(a^3+a^2)=(3a^2+2a)\{x-(a+1)\}$

$y=(3a^2+2a)x-(3a^2+2a)(a+1)+a^3+a^2$

$\quad=(3a^2+2a)x-2a^3-4a^2-2a$

이므로 y절편은 $g(a)=-2a^3-4a^2-2a$이다.

이때 $g(1)=-8$이므로

$$\lim_{a\to1}\frac{g(a)+8}{a^2-1}=\lim_{a\to1}\left\{\frac{g(a)-g(1)}{a-1}\times\frac{1}{a+1}\right\}=\frac{1}{2}g'(1)$$

한편, $g(a)=-2a^3-4a^2-2a$에서

$g'(a)=-6a^2-8a-2$이므로

$g'(1)=-16$

따라서 $\frac{1}{2}g'(1)=-8$

[다른 풀이]

$x=t+1,\ y=t^3+t^2$에서 t를 소거하면

$y=(x-1)^3+(x-1)^2$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=3(x-1)^2+2(x-1)$$

따라서 점 $(a+1,\ a^3+a^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(a^3+a^2)=(3a^2+2a)\{x-(a+1)\}$

$y=(3a^2+2a)x-2a^3-4a^2-2a$

이므로 y절편은 $g(a)=-2a^3-4a^2-2a$이다.

따라서

$$\lim_{a\to1}\frac{g(a)+8}{a^2-1}=\lim_{a\to1}\frac{-2a^3-4a^2-2a+8}{a^2-1}$$
$$=\lim_{a\to1}\frac{-2(a-1)(a^2+3a+4)}{(a+1)(a-1)}$$
$$=\lim_{a\to1}\frac{-2(a^2+3a+4)}{a+1}$$
$$=-8$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 40

$f(t)=\sqrt{t}$에서 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$

$x=\ln f(t)$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2t}$

$$y=\frac{2\{f(t)-1\}\{f(t)+1\}}{f(t)}$$
$$=\frac{2[\{f(t)\}^2-1]}{f(t)}=2f(t)-\frac{2}{f(t)}\text{에서}$$

$$\frac{dy}{dt}=2f'(t)+\frac{2f'(t)}{\{f(t)\}^2}$$
$$=2\times\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{2\times\frac{1}{2\sqrt{t}}}{(\sqrt{t})^2}=\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t\sqrt{t}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t\sqrt{t}}}{\frac{1}{2t}}=2\sqrt{t}+\frac{2}{\sqrt{t}}$$

$x=0,\ y=0$일 때 $f(t)=\sqrt{t}=1$에서 $t=1$이므로 주어진 곡선 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값과 같다.

따라서 $m=2\sqrt{1}+\frac{2}{\sqrt{1}}=4$이므로

$10m=10\times4=40$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

$x=f(t),\ y=g(t)$에서

$$\frac{dx}{dt}=f'(t),\ \frac{dy}{dt}=g'(t)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

조건 (가)에서 $f(1)=2$이고,

함수 $f(t)$의 역함수는 $g(t)$이므로 $g(2)=1$

조건 (가)에서 $f'(1)=1$이므로

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{1}=1$$

또 조건 (가)에서 $f'(2)=e^2$이므로

$t=2$ 에 대응되는 곡선 위의 점

$(f(2),\ g(2))$ 에서 접선의 기울기는 $\dfrac{g'(2)}{f'(2)}=\dfrac{1}{e^2}$

따라서 $t=2$ 에 대응되는 곡선 위의 점에서의 접선이 직선 $y=mx$ 와 서로 수직이므로

$$\frac{1}{e^2}\times m=-1 \text{에서 } m=-e^2$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ③

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(4,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식 l 은 $l:\ 4y=2(x+4)$ 이다.

$$\therefore y=\frac{1}{2}x+2$$

포물선의 준선 $x=-1$ 과 접선l 과의 교점 $B\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$이고, 접선$l$ 이 x 축과 만나는 점은 $C(-4,\ 0)$ 이다.

삼각형 BCD 의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BD}\\ &=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}\\ &=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

EBS교재

[정답] ⑤

포물선 $y^2=8x$ 의 준선의 방정식은 $x=-2$ 이고,

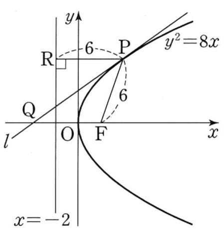
점 P 에서 준선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 R 라 하면 포물선의 정리에 의하여 $\overline{PR}=\overline{PF}=6$ 이다.

점 P 의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ 이라 하면

$$x_1=6-2=4$$

$$y_1{}^2=8\times4=32$$

$$\therefore\ y_1=4\sqrt{2}\ \ (\because\ y_1>0)$$



따라서 점 $P(4,\ 4\sqrt{2})$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$4\sqrt{2}\,y=4(x+4)$, 즉 $x-\sqrt{2}\,y+4=0$

이므로 점 Q 의 좌표는 $(-4,\ 0)$ 이고,

$$\overline{PQ}=\sqrt{8^2+(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{6}$$

$$\overline{QF}=2-(-4)=6$$

따라서 삼각형 PQF 에서

$$\begin{aligned}\cos(\angle PQF)&=\frac{(4\sqrt{6})^2+6^2-6^2}{2\times4\sqrt{6}\times6}\\ &=\frac{96}{48\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ①

포물선의 방정식 $y^2=4x$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면 $2y\dfrac{dy}{dx}=4$이고 정리하면

$$\frac{dy}{dx}=\boxed{\frac{2}{y}}\ (\text{단, } y\neq0)$$

이므로, 점 $A(t^2,\ 2t)$에서의 접선의 방정식을 구하면 $y=\dfrac{1}{t}(x-t^2)+2t$이고 정리하면

$$y=\boxed{\frac{1}{t}}\times x+t \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

$B(\boxed{-1},\ 2t)$이므로 직선 OB 의 방정식은

$$y=\frac{2t}{\boxed{-1}}x \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이다.

㉠, ㉡을 연립하여 점 P 의 좌표를 구하면

$$\left(\boxed{-1}\times\frac{t^2}{2t^2+1},\ \frac{2t^3}{2t^2+1}\right)$$

이다. 따라서

$$f(y)=\frac{2}{y},\ g(t)=\frac{1}{t},\ a=-1$$

이므로

$$f(a)\times g(a)=f(-1)\times g(-1)=2$$

이다.

EBS교재

[정답] ②

$y^2=8x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=8,\ \frac{dy}{dx}=\frac{4}{y}\ (\text{단, } y\neq0)$$

따라서 점 $P(2,\ 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{4}{4}=1$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-4=1\times(x-2)$, 즉 $y=x+2$ 이다.

따라서 점 Q 의 좌표는 $(-2,\ 0)$ 이다.

한편, $y^2=8x=4\times 2x$ 이므로 이 포물선의 초점 F 의 좌표는 $(2,\ 0)$ 이다.

따라서 삼각형 PQF 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2+2)\times 4=8$ 이다.

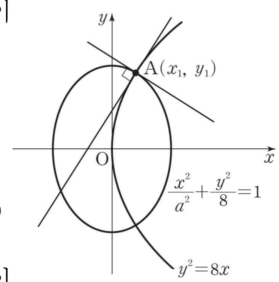
[참고] $y^2=8x=4\times 2x$ 이므로

포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식은 $4y=2\times 2(x+2)$, 즉 $y=x+2$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ①

포물선과 타원의 교점 A 의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ 이라 하자. 점 A 를 지나고 포물선 $y^2=8x$ 와 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{8}=1$ 에 접하는 직선의 방정식은 각각 $y_1y=4(x+x_1)$, $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{8}=1$ 이고 두 직선의 기울기는 각각 $\frac{4}{y_1}$, $-\frac{8x_1}{y_1a^2}$ 이다.



두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{4}{y_1}\times\left(-\frac{8x_1}{y_1a^2}\right)=-1$$

$$\therefore \frac{32x_1}{{y_1}^2a^2}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

그런데 점 $(x_1,\ y_1)$ 이 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$${y_1}^2=8x_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\therefore \frac{32x_1}{8x_1a^2}=1 \qquad \therefore a^2=4$$

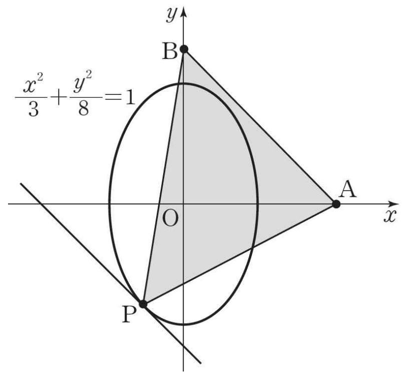
2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

$8x^2+3y^2=24$ 의 양변을 24 로 나누면

$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}=1$ 이다.

삼각형 ABP 의 넓이가 최대가 되는 경우는 그림과 같이 점 P 가 두 점 A, B 를 지나는 직선에 평행한 접선과 타원의 교점 중 제 3 사분면에 있는 점이 되는 경우이다.



이때, 두 점 A, B 를 지나는 직선의 기울기는 -1 이므로 기울기가 -1 인 타원의 접선의 방정식은

$$y=-x\pm\sqrt{3\cdot(-1)^2+8}=-x\pm\sqrt{11}$$

삼각형 ABP 의 넓이가 최대가 되는 경우는 점 P 가 타원과 직선 $y=-x-\sqrt{11}$ 의 접점일 때이다.

직선 $x+y+\sqrt{11}=0$ 과 $\mathrm{A}(4,\ 0)$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|4+0+\sqrt{11}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4+\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$$

$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 밑변으로 하는 삼각형 ABP 의 높이가 $\frac{4+\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$ 일 때 그 넓이가 최대이므로 삼각형 ABP 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times\frac{4+\sqrt{11}}{\sqrt{2}}=8+2\sqrt{11}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{3}(t^2+7t)^{-\frac{2}{3}}\cdot(t^2+7t)'}{3(2t-1)^2\cdot(2t-1)'}$$

$$=\frac{2t+7}{18(2t-1)^2\cdot\sqrt[3]{(t^2+7t)^2}}$$

따라서 $t=1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{9}{18\cdot 1\cdot 4}=\dfrac{1}{8}$

Ⅱ. 평면벡터

12. 벡터의 연산

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

ㄱ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}$

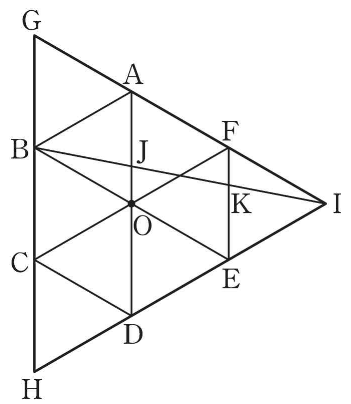
$=\vec{0}$ (참)

ㄴ. $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EA}$

삼각형 ADE 는 $\angle AED=90^{\circ}$ 인 직각삼각형이므로

$|\overrightarrow{EA}|=\overline{EA}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ (참)

ㄷ. 그림과 같이 두 직선 AF, BC 가 만나는 점을 G, 두 직선 BC, DE 가 만나는 점을 H, 두 직선 DE, AF 가 만나는 점을 I 라고 하자.



$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EP}$ 에서

$3\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}$

$=\overrightarrow{IB}$

이므로

$\overrightarrow{EP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

삼각형 GHI 에서 두 점 A, F 는 선분 GI 의 삼등분점이고, 두 점 D, E 는 선분 HI 의 삼등분점이므로 선분 IB 와 두 선분 AD, FE 의 교점을 각각 J, K 라고 하면 $\overrightarrow{KJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

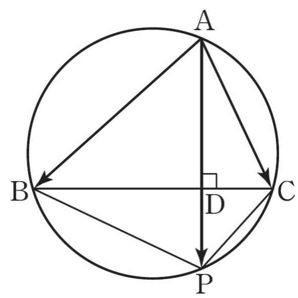
따라서 $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{KJ}$ 이므로 점 P 는 선분 OD 위에 있다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 13

두 선분 AP, BC 의 교점을 D 라고 하자.



$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 에서

$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AB}$는 서로 평행하다.

또 사각형 ABPC 가 원에 내접하고 두 변 AB, CP 가 평행하므로 사각형 ABPC 는 등변사다리꼴이고,

$\overline{AC}=\overline{BP}$

이때 등변사다리꼴 ABPC 에서

$\overline{AD}=\overline{BD}$, $\overline{CD}=\overline{PD}$

이다.

두 직각이등변삼각형 ABD, PCD 는 서로 닮음이고,

$|\overrightarrow{CP}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$ 이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AD}:\overline{PD}=2:1$

이때 $\overline{BC}=3$ 이므로

$\overline{BD}=\overline{AD}=2$, $\overline{CD}=\overline{PD}=1$

직각삼각형 ABD 에서

$\overline{AB}^2=2^2+2^2=8$

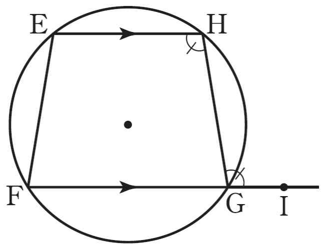
직각삼각형 ADC 에서

$\overline{AC}^2=2^2+1^2=5$

따라서 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=8+5=13$

[참고]

그림과 같이 원 위의 점 E, F, G, H에 대하여 두 직선 EH, FG가 서로 평행할 때,



사각형 EFGH가 원에 내접하므로

$\angle EFG=180^\circ-\angle EHG$ …… ㉠

$\overline{EH}\,/\!/\,\overline{FG}$ 이므로

$\angle HGF=180^\circ-\angle HGI$

$=180^\circ-\angle EHG$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\angle EFG=\angle HGF$

따라서 사각형 EFGH는 등변사다리꼴이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 12

점 $Q(2\sqrt{3},\ 2)$는 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이므로

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}{2-1}=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 에서

$6\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OA}=3(2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=3\overrightarrow{OQ}$

따라서 $|\overrightarrow{OQ}|=\overline{OQ}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$ 이므로

$6\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OA}=3|\overrightarrow{OQ}|=3\times4=12$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 432

$\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=6\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 라 하면 $\overrightarrow{AP}=6\overrightarrow{AD}$ 이고

점 D는 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{BD}=\dfrac{1}{3}\overline{BC}=\dfrac{1}{3}\times6=2$

$\overline{AB}=4,\ \overline{BD}=2,\ \angle ABD=60^\circ$ 이므로

$\angle BDA=90^\circ$

직각삼각형 ABD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BD}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

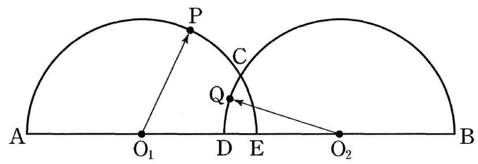
이므로

$\overrightarrow{AP}=6\overrightarrow{AD}=6\overline{AD}=6\times2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

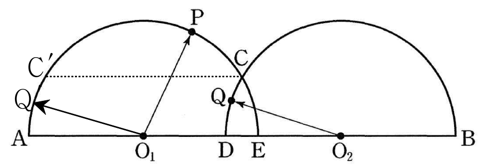
따라서 $|\overrightarrow{AP}|^2=(12\sqrt{3})^2=432$

EBS연계 기출문항 1

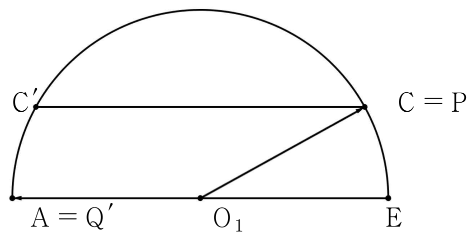
[정답] 19



점 P는 호 AC 위에, 점 Q는 호 DC 위에 있다. 점 C와 Q를 지나고 선분 AE에 평행한 직선이 중심이 O_1인 원과 만나는 점을 각각 C′, Q′라 하면 $\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1Q'}$ 이다.



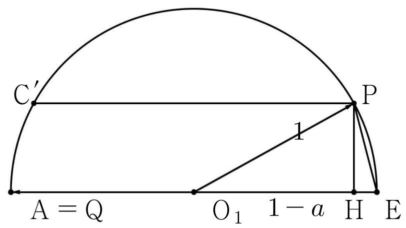
$\overrightarrow{O_1P}$와 $\overrightarrow{O_1Q'}$의 두 벡터가 이루는 각이 가장 클 때 즉, 점 P가 점 C, 점 Q′가 점 A일 때, $|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}|$의 값이 다음과 같이 최소가 된다.



$\overrightarrow{O_1Q'}=\overrightarrow{EO_1}$ 이므로

$|\overrightarrow{O_1Q'}+\overrightarrow{O_1P}|=|\overrightarrow{EO_1}+\overrightarrow{O_1C}|=|\overrightarrow{EC}|=\dfrac{1}{2}$

이다. 점 C에서 선분 AE에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{HE}=a$라 하면



피타고라스 정리에 의해

$$\overline{PH}^2 = \overline{PO_1}^2 - \overline{O_1H}^2 = \overline{PE}^2 - \overline{EH}^2$$

$$1-(1-a)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - a^2$$

$$2a - a^2 = \frac{1}{4} - a^2$$

$$a = \frac{1}{8}$$

$\overline{AH} = 2 - a$, $\overline{AB} = 2 \times \overline{AH}$ 이므로

$$\overline{AB} = 4 - 2a = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

이다. 따라서 $p+q=19$ 이다.

[다른 풀이]

$$\left|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q}\right|^2$$

$$= \left|\overrightarrow{O_1P}\right|^2 + \left|\overrightarrow{O_2Q}\right|^2 + 2\left(\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q}\right)$$

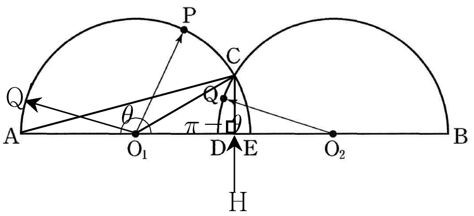
$$= 2 + 2\left(\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q}\right) \geq \frac{1}{4}$$

이므로

$\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q} \geq -\frac{7}{8}$ 이고, $\overrightarrow{O_2Q} = \overrightarrow{O_1Q'}$

이므로

$\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_1Q'} \geq -\frac{7}{8}$ 이다.



두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_1Q'}$ 가 이루는 각의 크기를 θ $(0<\theta<\pi)$ 라 하면

$$\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_1Q'} = \left|\overrightarrow{O_1P}\right|\left|\overrightarrow{O_1Q'}\right|\cos\theta$$

$$= \cos\theta \geq -\frac{7}{8}$$

$0<\theta<\pi$ 에서 $\cos\theta$ 의 값은 감소함수이므로 θ 의 값이 최대일 때, $\cos\theta$ 의 값은 최소가 된다.

따라서 $P=C$, $Q'=A$ 일 때

두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_1Q'}$ 가 이루는 각의 크기를 α 라 하면 $\cos\alpha = -\frac{7}{8}$ 이다.

선분 AB 의 길이를 l 이라고 하면

$$l = 2 \times \overline{AH} = 2\{1+\cos(\pi-\alpha)\}$$

$$= 2\left(1+\frac{7}{8}\right) = \frac{15}{4}$$

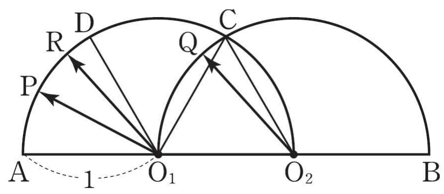
이다. 따라서 $p+q=19$ 이다.

EBS교재

[정답] ③

삼각형 CO_1O_2 는 한 변의 길이가 1 인 정삼각형이므로 $\angle CO_2O_1 = 60^\circ$ 이다.

따라서 호 AC 위에 $\angle DO_1A = 60^\circ$ 인 점을 D 라고 하면 $\overrightarrow{O_2Q} = \overrightarrow{O_1R}$ 를 만족시키는 점 R 는 호 AD 위에 있다.



$\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q} = \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1R}$ 이므로

벡터 $\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1R}$ 의 크기가 최대인 경우는 두 점 P, R 가 일치하는 경우이다. 따라서

$$\left|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1R}\right| \leq \left|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1P}\right|$$

$$= 2\left|\overrightarrow{O_1P}\right|$$

$$= 2 \times 1 = 2$$

이므로 $M=2$ 이다.

벡터 $\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1R}$ 의 크기가 최소인 경우는 $\angle PO_1R$ 의 크기가 최대일 때이며, 이때 점 R 가 점 A 와 일치하고, 점 P 가 점 C 와 일치한다. 따라서

$$\left|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1R}\right| \geq \left|\overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{O_1A}\right|$$

$$= \left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{O_1A}\right| = \left|\overrightarrow{O_1D}\right| = 1$$

이므로 $m=1$

따라서 $Mm = 2 \times 1 = 2$

EBS연계 기출문항 2

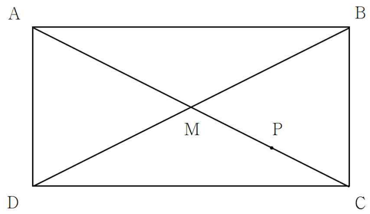
[정답] ⑤

ㄱ. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CA}$ ⋯ ①

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}$ 을 ① 에 대입하면

$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{CP}$ 이다. (참)

ㄴ.



그림에서 B와 D의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{CP}$ 이므로 P는 C와 M의 중점이다.

따라서 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ 이다. (참)

ㄷ. $\triangle ADP : \triangle ADC = \overline{AP} : \overline{AC}$ 이다.

점 P는 선분 AC를 3:1로 내분하는 점이고 삼각형 ADP의 넓이가 3이므로 삼각형 ADC의 넓이는 4이다. 따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 8이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

EBS교재

[정답] ③

ㄱ. $2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ 에서

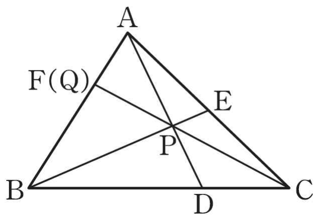
$3\overrightarrow{CP}=-2\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$

$\overrightarrow{CP}=\dfrac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3}$

선분 AB를 1:2로 내분하는 점을 Q라고 하면

$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3}$ 이므로 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PQ}$

즉, 세 점 C, P, Q는 한 직선 위의 점이므로 두 점 F, Q는 일치한다.



따라서 점 F는 선분 AB를 1:2로 내분하는 점이므로 $\overline{AF}:\overline{FB}=1:2$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PQ}$, 즉 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PF}$ 이므로

점 P는 선분 CF의 중점이다.

따라서 $\overrightarrow{BP}=\dfrac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}}{2}$ 이므로

$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}$ (참)

ㄷ. $2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ 에서

$\overrightarrow{BP}=-2\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{CP}$

$=2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PC}$

$=\dfrac{2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PC}}{5}\times 5$

선분 AC를 3:2로 내분하는 점을 R라고 하면 $\overrightarrow{BP}=5\overrightarrow{PR}$

즉, 세 점 B, P, R는 한 직선 위의 점이므로 두 점 E, R는 일치하고, 점 P는 선분 BE를 5:1로 내분하는 점이다.

따라서 삼각형 APE의 넓이가 3이면 삼각형 ABP의 넓이는 15이고, $\overline{AF}:\overline{FB}=1:2$ 이므로 삼각형 AFP의 넓이는 $15\times\frac{1}{3}=5$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

$\overline{AD}:\overline{BC}=3:5$ 이고 $\overline{AD}//\overline{BC}$ 이므로

$\overrightarrow{BC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ …… ㉠

또한, 변 AB를 1:2로 내분하는 점이 E, 변 DC를 3:1로 내분하는 점이 F이므로

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$ …… ㉡

$\therefore \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ($\because$ ㉡)

$=\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)$

$-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

따라서 $a=\frac{5}{12}$, $b=\frac{3}{2}$ 이므로 $ab=\frac{5}{8}$

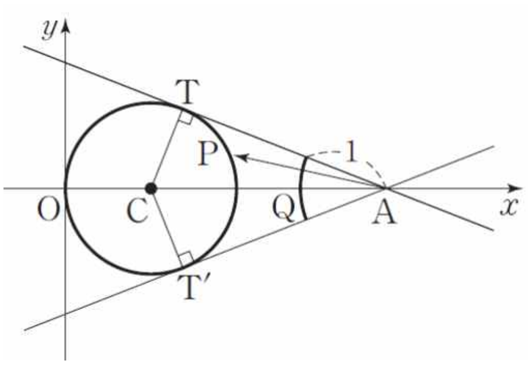
2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

벡터 $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|}$ 는 방향은 $\overrightarrow{AP}$ 와 같고 크기는 1 인 벡터이다

따라서 점 Q 가 나타내는 도형은 중심이 A 이고 반지름의 길이가 1 인 원의 일부이다.

$$(x-\sqrt{3})^2+y^2=3 \quad \cdots \quad ㉠$$



이라 하면 벡터 $\overrightarrow{AP}$ 의 방향은 점 A 에서 원 ㉠에 그은 접선 사이에 존재한다.

점 A 에서 원 ㉠에 그은 두 접선의 접점을 T, T′ 이라 하자.

원 ㉠의 중심 C$(\sqrt{3},\ 0)$에 대하여 선분 CT, CT′ 은 각각 두 접선과 수직이다

$\overline{AC}=2\sqrt{3}$, $\overline{CT}=\sqrt{3}$ 이므로

$$\sin(\angle CAT)=\frac{\overline{CT}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

$\angle CAT=\dfrac{\pi}{6}$ 이고 $\angle TAT'=\dfrac{\pi}{3}$

따라서 점 Q 는 반지름의 길이가 1 고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$ 인 부채꼴의 호 위를 움직이므로 도형의 길이 l 은 $l=\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

ㄱ. 삼각형 ABC 에서

$$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{AC}=3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+\overrightarrow{AC}$$

$$4\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$$

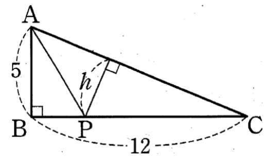
즉, 점 P 는 선분BC 를 1:3 으로 내분하는 점이다. ……㉠

$\therefore\ \triangle ABP:\triangle ACP=1:3$ (참)

ㄴ. $\overline{BC}=12$ 이므로 ㉠에서 $\overline{BP}=3$, $\overline{PC}=9$

$$\triangle ACP=\frac{1}{2}\times 9\times 5=\frac{45}{2} \quad ……㉡$$

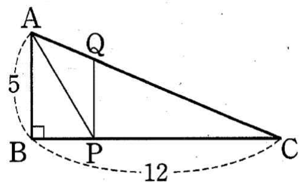
한편, 삼각형 ABC 는 직각삼각형이므로 $\overline{AC}=13$ 이고 점 P 에서 선분 AC 에 이르는 거리를 h 라 하면



$$\triangle ACP=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times h=\frac{1}{2}\times 13\times h \quad ……㉢$$

㉡,㉢에서 $h=\dfrac{45}{13}$ (거짓)

ㄷ. $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=4\times\dfrac{3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}}{4}$ 에서 선분 AC 를 1:3 으로 내분하는 점을 Q 라 하면 $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}}{4}$ 이므로 $\overrightarrow{AB}\mathbin{/\!/}\overrightarrow{PQ}$ 이다.



$\overline{BC}=12$, $\overline{PC}=9$, $\overline{AB}=5$ 이므로

$$|\overrightarrow{PQ}|=9\times\frac{5}{12}=\frac{15}{4}$$

$\therefore\ |3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}|=4|\overrightarrow{PQ}|=15$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄷ이다.

13. 평면벡터의 성분과 내적

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

점 A 의 좌표가 (3, 0) 이므로 $\vec{a}=(3,\ 0)$

점 C 의 좌표는

$$\left(\frac{2\times 0+1\times 3}{2+1},\ \frac{2\times 3+1\times 0}{2+1}\right),$$

즉, $(1,\ 2)$이므로 $\vec{c}=(1,\ 2)$

$\vec{p}=\vec{a}+\vec{c}=(3,\ 0)+(1,\ 2)=(4,\ 2)$

$\vec{q}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\vec{c}=\dfrac{2}{3}(3,\ 0)-(1,\ 2)=(1,\ -2)$

$$x\vec{p}+y\vec{q}=x(4,\ 2)+y(1,\ -2)$$
$$=(4x+y,\ 2x-2y)$$

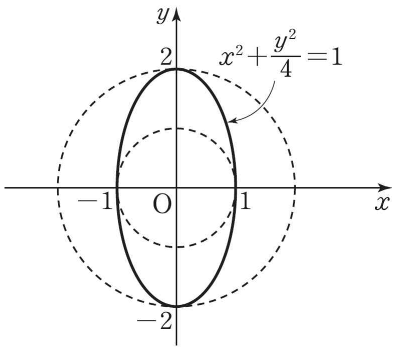
이므로 $|x\vec{p}+y\vec{q}|=2\sqrt{5}$ 에서

$$\sqrt{(4x+y)^2+(2x-2y)^2}=2\sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$16x^2+8xy+y^2+4x^2-8xy+4y^2=20$$
$$20x^2+5y^2=20$$
$$x^2+\frac{y^2}{4}=1$$

따라서 점 $P(x,\ y)$가 나타내는 도형은 장축의 길이가 4, 단축의 길이가 2 인 타원이다.



그러므로 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P 에 대하여 선분 OP 의 길이의 최댓값은 2, 최솟값은 1 이므로 최댓값과 최솟값의 합은 3 이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})$

$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}$

$=(-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}$

$=-|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}$

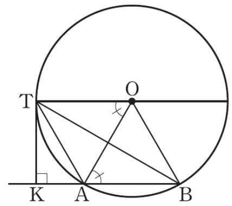
$|\overrightarrow{AB}|^2=4^2=16$ 이므로 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AP}$ 의 값이 최대가 되려면 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}$ 의 값이 최대가 되어야 한다.

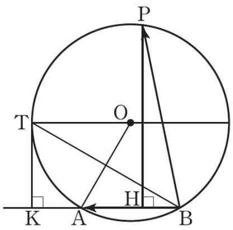
그림과 같이 원 위의 점 P 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BP}|\cos(\angle PBH)$

$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BH}|$

그림과 같이 원의 중심 O 를 지나고 직선 AB 와 평행한 직선이 원과 만나는 한 점을 T, 점 T 에서 선분 AB 의 연장선 위에 내린 수선의 발을 K 라 하면





$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BT}$

$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BT}|\cos(\angle TBK)$

$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BK}|$

원 위를 움직이는 점 P 에 대하여

$|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BH}|\le|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BK}|$이므로

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}\le\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BT}$

즉, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}$ 의 값이 최대가 되도록 하는 점 P 는 점 T 이다.

삼각형 OAB 는 한 변의 길이가 4 인 정삼각형이므로 $\angle OAB=\dfrac{\pi}{3}$

$\overline{OT}\,/\!/\,\overline{AB}$ 이므로 $\angle AOT=\dfrac{\pi}{3}$

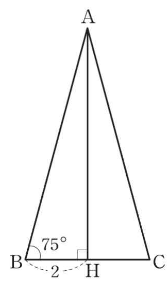
$\overline{OA}=\overline{OT}$ 이고 $\angle AOT=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 AOT 도 한 변의 길이가 4 인 정삼각형이다.

따라서 $\overline{AT}=4$ 이므로 $\overline{AC}=\overline{AT}=4$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 192

꼭짓점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$\overline{BH}=\dfrac{\overline{BC}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AH}$ 이므로 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=0$

그러므로

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HP})$

$=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{HP}$

$=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{HP}$

(i) 점 P 가 점 B 와 일치할 때

$|\overrightarrow{BC}|=4$, $|\overrightarrow{HB}|=2$ 이고, 두 벡터 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{HB}$ 가 이루는 각의 크기는 π 이므로

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HB} = |\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{HB}|\cos\pi$$
$$= 4 \times 2 \times (-1)$$
$$= -8$$

(ⅱ) 점 P 가 점 D 와 일치할 때, 삼각형 BCD 는 $\overline{BC} = \overline{BD}$ 이고 $\angle DBC = 30^\circ$ 인 이등변삼각형이다. 점 D 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 K 라 하면 직각삼각형 DBK 에서 $\overline{BD} = 4$ 이고 $\angle DBK = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{BK} = \overline{BD}\cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{HK} = \overline{BK} - \overline{BH} = 2\sqrt{3} - 2$$

$\angle DHK = \theta$로 놓으면

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HP} = 2\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HD}$$
$$= 2|\overrightarrow{HC}||\overrightarrow{HD}|\cos\theta$$
$$= 2|\overrightarrow{HC}||\overrightarrow{HK}|$$
$$= 2 \times 2 \times (2\sqrt{3} - 2)$$
$$= 8\sqrt{3} - 8$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-8 \le \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AP} \le 8\sqrt{3} - 8$이므로 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 의 최댓값은 $8\sqrt{3} - 8$이고, 최솟값은 -8이다.

따라서 $M = 8\sqrt{3} - 8$, $m = -8$ 이므로

$$(M - m)^2 = (8\sqrt{3})^2 = 192$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ⑤

두 직선의 방향벡터는 각각

$\overrightarrow{u_1} = (4, 3)$, $\overrightarrow{u_2} = (-1, 3)$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|} = \frac{5}{5\sqrt{10}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

이다.

EBS교재

[정답] ③

직선 $x + 2 = \dfrac{y-1}{-5}$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라고 하면 $\vec{u} = (1, -5)$

직선 $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{3}$ 의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라고 하면 $\vec{v} = (2, 3)$

따라서

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{|1 \times 2 + (-5) \times 3|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}\sqrt{2^2 + 3^2}}$$
$$= \frac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] 8

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (4, 1) \cdot (-2, k) = -8 + k = 0$

따라서 $k = 8$ 이다.

EBS교재

[정답] ③

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이려면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$이어야 한다. 즉,

$$(k, -3) \cdot (2, k+2) = 0$$
$$2k - 3(k+2) = 0$$
$$-k - 6 = 0$$
$$k = -6$$

EBS연계 기출문항 3

[정답] ②

$6\vec{a} + \vec{b}$ 와 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(6\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$
$$6|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 = 0$$
$$6 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 9 = 0$$
$$5\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{5}$$

이다.

EBS교재

[정답] ⑤

$$|2\vec{a} + \vec{b}|^2 = (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$$
$$= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$
$$= 4 \times 1^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + (\sqrt{10})^2$$
$$= 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 14$$

따라서 $4\vec{a}\cdot\vec{b}+14=4^2$에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$

벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이려면 $(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$이어야 하므로

$$|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0$$

$$1+\frac{1}{2}(t-1)-10t=0$$

$$\frac{1}{2}-\frac{19}{2}t=0$$

$$t=\frac{1}{19}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

$\overline{AB}\perp\overline{CD}$ 이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ 이다

이때, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=\overline{AB}\cdot\overline{AB}+0\\&=2^2=4\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$\overline{AB}\perp\overline{BC}$ 이고 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$ 이므로

$\overline{AB}\perp$(평면 BCD)

$\therefore\ \overline{AB}\perp\overline{BD}$

따라서 점 D에서 직선 AB에 내린 수선의 발이 B이므로

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overline{AB}^2=2^2=4$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면 각 변의 길이가 2이므로

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$ 이고

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 60^\circ=2$

선분 BC를 1:7과 6:2로 내분하는 점이 각각 D_1, D_6이므로

$$\overrightarrow{AD_1}=\frac{7\vec{a}+\vec{b}}{8},\quad \overrightarrow{AD_6}=\frac{2\vec{a}+6\vec{b}}{8}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{AD_6}&=\frac{1}{64}(7\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+6\vec{b})\\&=\frac{1}{32}(7|\vec{a}|^2+22\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2)\\&=\frac{1}{32}(28+44+12)=\frac{21}{8}\end{aligned}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ③

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}}{1+2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\cos(\angle BAC)=\frac{2^2+3^2-3^2}{2\times2\times3}=\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}&=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=-\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2\\&\quad+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=-\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2\\&\quad+\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos(\angle BAC)\\&=-\frac{8}{3}+3+\frac{2}{3}=1\end{aligned}$$

14. 평면운동

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

점 $P(x, y)$가 점 $(1, 0)$을 출발하여 원 위를 시계 반대 방향으로 매초 두 바퀴씩 일정한 속력으로 회전하므로 t초후 의 점 P의 위치 (x, y)는 $x=\cos 4\pi t$, $y=\sin 4\pi t$

t초 후의 점 P의 속도를 $\vec{v}$, 가속도를 $\vec{a}$라고 하면

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(-4\pi\sin 4\pi t,\ 4\pi\cos 4\pi t)$$

$$\begin{aligned}\vec{a}&=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)\\&=(-16\pi^2\cos 4\pi t,\ -16\pi^2\sin 4\pi t)\end{aligned}$$

따라서 $t=\frac{1}{3}$ 일 때

$$\vec{a}=\left(-16\pi^2\cos\frac{4}{3}\pi,\ -16\pi^2\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$
$$=\left(8\pi^2, 8\sqrt{3}\pi^2\right)$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 49

$$y=\int_0^x \frac{(e^t+e^{-t})(x-t)}{2}dt$$
$$=x\int_0^x \frac{e^t+e^{-t}}{2}dt-\int_0^x \frac{t(e^t+e^{-t})}{2}dt$$

이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x \frac{e^t+e^{-t}}{2}dt+\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}-\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}$$
$$=\left[\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right]_0^x$$
$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

이므로

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$=1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$$
$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$$
$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$$

따라서 구하는 곡선의 길이 l 은

$$l=\int_{\ln 4}^{\ln 8}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$
$$=\int_{\ln 4}^{\ln 8}\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}dx$$
$$=\int_{\ln 4}^{\ln 8}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_{\ln 4}^{\ln 8}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(8-\frac{1}{8}\right)-\left(4-\frac{1}{4}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(4+\frac{1}{8}\right)=\frac{33}{16}$$

즉, $p=16$, $q=33$ 이므로

$p+q=16+33=49$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

$x=t^3-2t$, $y=t^2$ 에서

$\frac{dx}{dt}=3t^2-2$, $\frac{dy}{dt}=2t$ 이고

$\frac{d^2x}{dt^2}=6t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2$ 이다.

따라서 점 P 의 시각 $t=a$ 에서의 속도는 $(3a^2-2,\ 2a)$ 이고 점 P 의 시각 $t=a$ 에서의 가속도는 $(6a,\ 2)$ 이다. 점 P 의 시각 $t=a$ 에서의 속도와 가속도가 서로 수직이므로

$$(3a^2-2,\ 2a)\cdot(6a,\ 2)=0$$
$$(3a^2-2)\times 6a+2a\times 2=0$$
$$2a(9a^2-4)=0$$
$$a=0 \text{ 또는 } a=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } a=\frac{2}{3}$$

이때 $a>0$ 이므로 $a=\frac{2}{3}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 75

$x=\sqrt{t+1}$, $y=\frac{1}{4}(t+1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)$ 에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4(t+1)}$ 이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\right)^2+\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{4(t+1)}\right\}^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{8(t+1)}+\frac{1}{16(t+1)^2}}$$
$$=\sqrt{\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{4(t+1)}\right\}^2}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4(t+1)}$$

그러므로 점 P 가 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 움직인 거

리는

$$\int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^3\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{4(t+1)}\right\}dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\ln(t+1)\right]_0^3$$

$$=\frac{1}{4}\times 3+\frac{1}{4}\ln 4-\left(0+\frac{1}{4}\ln 1\right)$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

따라서 $p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{1}{2}$ 이므로

$$60(p+q)=60\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=60\times\frac{5}{4}=75$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

점 P 가 $t=0$ 에서 $t=\frac{\pi}{2}$ 까지 움직인 거리를 s 라 하면

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{(\cos^2 t\sin^2 t)(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin t\cos t\,dt=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$$

$$=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}cos2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

$\frac{dx}{dt}=1-t$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{t}$ 이므로 구하는 곡선의 길이를 l 이라 하면

$$l=\int_1^5\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_1^5\sqrt{(1-t)^2+(2\sqrt{t})^2}\,dt$$

$$=\int_1^5\sqrt{(t+1)^2}\,dt=\int_1^5(t+1)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_1^5=\left(\frac{25}{2}+5\right)-\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$=16$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

동점 P 의 위치가 $(t^2+1,\ 4t-t^2)$ 일 때, 점 P 의 속도 v 는

$$(v_x,\ v_y)=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(2t,\ 4-2t)$$

이므로 점 P 의 속력은

$$\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(2t)^2+(4-2t)^2}$$

$$=\sqrt{8t^2-16t+16}$$

$$=\sqrt{8(t-1)^2+8}$$

따라서 $t=1$ 일 때 최솟값 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 를 갖는다.

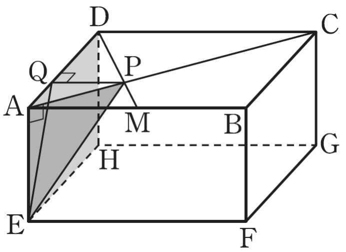
Ⅲ. 공간도형과 공간좌표

15. 공간도형

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

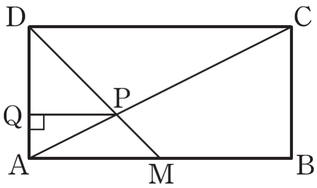
[정답] ①

두 평면 AEHD, BFGC가 서로 평행하므로 α는 직선 PE와 평면 AEHD가 이루는 예각의 크기와 같고, β는 평면 AEP와 평면 AEHD가 이루는 예각의 크기와 같다. 그림과 같이 점 P에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 Q라고 하자.



두 평면 ABCD와 AEHD가 수직이므로 직선 PQ는 평면 AEHD에 수직이다. 따라서 선분 PE의 평면 AEHD 위로의 정사영은 선분 QE이고, 삼각형 AEP의 평면 AEHD 위로의 정사영은 삼각형 AEQ이다.

다음은 직사각형 ABCD를 위에서 본 그림이다.



$\triangle PAM \backsim \triangle PCD$, $\triangle APQ \backsim \triangle ACD$이고

$\overline{AM} : \overline{CD} = 1:2$이므로

$$\overline{AQ} = \frac{1}{3}\overline{AD} = 1$$

$$\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AC}$$

$$= \frac{1}{3} \times \sqrt{3^2+6^2}$$

$$= \sqrt{5}$$

$$\overline{PQ} = \frac{1}{3}\overline{CD} = \frac{1}{3}\times 6 = 2$$

따라서

$$\overline{PE} = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AE}^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\overline{QE} = \sqrt{\overline{AQ}^2 + \overline{AE}^2}$$

$$= \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

이므로

$$\cos\alpha = \frac{\overline{QE}}{\overline{PE}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

$$\cos\beta = \frac{\triangle AEQ}{\triangle AEP}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{AQ}}{\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{AP}}$$

$$= \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}$$

따라서

$$\cos^2\alpha \times \cos^2\beta = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{7}$$

참고)

두 평면 AEP와 AEHD의 교선 AE 위의 점 A에 대하여

$\overline{PA} \perp \overline{AE}$, $\overline{DA} \perp \overline{AE}$이므로 두 평면이 이루는 예각의 크기 β는 각 PAD의 크기와 같다.

한편, 점 P는 선분 AC 위의 점이고 삼각형 ACD는 각 ADC가 직각인 직각삼각형이므로

$$\cos\beta = \cos(\angle PAD)$$

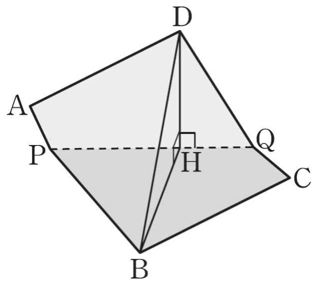
$$= \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

$$= \frac{3}{3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

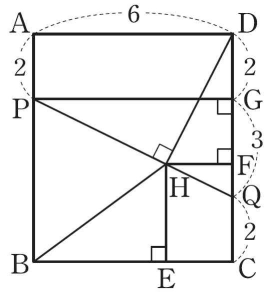
[정답] ③



위의 그림과 같이 점 D에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라고 하면 두 평면 APQD, BCQP가 수직이므로 직선 DH는 평면 BCQP에 수직이다.

따라서 $\overline{DH} \perp \overline{BH}$이므로 삼각형 DBH는 각 DHB가 직각인 직각삼각형이다.

다음 그림과 같이 접어 올린 부분을 다시 편평하게 펼친 후 점 H에서 두 선분 BC, CD에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, 점 P에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 G라고 하자.



직각삼각형 PGQ에서

$\overline{PQ}=\sqrt{6^2+3^2}$

$=3\sqrt{5}$

$\triangle PQG \backsim \triangle DQH$이므로

$\overline{PQ}:\overline{DQ}=\overline{PG}:\overline{DH}$에서

$\overline{DH}=\dfrac{\overline{DQ}\times\overline{PG}}{\overline{PQ}}$

$=\dfrac{5\times 6}{3\sqrt{5}}$

$=2\sqrt{5}$

직각삼각형 DHQ에서

$\overline{QH}=\sqrt{\overline{DQ}^2-\overline{DH}^2}$

$=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}$

$=2\sqrt{5}$

$\triangle DQH \backsim \triangle DHF$이므로

$\overline{DQ}:\overline{DH}=\overline{QH}:\overline{HF}$에서

$\overline{HF}=\dfrac{\overline{DH}\times\overline{QH}}{\overline{DQ}}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{5}$

$=2$

직각삼각형 DHF에서

$\overline{DF}=\sqrt{\overline{DH}^2-\overline{HF}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}$

$=4$

따라서

$\overline{HE}=\overline{FC}$

$=\overline{DC}-\overline{DF}$

$=7-4$

$=3$

$\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{EC}$

$=\overline{BC}-\overline{HF}$

$=6-2$

$=4$

이므로

직각삼각형 BEH에서

$\overline{BH}=\sqrt{3^2+4^2}$

$=5$

이때 접은 도형에서 삼각형 DBH는 각 DHB가 직각인 직각삼각형이므로

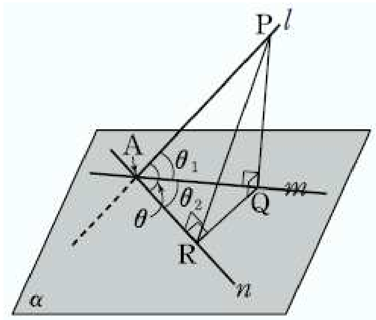
$\overline{BD}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{BH}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+5^2}$

$=3\sqrt{5}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ⑤



직선 l 위의 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 Q라 하면 점 Q는 직선 m 위에 있다. 점 Q에서 직선 n에 내린 수선의 발을 R라 하면 $\overline{PQ}\perp\alpha$, $\overline{QR}\perp n$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PR}\perp n$이다.

따라서 세 직각삼각형 APR, AQR, APQ에서

$\cos\theta=\cos(\angle PAR)$

$=\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AQ}}\times\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}=\cos\theta_2\cos_1$

이므로

$\cos\theta=\sin\theta_1\sin\theta_2+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\left(0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}, 0<\theta_2<\dfrac{\pi}{2}\right)$에서

$\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

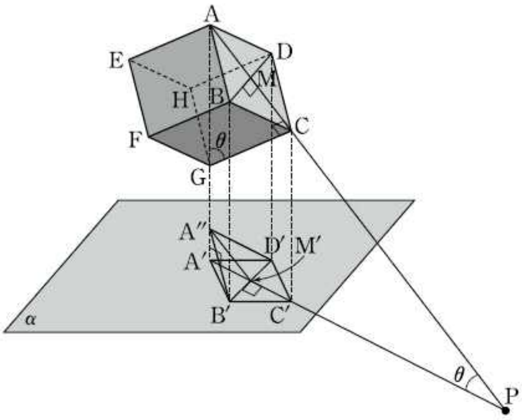
따라서 $\cos(\theta_1+\theta_2)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ (0<\theta_1+\theta_2<\pi)$

이므로

$$16\sin(\theta_1+\theta_2) = 16\sqrt{1-\cos^2(\theta_1+\theta_2)}$$
$$= 16\sqrt{1-\frac{2}{16}}$$
$$= 4\sqrt{14}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④



$\overline{BC}\perp\overline{AC}$, $\overline{BD}\perp\overline{CG}$이므로 평면 AGC와 직선 BD가 서로 수직이다. 따라서 $\overline{BD}\perp\overline{AG}$ 이고 $\alpha\perp\overline{AG}$이므로 $\alpha /\!/ \overline{BD}$이다. 정사각형 ABCD의 평면 α 위로의 정사영을 사각형 A′B′C′D′이라 하면 $\overline{BD} = \overline{B'D'}$이고 사각형 A′B′C′D′은 마름모이다. 선분 BD를 선분 B′D′과 일치하도록 삼각형 ABD를 평행이동할 때 점 A는 A″으로, 선분 BD의 중점 M이 선분 B′D′의 중점 M′으로 옮겨진 다고 하자. 평면 ABCD와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

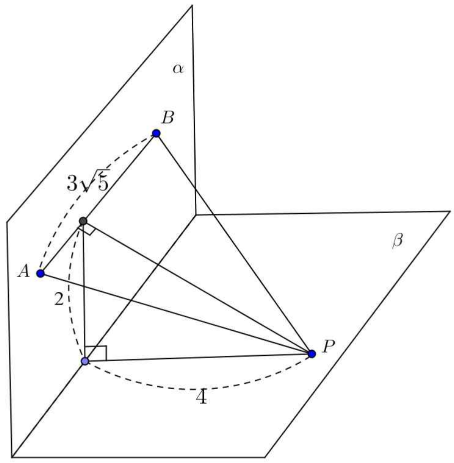
$\theta = \angle A''M'A'$이므로 선분 AC의 연장선과 선분 A′C′의 연장선이 만나는 점 P에 대하여 $\theta = \angle APA'$이다.

따라서 $\angle AA'P = \angle ACG = \frac{\pi}{2}$ 인 두 직각삼각형 A′PA, CGA에서 $\angle AGC = \theta$이므로 $\cos\theta = \frac{\overline{CG}}{\overline{AG}} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 따라서 정사각형 ABCD의 넓이가 $4^2 = 16$이므로 정사각형 ABCD의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$$16\times\cos\theta = 16\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] 15



그림에서 △ABP의 높이는

$\sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로 △ABP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times2\sqrt{5} = 15$

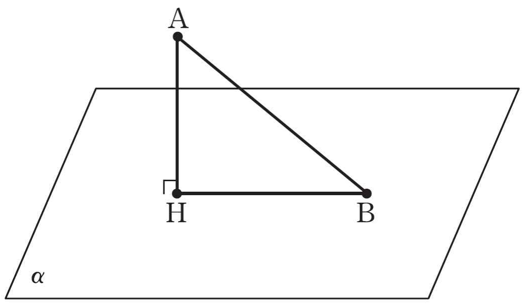
EBS교재

[정답] 20

$\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2+(2+1)^2+(0-1)^2} = \sqrt{26}$ 이다.

점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H이므로

$$\overline{AH} = \frac{|2\times2-1+1+2|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$



직각삼각형 AHB에서

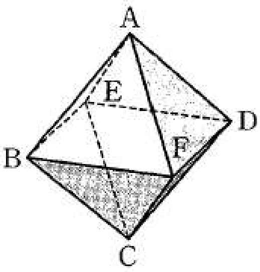
$\overline{BH} = \sqrt{(\sqrt{26})^2-(\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{BH}^2 = 20$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

ㄱ. (참) 전개도로 만들어진 정팔면체는 다음과 같으므로 참이다.



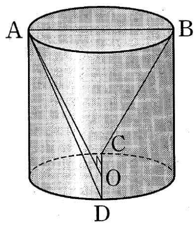
ㄴ. (참) $\overline{DE}$를 $\overline{BF}$로 평행이동하면 $\triangle ABF$는 정삼각형이므로 $\overline{AB}$와 $\overline{BF}$가 이루는 각의 크기를 60° 이다.

ㄷ. (참) 평면 ABF와 평면 CDE가 서로 평행하므로 평면 ABF 위의 선분 AB와 평면 CDE는 평행하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

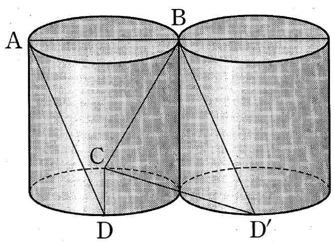
[정답] ②



선분 CD의 중점을 O라 하면

$\overline{AO} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{1^2+(\sqrt{5})^2} = \sqrt{6}$



그림과 같이 선분 AD를 평행이동 시킨 선분을 BD′이라 하면 두 직선 AD, BC가 이루는 각의 크기는 두 직선 BD′, BC가 이루는 각의 크기와 같다.

삼각형 BCD′에서

$\overline{BC} = \overline{BD'} = \sqrt{6}$, $\overline{CD'} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{6+6-8}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ⑤

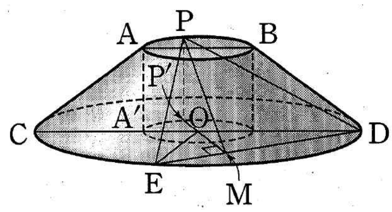
두 점 A, P에서 반지름의 길이가 6인 밑면으로의 정사영을 각각 A′, P′이라 하자.

직각삼각형 ACA′에서

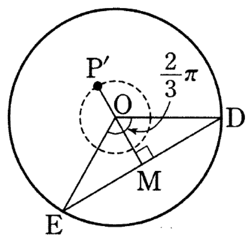
$\overline{AC} = 5$, $\overline{A'C} = 6-2 = 4$

$\therefore\ \overline{AA'} = \sqrt{5^2-4^2} = 3$

점 P′에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PM} \perp \overline{DE}$ 이다.



따라서 삼각형 PED의 넓이의 최댓값은 $\overline{P'M}$의 길이가 최대일 때이다.



$\overline{OD} = 6$, $\angle MOD = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$\overline{DM} = 3\sqrt{3}$ 이다. $\therefore\ \overline{DE} = 6\sqrt{3}$

삼각형 ODE에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{OM} = \frac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{OE}\times\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times\overline{OM} = \frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore\ \overline{OM} = 3$

따라서 $\overline{P'M}$의 최댓값은 5이므로 그때의 $\overline{PM} = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$ 이고

삼각형의 PED 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times\sqrt{34}=3\sqrt{102}$$

Ⅲ. 공간도형과 공간좌표

16. 공간좌표

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

두 점 A, B 에서 같은 거리에 있는 xy 평면 위의 점을 Q 라 하고 점 Q 의 좌표를 Q$(a,\ b,\ 0)$ 이라고 하자.

$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$, 즉 $\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{BQ}}^2$ 이면

$(a-2)^2+(b-3)^2+4=(a-3)^2+(b-4)^2+16$

$a^2-4a+b^2-6b+17=a^2-6a+b^2-8b+41$

$2a+2b=24$

$a+b=12$

따라서 점 Q 의 좌표를 Q$(a,\ 12-a,\ 0)$ 이라고 하면

$\overline{\mathrm{CQ}}^2$

$=\{a-(-2)\}^2+\{(12-a)-2\}^2+(0-1)^2$

$=2a^2-16a+105$

$=2(a-4)^2+73$

이므로 $a=4$ 일 때 선분 CQ 의 길이가 최소가 된다.

즉, 점 P 의 좌표는 P$(4,\ 8,\ 0)$ 이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{4^2+8^2+0^2}=4\sqrt{5}$$

[참고]

(1) 좌표공간의 두 점 A, B 에서 같은 거리에 있는 xy 평면 위의 점들의 집합은 선분 AB 의 중점을 지나고 직선 AB 에 수직인 평면과 xy 평면의 교선이다.

(2) 공간의 직선 l 위의 점 중에서 직선 l 위에 있지 않은 점 C 에서의 거리가 최소인 점은 점 C 에서 직선 l 에 내린 수선의 발이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 150

구 S : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-2az+b=0$ 이 점 $(-1,\ 1,\ 1)$ 을 지나므로

$1+1+1+6-2-2a+b=0$

$b=2a-7$

따라서 구 S 의 방정식은

$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-a)^2=a^2-b+10$

$(a-3)^2+(y-1)^2+(z-a)^2=a^2-2a+17\cdots$ ㉠

방정식 ㉠에 $x=0$ 을 대입하면

$(y-1)^2+(z-a)^2=a^2-2a+8\cdots\cdots$ ㉡

방정식 ㉠에 $y=0$ 을 대입하면

$(x-3)^2+(z-a)^2=a^2-2a+16\cdots\cdots$ ㉢

방정식 ㉠에 $z=0$ 을 대입하면

$(x-3)^2+(y-1)^2=-2a+17\ \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 모든 자연수 a 에 대하여

$a^2-2a+8=(a-1)^2+7>0$

㉢에서 모든 자연수 a 에 대하여

$a^2-2a+16=(a-1)^2+15>0$

따라서 구 S 가 조건 (나)를 만족하려면 ㉣에서

$-2a+17<0$

이어야 한다.

$$a>\frac{17}{2}$$

이때 구 S 가 yz 평면, zx 평면과 각각 만나서 생기는 두 원의 넓이의 합을 $f(a)$ 라고 하면

$f(a)=(a^2-2a+8)\pi+(a^2-2a+16)\pi$

$=(2a^2-4a+24)\pi$

$=\{2(a-1)^2+22\}\pi\quad\left(단,\ a>\frac{17}{2}\right)$

이고, a 는 자연수이므로 $f(a)$ 는 $a=9$ 일 때 최솟값을 갖는다.

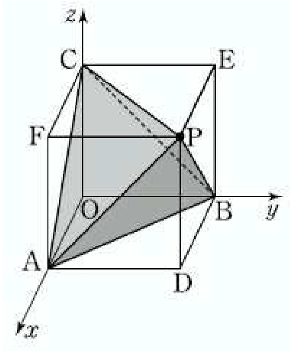
따라서

$$f(9)=(2\times 8^2+22)\pi=150\pi$$

이므로 k 의 최솟값은 150 이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①



점 $P(a, b, c)$에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하면

$A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$,

$D(a, b, 0)$, $E(0, b, c)$, $F(a, 0, c)$이다. 이때 사면체 PABC의 부피를 V라 하면 V는 직육면체 CEPE − OADB의 부피에서 4개의 사면체 OABC, DABP, EBCP, FCAP의 부피의 합을 뺀 것과 같다. 4개의 사면체 OABC, DABP, EBCP, FCAP의 부피는 모두

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a\times b\times c$이므로

$$V = a\times b\times c - \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a\times b\times c\times 4$$

$$= a\times b\times c\times\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{a\times b\times c}{3} = 35$$

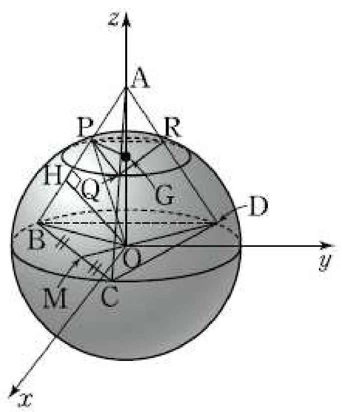
$a\times b\times c = 3\times 5\times 11$ 따라서

$a = 3, b = 5, c = 11$이므로

$$a+b+c = 3+5+11 = 19$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②



선분 BC의 중점을 M이라 하면

$\overline{BC} = 2\overline{BM} = 2\times\overline{OB}\cos 30^\circ = \sqrt{3}$ 이므로

정사면체 ABCD의 모든 모서리의 길이는 $\sqrt{3}$이다. 따라서

$\overline{OA} = \sqrt{\overline{AB}^2-\overline{OB}^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$이다.

정삼각형 PQR의 무게중심을 G라 하면 점 G는 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심이고 세 점 A, G, O는 한 직선 위에 있다. 서로 닮음인 두 삼각형 AGP, AOB에서

$\overline{AG} : \overline{AO} = \overline{AP} : \overline{AB}$

$$\overline{AG} : \sqrt{2} = \overline{AP} : \sqrt{3}$$

$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\overline{AP}$$

한편, 삼각형 OBP는 $\overline{OB} = \overline{OP}$인 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 직각삼각형 OBH, OBA에서

$$\overline{BH} = \overline{OB}\cos(\angle ABO)$$

$$= \overline{OB}\times\frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = 1\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서

$$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{BP} = \overline{AB} - 2\overline{BH}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{이고}$$

$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\overline{AP} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

따라서 직각삼각형 AGP에서

$$\overline{GP} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{AG}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{9}-\frac{2}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

이므로 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{3}$ 이다.

EBS연계 기출문항 1

[정답] ④

$\triangle ABC$ 의 무게중심을 G 라 하면

$G\left(\frac{a+1+1}{3}, \frac{0+b+1}{3}, \frac{5-3+1}{3}\right)$
$= (2,2,1)$

$\frac{a+2}{3}=2,\ \frac{b+1}{3}=2$

$a=4, b=5$

$\therefore a+b=4+5=9$

EBS교재

[정답] ②

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{3-1+a}{3},\ \frac{0+6+(a-1)}{3},\ \frac{2+3+(a+3)}{3}\right)$

즉, $\left(\frac{a+2}{3},\ \frac{a+5}{3},\ \frac{a+8}{3}\right)$이다.

점 G는 zx 평면 위의 점이므로 점 G의 y 좌표는 0이다.

따라서 $\frac{a+5}{3}=0$에서 $a=-5$이다.

EBS연계 기출문항 1

[정답] ①

내분점의 x 좌표는 $\frac{14+1}{3}=\frac{15}{3}=5$, 내분점의 y 좌표는 $\frac{0+3}{3}=1$, 내분점의 z 좌표는 $\frac{6-6}{3}=0$ 이다. 그러므로 내분점의 좌표는 (5, 1, 0)이다. 따라서 성분의 합은 $5+1=6$이다.

EBS교재

[정답] ①

두 점 A(3, 1, −1), B(−3, 4, 2)를 잇는 선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times(-3)+2\times3}{1+2},\ \frac{1\times4+2\times1}{1+2},\ \frac{1\times2+2\times(-1)}{1+2}\right)$

즉, (1, 2, 0)이므로 $a+b+c=1+2+0=3$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+k=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=26-k$ …… ㉠

㉠이 구가 되기 위해서는 $\sqrt{26-k}>0$, 즉

$k<26$ …… ㉡

한편, 구의 중심의 좌표가 (−1, 3, 4)이고, 구 ㉠이 zx 평면과 만나기 위해서는 구의 반지름의 길이가 구의 중심과 zx 평면 사이의 거리보다 크거나 같아야 하므로 $\sqrt{26-k}\ge 3$, 즉

$26-k\ge 9$ 에서 $k\le 17$ …… ㉢

또한, 구 ㉠이 xy 평면과 만나지 않으려면 구의 반지름의 길이가 구의 중심과 xy 평면사이의 거리보다 작아야 하므로 $\sqrt{26-k}<4$, 즉

$26-k<16$ 에서 $k>10$ …… ㉣

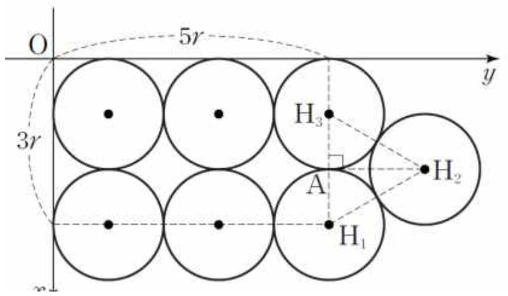
㉡, ㉢, ㉣에서 $10<k\le 17$

자연수 k의 최솟값은 11, 최댓값은 17 이므로 그 합은 28 이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

다음 그림은 크기가 같은 일곱 개의 구의 xy 평면 위로의 정사영이다.



구의 반지름의 길이를 r, 구 G_6의 중심 P에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 그림에서 $H_1(3r,\ 5r,\ 0)$이고 $\overline{PH_1}=r$이므로 점 P의 좌표는 $P(3r,\ 5r,\ r)$이다. 원점에서 구 G_6의 중심 P까지의 거리가 $\sqrt{70}$ 이므로

$\sqrt{9r^2+25r^2+r^2}=\sqrt{70}$ 에서 $\sqrt{35}\,r=\sqrt{70}$

$\therefore r=\sqrt{2}$

두 구 G_7, G_3의 중심에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 각각 H_2, H_3 이라하면 삼각형 $H_1H_2H_3$은 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 정삼각형이다. 점 H_2에서 선분 H_1, H_3에 내린 수선의 발을 A라 하면 점 A의 x 좌표는 $2r=2\sqrt{2}$ 이다. 직각삼각형 AH_1H_2에서

$\angle AH_1H_2=60^\circ$, $\overline{H_1H_2}=2\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{AH_2}=\overline{H_1H_2}\sin60^\circ=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$

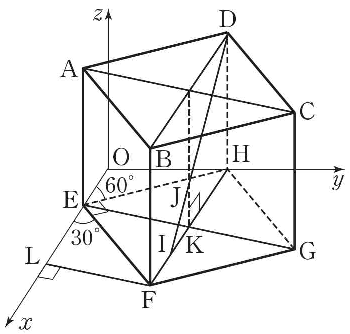
따라서 구 G_7 의 중심의 좌표는

$(2\sqrt{2},\ 5\sqrt{2}+\sqrt{6},\ \sqrt{2})$ 이다.

$\therefore a+b+c=8\sqrt{2}+\sqrt{6}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②



삼각형 OEH에서 $\angle OEH=60^\circ$,

$\overline{EH}=2$이므로

$\overline{EO}=1$, $\overline{HO}=\sqrt{3}$ $\therefore$ $H(0,\ \sqrt{3},\ 0)$

또한 $\overline{DH}=2$이므로 $D(0,\ \sqrt{3},\ 2)$

꼭짓점 F에서 x축에 내린 수선의 발을 L이라 하면

삼각형 ELF에서 $\angle FEL=30^\circ$ 이므로

$\overline{EL}=\overline{EF}\cos30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{FL}=\overline{EF}\sin30^\circ=2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\overline{EO}=1$이므로 $F(1+\sqrt{3},\ 1,\ 0)$

점 I는 선분 FH를 1 : 3으로 내분하는 점이므로

$I\left(\frac{3(1+\sqrt{3})}{4},\ \frac{3+\sqrt{3}}{4},\ 0\right)$

선분 EG와 선분 FH의 교점을 K라 하면 선분 DI가 평면 AEGC와 만나는 점은 그림에서 점 J이고 $\overline{JK}\perp\overline{FH}$이다.

또한, $\overline{IK}:\overline{KH}=1:2$이므로

삼각형의 닮음에 의하여 $\overline{IJ}:\overline{JD}=1:2$

그러므로 점 J는 선분 ID를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$J\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{2}{3}\right)$

$\therefore\ a+b+c=\frac{5}{3}+\sqrt{3}$

Ⅲ. 공간도형의 방정식

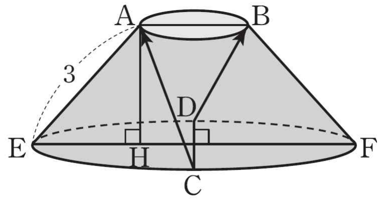
17. 공간벡터

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

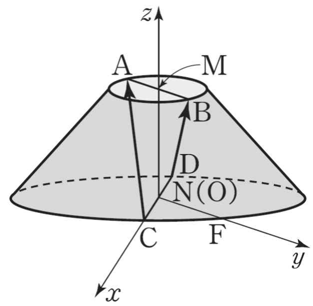
[정답] ④

점 A에서 지름 CD를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{EH}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$



두 지름 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라고 하자.



그림과 같이 점 N을 원점으로 하고, 세 반직선 NC, NF, NM을 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 하는 좌표공간을 설정하면 네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각 $A(0, -1, \sqrt{5})$, $B(0,\ 1,\ \sqrt{5})$, $C(3,\ 0,\ 0)$, $D(-3,\ 0,\ 0)$이므로

$\overrightarrow{CA}=(0,\ -1,\ \sqrt{5})-(3,\ 0,\ 0)=(-3,\ -1,\ \sqrt{5})$

$\overrightarrow{DB}=(0,\ 1,\ \sqrt{5})-(-3,\ 0,\ 0)=(3,\ 1,\ \sqrt{5})$

따라서

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{DB}|}$

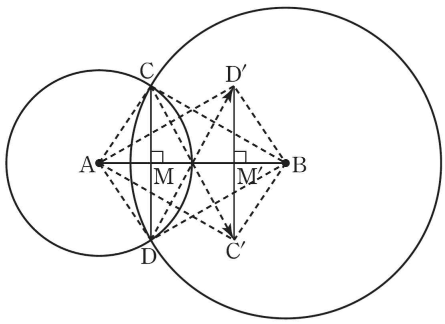
$$= \frac{-3\times3+(-1)\times1+\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{9+1+5}\,\sqrt{9+1+5}}$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{15}\,\sqrt{15}} = -\frac{1}{3}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 6

구 S_1 은 중심이 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$ 이고 반지름의 길이가 5 이고, 구 S_2 는 중심이 점 $\mathrm{B}(0,\ 6,\ 8)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{65}$ 이다. 두 구 S_1, S_2 를 두 점 A, B 를 지나는 평면으로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 두 원의 교점을 각각 C, D 라 하고 두 선분 AB, CD 의 교점을 M 이라고 하면 두 구 S_1, S_2 가 만나서 생기는 원 C는 중심이 M 이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CM}}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ 이므로 $\overline{\mathrm{AM}} = x$ 라고 하면 $\overline{\mathrm{MB}} = 10-x$ 이고, $\overline{\mathrm{CM}} = y$ 라고 하자.

두 직각삼각형 CAM, CMB 에서

$x^2+y^2=25$ …… ㉠

$(10-x)^2+y^2=65$ …… ㉡

㉠− ㉡에서 $20x-100=-40$, $x=3$

$x=3$ 을 ㉠에 대입하면 $y=4$

위의 그림과 같이 점 P 가 점 C 의 위치에 있을 때 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$ 을 만족시키는 점 C′를 잡고, 점 P 가 점 D 의 위치에 있을 때 $\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{DD'}}$ 을 만족시키는 점 D′을 잡으면 중심이 M 이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CM}}$ 인 원 C 위의 점 P 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 를 만족시키는 점 Q 가 나타내는 도형 C' 은 두 점 C′, D′을 지름의 양 끝점으로 하는 원이 된다.

이 때 두 원 C, C' 을 포함하는 평면을 각각 α, β 라고 하면, α, β 는 서로 평행하다.

선분 C′D′의 중점을 M′이라고하면 $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{BM'}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BM'}} = 3$ 이고 $\overline{\mathrm{C'D'}} = 8$ 이다.

중심이 M′이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{C'M'}}$ 인 원 위를 움직이는 두 점 S, T 에 대하여 선분 ST 의 중점을 X 라고 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{BS}}+\overrightarrow{\mathrm{BT}}| = 2|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|$ 이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{BS}}+\overrightarrow{\mathrm{BT}}|$ 의 값은 두 점 S, T 가 지름의 양 끝점이 될 때 최소이다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{BS}}+\overrightarrow{\mathrm{BT}}|$ 의 최솟값은 $2\overline{\mathrm{BM'}} = 6$ 이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

점 M 이 선분 DF 를 2 : 1로 내분하므로

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{2+1} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FH}}}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BF}} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{EH}}-\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BF}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{EH}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{EF}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{BM}} = p\overrightarrow{\mathrm{AC}}+q\overrightarrow{\mathrm{AF}}+r\overrightarrow{\mathrm{AH}}$

$= p(\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}})+q(\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}})+r(\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}})$

$= (q+r)\overrightarrow{\mathrm{BF}}+(r+p)\overrightarrow{\mathrm{EH}}+(p+q)\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$p+q=-\frac{1}{3},\ q+r=\frac{2}{3},\ r+p=\frac{1}{3}$$

세 식을 연립하여 풀면

$$p=-\frac{1}{3},\ q=0,\ r=\frac{2}{3}$$

따라서 $p^2+q^2+r^2=\frac{5}{9}$

[다른 풀이]

정육면체 ABCD−EFGH 의 한 모서리의 길이를 a라 하고, 점 H를 원점, 직선 HE 를 x축, 직선 HG 를 y축, 직선 HD 를 z축으로 하는

좌표공간을 설정하면 꼭짓점 A, B, C, D, F 의 좌표는
$A(a,\ 0,\ a)$, $mrB(a,\ a,\ a)$, $C(0,\ a,\ a)$, $D(0,\ 0,\ a)$, $F(a,\ a,\ 0)$이다. 따라서 선분 DF 를 2 : 1로 내분하는 점 M 의 좌표는

$$M\left(\frac{2}{3}a,\ \frac{2}{3}a,\ \frac{2}{3}a\right)$$
$$\overrightarrow{BM}=\left(-\frac{a}{3},\ -\frac{a}{3},\ -\frac{2}{3}a\right)$$
$$\overrightarrow{AC}=(-a,\ a,\ 0)$$
$$\overrightarrow{AF}=(0,\ a,\ -a)$$
$$\overrightarrow{AH}=(-a,\ 0,\ -a)$$

이므로

$\overrightarrow{BM}=p\overrightarrow{AC}+q\overrightarrow{AF}+r\overrightarrow{AH}$ 에서

$\left(-\frac{a}{3},\ -\frac{a}{3},\ -\frac{2}{3}a\right)=p(-a,\ a,\ 0)+q(0,\ q,\ -a)$
$+r(-a,\ o,\ -a)$

즉,

$-\frac{a}{3}=-(p+r)a,\ \frac{a}{3}=(p+q)a,\ \frac{2}{3}a=-(q+r)a$

이므로

$$p+q=-\frac{1}{3},\ q+r=\frac{2}{3},\ r+p=\frac{1}{3}$$

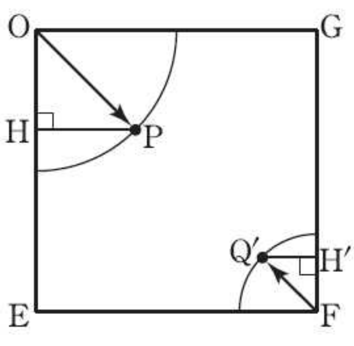
세 식을 연립하여 풀면

$$p=-\frac{1}{3},\ q=0,\ r=\frac{2}{3}$$

따라서 $p^2+q^2+r^2=\frac{5}{9}$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④



정육면체 ABCD − EFGO 에서
$F(4,\ 4,\ 0)$, $D(0,\ 0,\ 4)$이다.

$\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{BQ}=\vec{0}$에서
$\overrightarrow{OP}=-2\overrightarrow{BQ}$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{BQ}$ 는 서로 평행하고, $|\overrightarrow{OP}|=2|\overrightarrow{BQ}|=2$이므로 $|\overrightarrow{BQ}|=1$이다.
따라서 직선 OP 와 x축이 이루는 ∠EOP 의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면 직선 BQ 와 x축이 이루는 ∠CBQ 의 크기도 θ이다.
또한 점 P 에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OPH 에서

$$\overline{OH}=\overline{OP}\times\cos\theta=2\cos\theta$$
$$\overline{PH}=\overline{OP}\times\sin\theta=2\sin\theta$$

이므로 $P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 0)$이다. 또한 점Q 에서 평면 EFGO 에 내린 수선의 발을 Q′이라 하고 점 Q′에서 x축에 평행한 직선 FG 에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 직각삼각형 FQ′H′에서
$\overline{FH'}=\overline{FQ'}\times\cos\theta,\ \overline{Q'H'}=\overline{FQ'}\times\sin\theta=\sin\theta$
이므로 $Q(4-\cos\theta,\ 4-\sin\theta,\ 4)$이다.
따라서

$$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OP}$$
$$=(0,\ 0,\ 4)-(2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 0)$$
$$=(-2\cos\theta,\ -2\sin\theta,\ 4)$$
$$\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OQ}$$
$$=(4,\ 4,\ 0)-(4-\cos\theta,\ 4-\sin\theta,\ 4)$$
$$=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ -4)$$

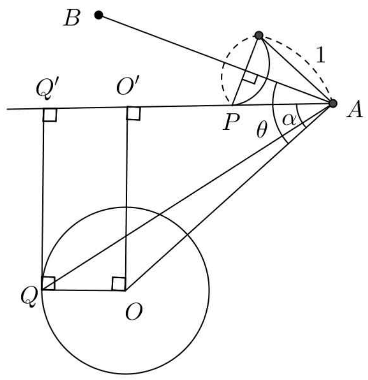
이므로

$$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{QF}$$
$=(-2\cos\theta,\ -2\sin\theta,\ 4)\cdot(\cos\theta,\ \sin\theta,\ -4)$
$=-2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-16=-18$

EBS연계 기출문항 1

[정답] 50

$\overline{AP}=1$이고 $\angle BAP=\frac{\pi}{6}$이므로 P 는 직선AB를 축으로 하는 원뿔의 밑면 위에 존재한다. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 의 값이 최대가 되기 위해서는 점 P 가 구와 최대한 가까워야 하므로 $\overline{AB}$ 와 구의 중심 O 를 포함하는 평면으로 구를 자른 단면 위에 점 P 가 있어야 한다.



$\angle BAO = \theta$, $\angle PAO = \alpha$라 하면

$\alpha = \theta - \dfrac{\pi}{6}$이다. 원 위의 점Q와 중심 O 에서 직선AP에 내린 수선의 발을 각각 Q′, O′라 하자.

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overline{AQ}\, cos\theta = \overline{AQ'}$이므로 이 값이 최대가 되기 위해서는 점 Q는 직선AP 위의 점에서 수직인 직선을 그었을 때 원과 접하는 직선과의 교점 중 A에서 먼 점이다.

$\overline{OA} = 3$이므로

$\overline{AQ'} = 1 + \overline{AO'} = 1 + 3\cos\alpha$이다.

한편, $\overline{OB} = \sqrt{15}$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{9+12-15}{2\times3\times2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

이고 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$이다.

그래서

$$\cos\alpha = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{3+\sqrt{33}}{12}$$

그러므로

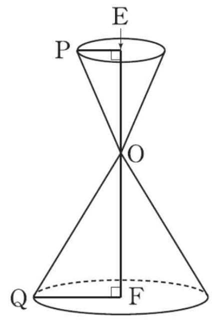
$\overline{AQ'} = 1 + 3\cos\alpha = \dfrac{9+\sqrt{33}}{4}$이 되고

$a = \dfrac{9}{4}, b = \dfrac{1}{4}$이므로

$16(a^2 + b^2) = 50$이다.

EBS교재

[정답] ②



그림과 같이 작은 원뿔의 밑면의 중심을 E, 큰 원뿔의 밑면의 중심을 F 라 하자.

이때 $\overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{FQ}$, $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{EP}$ 이므로

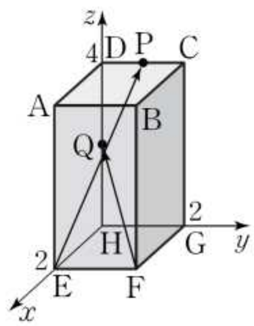
$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EP}) \cdot (\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FQ})$$
$$= \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{FQ} + \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{FQ}$$
$$= \sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \cos\pi + 0 + 0 + \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{FQ}$$
$$= -\sqrt{15} + \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{FQ}$$

이때 $|\overrightarrow{EP}| = 1$, $|\overrightarrow{FQ}| = 2$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{FQ}$가 서로 평행할 때, $\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{FQ}$는 최댓값 $1 \times 2 = 2$를 갖는다.

따라서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$의 최댓값은 $2 - \sqrt{15}$ 이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③



그림과 같이 꼭짓점 H를 원점, 세 반직선 HE, HG, HD를 각각 x축, y축 z축의 양의 방향으로 하는 좌표공간에 직육면체 ABCD − EFGH를 올려놓으면 네 점 E, P, F, Q의 좌표는 E$(2, 0, 0)$, P$(0, 1, 4)$, F$(2, 2, 0)$, Q$(0, 0, 2)$이다.

$$\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{HP} - \overrightarrow{HE} = (-2, 1, 4)$$
$$\overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{HQ} - \overrightarrow{HF} = (-2, -2, 2)$$
$$\therefore \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{FQ} = (-2, 1, 4,) \cdot (-2, -2, 2)$$
$$= 4 - 2 + 8 = 10$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

삼각형 OAB의 무게중심이 G이므로

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

선분 BC를 2:1로 내분하는 점이 P이므로

$\overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{3}$

한편, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\frac{\pi}{3}$

$= 3\times3\times\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

이고,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{9}{2}$

$\therefore \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{OP}$

$= (\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}) \cdot (\frac{2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{3})$

$= \frac{2}{9}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{1}{9}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

$- \frac{4}{9}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \frac{2}{9}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB}$

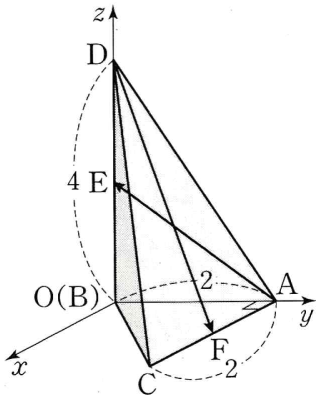
$= \frac{2}{9}\times\frac{9}{2} + \frac{1}{9}\times\frac{9}{2} - \frac{4}{9}\times\frac{9}{2} - \frac{2}{9}\times3^2$

$= 1 + \frac{1}{2} - 2 - 2$

$= -\frac{5}{2}$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②



점 B가 원점에 놓이고 모서리 AB는 y축에, 모서리 BD는 z축에 놓이도록 삼각뿔 ABCD를 좌표공간으로 이동하면 그림과 같으므로

$\overrightarrow{OA} = (0,\ 2,\ 0)$, $\overrightarrow{OC} = (2,\ 2,\ 0)$,

$\overrightarrow{OD} = (0,\ 0,\ 4)$

점 E는 모서리 BD의 중점이므로

$\overrightarrow{OE} = (0,\ 0,\ 2)$

점 F는 모서리 AC의 중점이므로

$\overrightarrow{OF} = (1,\ 2,\ 0)$

그러므로

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}$

$= (0,\ 0,\ 2) - (0,\ 2,\ 0)$

$= (0,\ -2,\ 2)$

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}$

$= (1,\ 2,\ 0) - (0,\ 0,\ 4)$

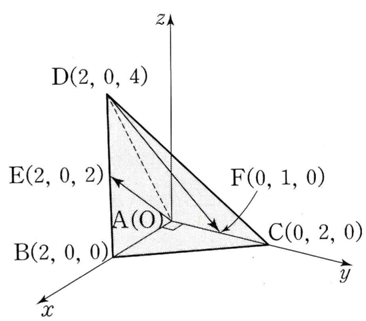
$= (1,\ 2,\ -4)$

$\therefore\ \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = (0,\ -2,\ 2) \cdot (1,\ 2,\ -4)$

$= 0 - 4 - 8 = -12$

<다른풀이>

점 A가 원점에 놓이고 모서리 AB와 x축이, 모서리 AC와 y축이 일치하도록 삼각뿔 ABCD를 좌표공간으로 이동하면 그림과 같으므로



$\overrightarrow{OB} = (2,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{OC} = (0,\ 2,\ 0)$,

$\overrightarrow{OD}=(2,\ 0,\ 4)$

점 E는 모서리 BD의 중점이므로

$\overrightarrow{OE}=(2,\ 0,\ 2)$

점 F는 모서리 AC의 중점이므로

$\overrightarrow{OF}=(0,\ 1,\ 0)$

그러므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF}&=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}\\&=(0,\ 1,\ 0)-(2,\ 0,\ 4)\\&=(-2,\ 1,\ -4)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}=(2,\ 0,\ 2)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}&=(2,\ 0,\ 2)\cdot(-2,\ 1,\ -4)\\&=-4+0-8=-12\end{aligned}$$

18. 도형의 방정식

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

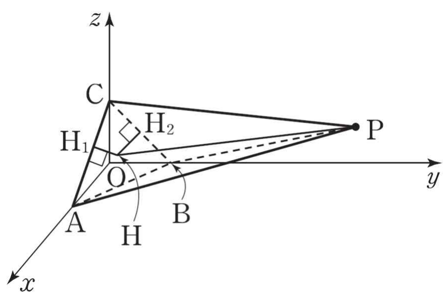
평면 $x+y+z=1$이 x축, y축, z축과 만나는 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

A$(1,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 1,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ 1)$

이다. 이때 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AC, 직선 BC에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라고 하면, 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PH_1}\perp\overline{AC}$, $\overline{PH_2}\perp\overline{BC}$가 된다.

조건 (가)에서 두 삼각형 PCA와 PCB의 넓이가 서로 같고, $\overline{CA}=\overline{CB}$이므로 $\overline{PH_1}=\overline{PH_2}$이다.



이때 두 직각삼각형 PHH_1, PHH_2에서 $\overline{PH_1}=\overline{PH_2}$ 이므로 $\overline{HH_1}=\overline{HH_2}$이다.

따라서 선분 AB의 중점을 M이라고 할 때 점 H는 직선 CM위의 점이다. 그러므로 점 P의 x좌표와 y좌표는 서로 같아야 하므로 점 P의 좌표는 P$(5,\ 5,\ b)$이다.

점 P와 평면 $x+y+z=1$ 사이의 거리를 d라고 하면

$$d=\frac{|1\times5+1\times5+1\times b-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|9+b|}{\sqrt{3}}$$

조건 (나)에서 사면체 PABC의 부피가 4이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times d\\&=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\right\}\times\frac{|9+b|}{\sqrt{3}}\\&=\frac{|9+b|}{6}=4\end{aligned}$$

에서 $|9+b|=24$

$9+b=\pm24$

$b=15$ 또는 $b=-33$

즉, 점 P의 좌표는 $(5,\ 5,\ 15)$ 또는 $(5,\ 5,\ -33)$이므로

$a=5$이고 $b=15$ 또는 $b=-33$이다.

따라서 $\dfrac{b}{a}$의 값은 $\dfrac{15}{5}=3$ 또는 $-\dfrac{33}{5}$ 이므로 최댓값은 3이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

$x^2+y^2+z^2-2x+6z=6$ …… ㉠

$x^2+y^2+z^2+6x=2$ …… ㉡

㉡$-$㉠에서 $8x-6z=-4$

즉, 두 구가 만나서 생기는 원 C를 포함하는 평면의 방정식은 $4x-3z+2=0$이다.

두 구 ㉠, ㉡의 중심을 각각 C_1, C_2라고 하면

㉠에서 $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=4^2$

즉, $C_1(1,\ 0,\ -3)$

㉡에서 $(x+3)^2+y^2+z^2=(\sqrt{11})^2$

즉, $C_2(-3,\ 0,\ 0)$

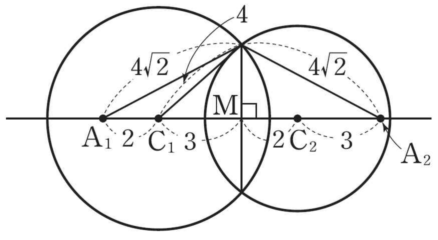
두 점 C_1, C_2 에서 평면 $4x-3z+2=0$까지의 거리를 각각 d_1, d_2라고

하면

$$d_1=\frac{|4\times1+0\times0+(-3)\times(-3)+2|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{15}{5}=3$$

$$d_2=\frac{|4\times(-3)+0\times0+(-3)\times0+2|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{10}{5}=2$$

두 구 S_1, S_2를 두 점 C_1, C_2를 지나는 평면으로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



원 C의 반지름의 길이는

$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

이고 원 C의 중심을 M이라고 하면 점 M은 선분 $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2$를 $3:2$로 내분하는 점이다.

따라서 $|\vec{p}-\vec{a}|=4\sqrt{2}$를 만족시키는 점 P는 중심이 A이고 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$이니 구 위의 점이고 점 A는 직선 $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2$ 위의 점이다.

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(\sqrt{7})^2}=5$이므로 점 A는 선분 $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2$를 $2:7$로 외분하는 점 A_1이거나 선분 $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2$를 $8:3$으로 외분하는 점 A_2이다.

점 A_1의 좌표는

$$\mathrm{A}_1\left(\frac{2\cdot(-3)-7\cdot1}{2-7},\ \frac{2\cdot0-7\cdot0}{2-7},\ \frac{2\cdot0-7\cdot(-3)}{2-7}\right)$$

즉, $\mathrm{A}_1\left(\frac{13}{5},\ 0\ -\frac{21}{5}\right)$이므로

$$a+b+c=\frac{13}{5}+0+\left(-\frac{21}{5}\right)=-\frac{8}{5}$$

점 A_2의 좌표는

$$\mathrm{A}_2\left(\frac{8\cdot(-3)-3\cdot1}{8-3},\ \frac{8\cdot0-3\cdot0}{8-3},\ \frac{8\cdot0-3\cdot(-3)}{8-3}\right)$$

즉, $\mathrm{A}_2\left(-\frac{27}{5},\ 0,\ \frac{9}{5}\right)$이므로

$$a+b+c=-\frac{27}{5}+0+\frac{9}{5}=-\frac{18}{5}$$

따라서 $a+b+c$의 최댓값은 $-\frac{8}{5}$이다.

[참고]

구의 중심 C와 구 위의 점 P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{x}$라고 할 때, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$|\vec{x}-\vec{c}|=r$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

$\alpha : 2x+y+z=2$ ⋯⋯ ㉠

$\beta : x-y+2z=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$3x+3z=3$이므로 $z=1-x$

㉠−㉡×2를 하면

$3y-3z=0$이므로 $y=z$

따라서 두 평면 α, β의 교선 l의 방정식은

$\frac{x-1}{-1}=y=z$이므로 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(-1,\ 1,\ 1)$이다.

두 직선 l, m이 만나는 점을 P라 하면 점 P는 직선 l 위에 있으므로 $\frac{x-1}{-1}=y=z=t$ (t는 실수)에서 $\mathrm{P}(-t+1,\ t,\ t)$이다.

두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기 θ는 $\vec{u}=(-1,\ 1,\ 1)$과 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 이루는 예각의 크기와 같으므로 $\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}{|\vec{u}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-t-2,\ t-1,\ t+2)$이므로

$$\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{|(t+2)+(t-1)+(t+2)|}{\sqrt{3}\sqrt{(-t-2)^2+(t-1)^2+(t+2)^2}}$$

$t^2+2t-3=0$

따라서 $t=1$ 또는 $t=-3$이다.

그런데 $t=1$일 때 점 $\mathrm{P}(0,\ 1,\ 1)$은 yz평면 위의 점이므로 $t=-3$이다.

따라서 $\mathrm{P}(4,\ -3,\ -3)$,

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1,\ -4,\ -1)$이므로 직선 m의 방향벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1,\ -4,\ -1)$이다.

또한, 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(2,\ 1,\ 1)$, $\vec{n_2}=(1,\ -1,\ 2)$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)=\frac{|\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}{|\vec{n_1}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)=\frac{|\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{n_2}||\overrightarrow{AP}|}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

즉, $\sin\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{6}$, $\sin\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{6}$이므로

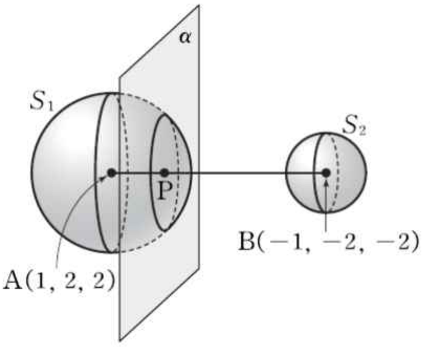
$$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{33}}{6},\ \cos\theta_2=\frac{\sqrt{33}}{6}$$

따라서

$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2=\frac{33}{36}-\frac{3}{36}=\frac{5}{6}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] $\frac{4}{3}$



$\overrightarrow{AB}=(-2,\ -4,\ -4)$이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{4+16+16}=6$$

한편, $|\overrightarrow{AP}|=t(0<t<2)$이고 세 점 A, B, P 는 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{t}{6}\overrightarrow{AB}$$

원점 O 에 대하여 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\frac{t}{6}\overrightarrow{AB}$, 즉

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{t}{6}\overrightarrow{AB}$$
$$=(1,\ 2,\ 2)+\left(-\frac{t}{3},\ -\frac{2}{3}t,\ -\frac{2}{3}t\right)$$
$$=\left(-\frac{t}{3}+1,\ -\frac{2}{3}t+2,\ -\frac{2}{3}t+2\right)$$

이므로 P $\left(-\frac{t}{3}+1,\ -\frac{2}{3}t+2,\ -\frac{2}{3}t+2\right)$이다.

벡터 $\overrightarrow{AB}$에 수직인 평면의 법선벡터는 $(1,\ 2,\ 2)$이므로 점 P 를 지나고 벡터 $\overrightarrow{AB}$에 수직인 평면 α의 방정식은

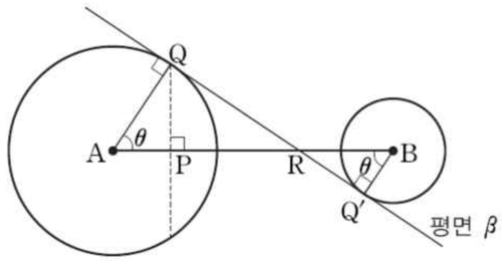
$$\left(x+\frac{t}{3}-1\right)+2\left(y+\frac{2}{3}t-2\right)+\left(z+\frac{2}{3}t-2\right)=0$$

즉, $x+2y+2z+3t-9=0$

평면 α와 구 S_1이 만나는 점 Q 에서 구 S_1에 접하는 평면 β라 하고 평면 β와 구 S_2가 만나는 점을 Q′이라 하자.

두 구의 중심을 지나고 평면 α와 수직인 평면으로 자르면 다음과 같다.

(ⅰ) 두 구가 평면 β에 대하여 서로 반대 쪽에 있을 때



직선 AB 와 직선 QQ′이 만나는 점을 R라 하자.

두 직각삼각형 QAP, RAQ 에서 ∠QAP $=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{t}{2}$ 이므로 $\overline{AR}=\frac{\overline{AQ}}{\cos\theta}=\frac{2}{\frac{t}{2}}=\frac{4}{t}$,

$$\overline{BR}=6-\frac{4}{t}$$

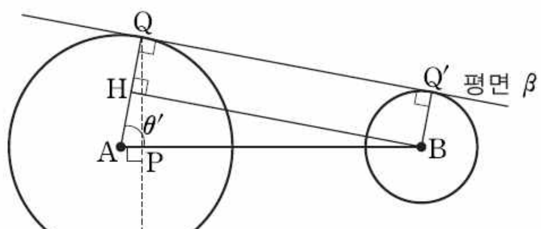
또한 직각삼각형 Q′BR 에서 ∠Q′BR $=\theta$이므로

$$\overline{BQ'}=\overline{BR}\cos\theta=\left(6-\frac{4}{t}\right)\frac{t}{2}=3t-2$$

따라서 평면 β와 구 S_2가 접하므로

$3t-2=1$, $t=1$

(ⅱ) 두 구가 평면 β에 대하여 서로 같은 쪽에 있을 때,



점 B 에서 직선 AQ 에 내린 수선의 발을 H라 하자.

두 직각삼각형 QAP, BAH 에서

$\angle \mathrm{QAP} = \theta'$이라 하면

$\cos\theta' = \dfrac{t}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{BQ}'} &= \overline{\mathrm{HQ}} = 2 - \overline{\mathrm{AH}} \\ &= 2 - \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta' \\ &= 2 - 6 \times \frac{t}{2} = 2 - 3t \\ &= 2 - 3t \end{aligned}$$

따라서 평면 β와 구 S_2가 접하므로

$$2 - 3t = 1,\ t = \frac{1}{3}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 t의 값의 합은 $\dfrac{4}{3}$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ⑤

점 A$(2,2,1)$과 평면 α 사이의 거리를 d라 하면

$$d = \frac{|2+2\times2+2\times1-14|}{\sqrt{1^1+2^2+2^2}} = 2$$

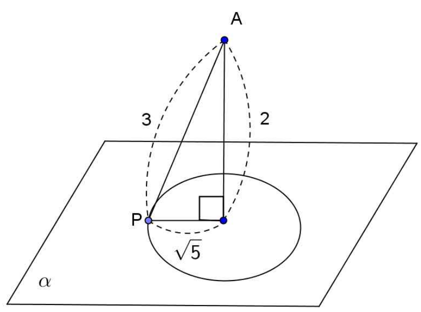
그러므로 $\overline{\mathrm{AP}} \le 3$을 만족하는 점 P의 자취는 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{5}\ (=\sqrt{3^2-2^2})$인 원의 경계 및 내부를 나타낸다.

한편, xy평면의 법선 벡터는 $(0,0,1)$이므로 xy평면과 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

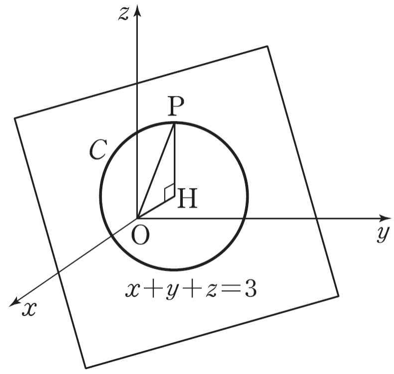
따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\begin{aligned} &(\sqrt{5})^2\pi \times \cos\theta = 5\pi \times \cos\theta \\ &= 5\pi \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}\pi \end{aligned}$$



EBS교재

[정답] ④



구의 중심 O$(0,\ 0,\ 0)$에서 평면 $x+y+z=3$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 원 C의 중심이고

$$\overline{\mathrm{OH}} = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$$

원 C 위의 임의의 점 P에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 OHP에서

$$\overline{\mathrm{HP}} = \sqrt{12-3} = 3$$

따라서 원 C의 넓이는 9π이다.

xy 평면의 법선벡터를 $\vec{z} = (0,\ 0,\ 1)$, 평면 $x+y+z=3$의 법선벡터를 $\vec{h} = (1,\ 1,\ 1)$이라 하고 두 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta = \frac{|\vec{z}\cdot\vec{h}|}{|\vec{z}||\vec{h}|} = \frac{1}{1\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$9\pi \times \cos\theta = 3\sqrt{3}\pi$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

구의 중심 $(a,\ 0,\ 0)$과 평면 $x - y + \sqrt{7}z - 10 = 0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이 2 와 같아야하므로

$$\frac{|a-10|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{7})^2}} = \frac{|a-10|}{3} = 2$$

$|a-10| = 6$ 이므로 $a = 4$ 또는 $a = 16$

따라서 구하는 두 상수 a의 값의 곱은

$4 \times 16 = 64$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

점 $(5, 0, 1)$ 을 지나고 직선

$l : x = \dfrac{y}{2} = z + 1$ 과 수직인 평면 α 의 법선벡터

$\vec{n}$ 은 $\vec{n} = (1, 2, 1)$ 이고 그 방정식은

$$(x-5) + 2y + (z-1) = 0$$

$$\therefore\ x + 2y + z = 6$$

이때, 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 의 중심 $(0, 0, 0)$ 과 평면

$x + 2y + z = 6$ 사이의 거리는

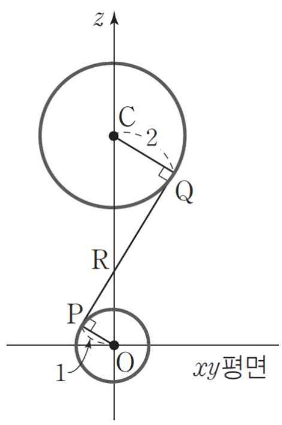
$$\frac{|0+0+0-6|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \sqrt{6}$$

따라서 구와 평면이 만나서 생긴 원의 반지름의 길이는

$$\sqrt{5^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{19}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②



직선 $\dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m} = z - n$ 은 점 $(0,\ 0,\ n)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (l,\ m,\ 1)$ 인 직선이다. 이 직선이 두 구와 접하는 접점을 각각 P, Q 라 하고 z 축과 만나는 점을 R 라 하자.

또 두 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

$x^2 + y^2 + (z-6)^2 = 4$ 의 중심을 각각 O, C 라 하면 오른쪽 그림에서

$\overline{OR} : \overline{RC} = \overline{OP} : \overline{CQ} = 1 : 2$

$\overline{OR} + \overline{RC} = 6$

$\therefore\ \overline{OR} = 2,\ \overline{RC} = 4$

즉 점 R 의 좌표는 $R(0,\ 0,\ 2)$ 이므로 $n = 2$ 이다.

한편, 직각삼각형 CRQ 에서

$\overline{RQ} = \sqrt{\overline{RC}^2 - \overline{CQ}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$

$\therefore\ \cos(\angle CRQ) = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때, z 축의 방향벡터를 $\vec{e}$ 라 하면 $\vec{e} = (0,\ 0,\ 1)$ 이므로 직선 PQ 와 z 축이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{e}|}{|\vec{u}||\vec{e}|} = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + 1}}$$

$\cos\theta = \cos(\angle CRQ)$ 이므로

$$\frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

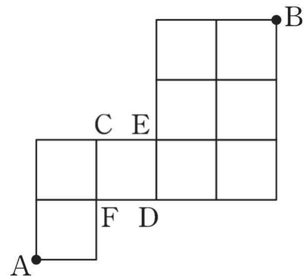
$$\therefore\ l^2 + m^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{3} + 2^2 = \frac{13}{3}$$

19. 순열

2016수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤



그림과 같이 C, D, E, F 지점을 정하면 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우는 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) C 지점을 거쳐 가는 경우

A 지점에서 C 지점까지 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

이 각각에 대하여 C 지점을 지나면 반드시 E 지점을 지나야 하므로 E 지점에서 B 지점으로 가는 경

우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!}=6$$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$3\times6=18$$

(ⅱ) D 지점을 거쳐 가는 경우

먼저 A 지점에서 F 지점으로 와야 하므로 이 경우의 수는

$$2$$

이 각각에 대하여 D 지점에서 B 지점으로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!2!}=10$$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$2\times10=20$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$$18+20=38$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

조건 (가)에서 $f(1)\neq f(2)$이고 $f(2)\neq f(3)$이므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(1)\neq f(3)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 정하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{P}_3=60$$

이 각각에 대하여 조건 (나)에서 치역의 원소의 개수가 3이므로 나머지 $f(4)$, $f(5)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이므로 경우의 수는

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$60\times9=540$$

(ⅱ) $f(1)=f(3)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{P}_2=20$$

이 각각에 대하여 $f(4)$가 $f(1)$, $f(2)$의 값 중 하나를 가지는 경우 $f(5)$는 $f(1)$, $f(2)$의 두 값을 제외하고 가져야 한다.

$f(5)$가 $f(1)$, $f(2)$의 값 중 하나를 가지는 경우도 마찬가지이다.

또, $f(4)=f(5)$인 경우는 $f(4)$와 $f(5)$가 $f(1)$, $f(2)$의 두 값을 제외한 한 값을 가져야 한다.

이때 경우의 수는

$$2\times3+2\times3+3=15$$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$20\times15=300$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$$540+300=840$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

(ⅰ) 일의 자리의 수가 홀수인 경우

조건 (가)에서 모든 자리의 수의 합이 짝수이려면 십, 백의 자리의 수가 (홀수, 짝수) 또는 (짝수, 홀수)이어야 한다.

일의 자리의 수가 1 또는 5, 십의 자리의 수가 3이면 백의 자리의 수는 2 또는 4 또는 6이므로 세 자리의 자연수의 개수는

$$2\times1\times3=6$$

일의 자리의 수가 1 또는 3 또는 5, 십의 자리의 수가 6이면 백의 자리의 수는 일의 자리에 있는 홀수를 제외한 나머지 2개의 홀수 중 하나이므로 세 자리의 자연수의 개수는

$$3\times1\times2=6$$

(ⅱ) 일의 자리의 수가 짝수인 경우

조건 (가)에서 모든 자리의 수의 합이 짝수이려면 십, 백의 자리의 수가 (짝수, 짝수) 또는 (홀수, 홀수)이어야 한다.

일의 자리의 수는 2 또는 4 또는 6이므로

십의 자리와 백의 자리의 수가 모두 짝수인 세 자리의 자연수의 개수는

$$3\times2\times1=6$$

십의 자리와 백의 자리의 수가 모두 홀수인 세 자리의 자연수의 개수는

$$3\times3\times2=18$$

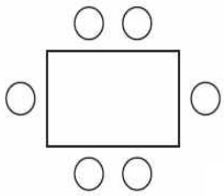
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 세 자리의 자연수의 개수는

$$(6+6)+(6+18)=36$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

구하는 경우의 수는 그림과 같은 직사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수와 같으므로



$(6-1)! \times 3 = 120 \times 3 = 360$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

각 함숫값 중 4의 개수에 따라

$(f(1), f(2), f(3), f(4))$의 가능한 경우의 수를 나누어 보면

(ⅰ) 4가 2개일 때

$(4,4,1,1)$이 가능하므로 같은것이 있는 순열로 구해보면 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$가지

(ⅱ) 4가 1개일 때

$(4,3,2,1)$ 또는 $(4,2,2,2)$이 가능하므로 같은 것이 있는 순열로 구해보면

$4!+\dfrac{4!}{3!}=24+4=28$ 가지

(ⅲ) 4가 0개일 때

$(3,3,2,2)$ 또는 $(3,3,3,1)$이 가능하므로 같은 것이 있는 순열로 구해보면

$\dfrac{4!}{2!2!}+\dfrac{4!}{3!}=6+4=10$가지

합의 법칙으로 모든 경우의 수를 더하면

$6+28+10=44$가지

2016수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

갑이 출근길과 퇴근길이 서로 다르도록 출퇴근하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$가지이다.

이중 단 한번 마주치기 위해 갑의 출근길과 퇴근길 중 하나를 선택하는 경우의 수가 2가지, 마주치지 않도록 나머지 출퇴근길을 정하는 경우의 수가 3가지이므로 곱의 법칙으로

${}_5P_2 \times 2 \times 3 = 120$ 가지이다.

2016수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

(가) 조건에 의해 짝수는 $2, 4, 6, 8$의 순서대로 배열되어야 하며 (나) 조건에 의해 $7, 5, 3, 2$의 순서대로 배열되어야 하므로 $7,5,3,2,4,6,8$의 순서로 배열되어야 한다. 즉, $7,5,3,2,4,6,8$을 모두 같은 것으로 보고 일렬로 배열하는 경우의 수

$\dfrac{9!}{7!}=72$이다.

20. 조합

2016수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

5개의 문자 중 사용된 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 각각에 대하여 세 문자가 나열된 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 한 문자가 3개, 나머지 두 문자는 1개씩 나열된 경우 세 문자 중 3번 사용되는 한 문자를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로

$${}_3C_1=3$$

이 각각에 대하여 5개의 문자를 배열하는 경우의 수는 같은 것이 각각 3개, 1개, 1개 있는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{5!}{3!1!1!}=20$$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$3\times20=60$$

(ⅱ) 두 문자가 2개씩, 한 문자는 1개가 나열된 경우

문자가 2개씩 사용되는 두 문자를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로

$_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

이 각각에 대하여 5 개의 문자를 배열하는 경우의 수는 같은 것이 각각 2 개, 2 개, 1 개 있는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$3 \times 30 = 90$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 합의 법칙에 의해

$60 + 90 = 150$ ……㉡

따라서 구하는 경우의 수는 ㉠과 ㉡에서 곱의 법칙에 의해

$$10 \times 150 = 1500$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

짝수가 2 개이므로 짝수의 개수에 따라 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) 한 학생이 짝수 2 개를 택하는 경우

짝수 2 개를 택한 학생을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 2 개에서 1 개를 택하는 조합의 수이므로

$_2C_1 = 2$

이 각각에 대하여 짝수 2 개를 정하는 경우의 수는 2, 4 중 중복을 허락하여 2 개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 짝수 2 개를 택한 한 학생이 홀수 1, 3, 5 중 1 개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3 개에서 1 개를 택하는 조합의 수이므로

$$_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 짝수를 택하지 않은 학생이 홀수 1, 3, 5 중 중복을 허락하여 3 개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3 개에서 3 개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$2 \times 3 \times 3 \times 10 = 180$$

(ⅱ) A, B 가 각각 짝수 1 개를 택하는 경우

A 가 짝수 2, 4 중 한 개를 택하는 경우 수는 2

이 각각에 대하여 B 가 짝수 2, 4 중 한 개를 택하는 경우의 수는 2

이 각각에 대하여 A 가 홀수 1, 3, 5 중 중복을 허락하려 2 개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3 개에서 2 개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$_3H_2 = {}_{3+2-1}C_3 = {}_4C_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$$

이 각각에 대하여 B 가 홀수 1, 3, 5 중 중복을 허락하여 2 개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3 개에서 2 개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$_3H_2 = {}_{3+2-1}C_3 = {}_4C_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$2 \times 2 \times 6 \times 6 = 144$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$$180 + 144 = 324$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

a_n 은 n 을 뽑고 n 보다 작은 수에서 1 개, n 보다 큰 수에서 1 개를 뽑는 경우의 수이다.

이때 $a_1 = a_{30} = 0$ 이므로

$$\sum_{n=2}^{29} a_n = a_2 + a_3 + \cdots\ a_{29}$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \ \cdots\ + a_{30}$$

이것은 1 부터 30 까지의 자연수 중에서 3 개의 수를 뽑는 모든 경우의 수 이므로 $_{30}C_3$ 이다.

따라서

$$\sum_{n=2}^{29} a_n = {}_{30}C_3 = \frac{30\times29\times28}{3\times2\times1} = 4060$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

조건 (가)에서 $a_{10} \le 5$ 이고 조건 (나)에서 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{10}$ 이므로 10 개의 자연수 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 은 모두 5 이하의 자연수이다.

또 조건 (나)에 의하여 10 개의 수가 순서가 정해져 있으므로 1 부터 5 까지의 자연수에서 중복을 허락하여 10 개의 수를 선택하면 하나의 쌍이 결

정된다. 따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_{5}H_{10} = {}_{14}C_{10} = {}_{14}C_{4} = \frac{14\times13\times12\times11}{4\times3\times2\times1}$$

$$= 1001$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] 36

선택되는 8개의 과일 중 사과의 개수를 x, 감의 개수를 y, 배의 개수를 z, 귤의 개수를 w 라 하면

$$x+y+z+w=8$$
$$(x \le 1,\ y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1)$$

이다.

i) $x=0$ 일 때

$y+z+w=8$ $(y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1)$이고

$y=y'+1,\ z=z'+1,\ w=w'+1$이라 하면

$$y'+z'+w'=5$$
$$(y' \ge 0,\ z' \ge 0,\ w' \ge 0)$$

이므로 경우의 수는 ${}_{3}H_{5} = {}_{7}C_{5} = 21$ 이다.

ii) $x=1$ 일 때

$y+z+w=7$ $(y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1)$이고

$y=y'+1,\ z=z'+1,\ w=w'+1$이라 하면

$$y'+z'+w'=4$$
$$(y' \ge 0,\ z' \ge 0,\ w' \ge 0)$$

이므로 경우의 수는 ${}_{3}H_{4} = {}_{6}C_{4} = 15$ 이다.

i), ii)에서 경우의 수는 36이다.

EBS교재

[정답] ④

연필의 개수에 따라서 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) 연필을 선택하지 않는 경우

같은 종류의 볼펜 5개, 같은 종류의 만년필 5개, 같은 종류의 형광펜 5개 중 5개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_{3}H_{5} = {}_{3+5-1}C_{5} = {}_{7}C_{5} = {}_{7}C_{2}$$
$$= \frac{7\times6}{2\times1} = 21$$

(ii) 연필을 선택하는 경우

같은 종류의 볼펜 5개, 같은 종류의 만년필 5개, 같은 종류의 형광펜 5개 중 4개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_{3}H_{4} = {}_{3+4-1}C_{4} = {}_{6}C_{4} = {}_{6}C_{2}$$
$$= \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$$21+15=36$$

EBS교재

[정답] ②

사과 주스 3개를 한 개씩 받는 사람을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로

$${}_{5}C_{3} = {}_{5}C_{2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$$

이 각각에 대하여 서로 다른 빵 3개 중 2개를 사과 주스를 받지 않은 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

$${}_{3}P_{2} = 3\times2 = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$6\times10=60$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

주어진 방정식을 변형하면

$5(a+b+c) = d+e+f$ 이고

$d+e+f \le 9\times3 = 27$이므로 $a+b+c$ 의 값은 3 또는 4 또는 5 이다.

$a' = a-1 \ge 0$,

$b' = b-1 \ge 0$,

$c' = c-1 \ge 0$,

$d' = d-1 \ge 0$,

$e' = e-1 \ge 0$, $f' = f-1 \ge 0$이라 하면 모두 음이 아닌 정수이다.

(i) $a+b+c = 3$ 인 경우

$a=b=c=1$의 1가지

$d+e+f = 15$ 이므로

$d'+e'+f' = 12$인 경우의 수는

${}_3H_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = 91$

따라서 $1 \times 91 = 91$가지

(ii) $a+b+c=4$인 경우

$a'+b'+c'=1$인 경우의 수는

${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$가지

$d+e+f=20$이므로 $d'+e'+f'=17$인 경우의 수는 ${}_3H_{17} = {}_{19}C_{17} = {}_{19}C_2 = 171$

따라서 $3 \times 171 = 513$가지

(iii) $a+b+c=5$인 경우

$a'+b'+c'=2$인 경우의 수는

${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$가지

$d+e+f=25$이므로 $d'+e'+f'=22$인 경우의 수는 ${}_3H_{22} = {}_{24}C_{22} = {}_{24}C_2 = 276$가지

따라서 $6 \times 276 = 1656$가지

합의 법칙에 의해 구하는 경우의 수는

$91 + 513 + 1656 = 2260$가지

2016수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

가장 많은 연필을 받는 사람의 연필개수를 X라 하면 나머지 두 사람은 $7-X$개를 받게 되므로

$X \le 7-X$ 즉, $X \le \dfrac{7}{2}$이므로 $X=3$이다.

(만약 $X=2$라면 2,2,2 개씩 받아도 7개를 남김없이 나누어줄 수 없다)

이때 가능한 연필 갯수는 (3,3,1)개 혹은 (3,2,2)개로 나누어주는 경우로 나누어볼 수 있다.

(i) (3,3,1)개로 나누어줄 경우

1개를 받을 한명을 선택하여 연필을 주는 경우의 수가 ${}_3C_1 \times {}_7C_1 = 21$가지

남은 두 사람에게 서로 다른 연필 6개를 3개, 3개로 분배해주는 경우의 수가 ${}_6C_3 = 20$가지

따라서 $21 \times 20 = 420$가지

(ii) (3,2,2)개로 나누어줄 경우

3개를 받을 한 명을 선택 후 7개 중 3개의 연필을 주는 경우의 수가 ${}_3C_1 \times {}_7C_3 = 105$가지

남은 두 사람에게 4개의 연필을 2개, 2개로 분배해주는 경우의 수가 ${}_4C_2 = 6$가지

따라서 $105 \times 6 = 630$가지

합의 법칙에 의해 $420 + 630 = 1050$가지

2016수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

방정식 $|x|+|y|+|z|=7$에서

$|x|=x'+1$, $|y|=y'+1$, $|z|=z'+1$이라 하면

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=7$

$\therefore x'+y'+z'=4$ (단, x', y', z'은 음이 아닌 정수)

방정식 $x'+y'+z'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 순서쌍 (x', y', z')의 개수는

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

이때, 하나의 순서쌍 (x', y', z')에 대하여 순서쌍 (x, y, z)는 $2^3=8$개씩 존재하므로 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $15\times8=120$

21. 이항정리와 분할

2016수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ②

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_5C_r x^{5-2r} \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(2+x+x^2)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x항은 2와 ㉠의

x항, x와 ㉠의 상수항, x^2과 ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항이 곱해질 때 나타난다.

$5-2r=1$에서 $r=2$이므로

${}_5C_2 x = 10x$

$5-2r=0$을 만족시키는 정수 r는 존재하지 않는다.

$5-2r=-1$에서 $r=3$이므로

${}_5C_3 x^{-1} = \dfrac{10}{x}$

즉, $(2+x+x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 x 항은

$2\times 10x+x^2\times\frac{10}{x}=30x$

따라서 x 의 계수는 30이다.

2016수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 6

x 의 계수를 구하면

$${}_{m}\mathrm{C}_1+{}_{n}\mathrm{C}_1=m+n$$

이므로

$$m+n=12$$

또, x^2의 계수는

$$\begin{aligned}&{}_{m}\mathrm{C}_2+{}_{n}\mathrm{C}_2\\&=\frac{1}{2}\{m(m-1)+n(n-1)\}\\&=\frac{1}{2}\{m^2+n^2-(m+n)\}\\&=\frac{1}{2}(m^2+n^2-12)\end{aligned}$$

이 식에 $n=12-m$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\{m^2+(12-m)^2-12\}\\&=\frac{1}{2}(m^2+m^2-24m+144-12)\\&=m^2-12m+66\\&=(m-6)^2+30\end{aligned}$$

따라서 x^2의 계수가 최소가 되는 m 의 값은 6이다.

2016수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

$$\begin{aligned}10&=1+1+1+1+6\\&=1+1+1+2+5\\&=1+1+1+3+4\\&=1+1+2+2+4\\&=1+1+2+3+3\\&=1+2+2+2+3\\&=2+2+2+2+2\end{aligned}$$

따라서 구하는 경우의 수는 7이다.

2016수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{n+1}$ 의 전개식에서 일반항은

${}_{n+1}\mathrm{C}_r(x^2)^r(x^{-1})^{n+1-r}={}_{n+1}\mathrm{C}_r x^{3r-n-1}$

(단, $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$)

x^{2n-4}항은 $3r-n-1=2n-4$에서 $r=n-1$일 때이므로

x^{2n-4}의 계수 a_n은

$a_n={}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+1}\mathrm{C}_2=\frac{n(n+1)}{2}$

따라서

$$\sum_{n=3}^{9}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=3}^{9}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=3}^{9}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$

$$=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)=\frac{7}{15}$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ④

$\left(x+\frac{1}{3x}\right)^6$ 의 일반항은 ${}_6\mathrm{C}_r\,(x)^{6-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r$ 이고

정리하면

$$\begin{aligned}&{}_6\mathrm{C}_r\,(x)^{6-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r\\&={}_6\mathrm{C}_r\,x^{6-r}\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r\\&={}_6\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r x^{6-2r}\end{aligned}$$

이다. $r=2$를 대입하면 x^2 의 계수는

${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{3}$ 이다.

EBS교재

[정답] ①

$\left(x-\frac{3}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r(-3)^r x^{6-r}x^{-r}$$

$$={}_6\mathrm{C}_r(-3)^r x^{6-2r}$$

$x^{6-2r}=x^4$에서 $6-2r=4$, 즉 $r=1$

따라서 x^4의 계수는

${}_6C_1\times(-3)^1=-18$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ②

자연수 6을 짝수개로 분할하는 방법의 수는

$P(6,\ 2)+P(6,\ 4)+P(6,\ 6)=3+2+1=6$

이다.

(참고)

$P(6,\ 2)$는 $5+1=4+2=3+3$으로 3가지

$P(6,\ 4)$는 $3+1+1+1=2+2+1+1$로

2가지

$P(6,\ 6)$는 $1+1+1+1+1+1$로 1가지

EBS교재

[정답] ④

$10=4+6$이므로 숫자 4를 포함하는 자연수 10의 분할은 자연수 6의 각 분할에 숫자 4를 더한 것과 같다.

$$\begin{aligned}6&=6\\&=5+1=4+2=3+3\\&=4+1+1=3+2+1=2+2+2\\&=3+1+1+1=2+2+1+1\\&=2+1+1+1+1\\&=1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

이므로 숫자 4를 포함하는 자연수 10의 분할의 수는

$$1+3+3+2+1+1=11$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

(ⅰ) A 접시에 3개, B 접시에 5개의 초콜릿을 담는 경우

$P(3,3)\times P(5,2)=1\times2=2$

(ⅱ) A 접시에 4개, B 접시에 4개의 초콜릿을 담는 경우

$P(4,3)\times P(4,2)=1\times2=2$

(ⅲ) A 접시에 5개, B 접시에 3개의 초콜릿을 담는 경우

$P(5,3)\times P(3,2)=2\times1=2$

(ⅳ) A 접시에 6개, B 접시에 2개의 초콜릿을 담는 경우

$P(6,3)\times P(2,2)=3\times1=3$

따라서 $2+2+2+3=9$가지

2016수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

각 전개식에서 x^2의 계수만 구해서 더해보면

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{k}{}_kC_2(-k)^2&=\sum_{k=2}^{10}\frac{k^2(k-1)}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^3-k^2)\\&=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2-\left(\frac{10\times11\times21}{6}\right)\right)\\&=1320\end{aligned}$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

$$a^n=\sum_{r=1}^{2n}{}_{2n}C_r$$

$$={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$$

$$=2^{2n}-1$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{a^n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{2n}}=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1$$

22. 확률

2016수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

두 원소 a, b $(a\in A,\ b\in B)$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$$10\times10=100$$

집합 A의 원소를 3으로 나누었을 때의 나머지

가 0, 1, 2인 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면

$A_0=\{6,\ 12,\ 18\}$

$A_1=\{4,\ 10,\ 16\}$

$A_2=\{2,\ 8,\ 14,\ 20\}$

집합 B의 원소를 3으로 나누었을 때의 나머지가 1, 2인 집합을 각각 B_1, B_2라 하면

$B_1=\{2^2,\ 2^4,\ 2^6,\ 2^8,\ 2^{10}\}$

$B_2=\{2,\ 2^3,\ 2^5,\ 2^7,\ 2^9\}$

따라서 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $a\in A_1$, $b\in B_2$일 때,

순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $3\times5=15$

(ii) $a\in A_2$, $b\in B_1$일 때,

순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $4\times5=20$

(i), (ii)에 의하여 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우의 수는

$15+20=35$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

9개의 구슬을 임의로 3개씩 3묶음으로 나누어 상자 A, B, C에 넣는 경우의 수는

$$ {}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}\times3! $$
$$=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$$
$$=1680$$

상자에 들어 있는 세 구슬에 적혀 있는 수의 합이 홀수가 되려면 세 상자에 들어 있는 구슬이 다음과 같아야 한다.

(홀수 3개), (홀수 1개, 짝수 2개), (홀수 1개, 짝수 2개) …… ㉠

(i) 홀수 1, 3, 5, 7, 9를 3개, 1개, 1개로 나누는 경우의 수는

$$ {}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}$$
$$=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times2\times1\times\frac{1}{2}=10$$

(ii) 짝수 2, 4, 6, 8을 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$$ {}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}$$
$$=\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=3$$

(i)에서 나눈 홀수 1개, 홀수 1개와 (ii)에서 짝수 2개, 짝수 2개로 (홀수 1개, 짝수 2개), (홀수 1개, 짝수 2개)인 두 묶음을 만드는 경우의 수는 2이다.

따라서 9개의 구슬로 ㉠과 같이 3묶음으로 나누는 경우의 수는 $10\times3\times2=60$이고, 이 3묶음을 상자 A, B, C에는 넣는 경우의 수는 $3!$이므로 구하는 확률은

$$\frac{60\times3!}{1680}=\frac{3}{14}$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

화학Ⅰ을 선택하는 사건을 A, 생명과학Ⅱ를 선택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{21}{35}=\frac{3}{5}$,

$\mathrm{P}(B)=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

그러므로 $\mathrm{P}((A\cup B)^C)=\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{7}$에서

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

따라서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{6}{7}=\frac{6}{35}$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

10으로 나누어떨어지지 않는다는 의미는 기계에서 찍혀 나온 5개 수의 곱이 10의 배수가 아니라는 의미이다. 즉, 15가 나오지 않는 사건을 A,

12 나 28 이 나오지 않는 사건을 B 라 할 때, 사건 A 가 일어나거나 사건 B 가 일어났다는 의미이다. 이때

$$\mathrm{P}(A)=\left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$\mathrm{P}(B)=\left(\frac{3}{5}\right)^5$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\left(\frac{2}{5}\right)^5$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^5+\left(\frac{3}{5}\right)^5-\left(\frac{2}{5}\right)^5=\frac{1235}{3125}=\frac{247}{625}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=1-\frac{247}{625}=\frac{378}{625}$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ④

$f(x)=x^2-7x+10$에서 $f(1)>0$,

$f(2)=0$, $f(3)<0$, $f(4)<0$,

$f(5)=0$, $f(6)>0$이다.

따라서 $f(a)f(b)<0$이 성립하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 1)$, $(4,\ 6)$, $(6,\ 3)$, $(6,\ 4)$로 8 개이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$이다.

EBS교재

[정답] ④

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$$6\times 6=36$$

$f(a)f(b)=0$을 만족시키는 사건을 A 라 하면 사건 A 의 여사건 A^c은 $f(a)f(b)\neq 0$, 즉 $f(a)\neq 0$이고 $f(b)\neq 0$

이때

$$f(a)=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)\neq 0$$

$$f(b)=b^2-5b+6=(b-2)(b-3)\neq 0$$

이므로 a, b의 값은 각각 1, 4, 5, 6 중 하나이어야 한다.

따라서 $f(a)\neq 0$이고 $f(b)\neq 0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $4\times 4=16$이므로

$$\mathrm{P}(A^c)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^c)$$

$$=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

(다른 풀이)

$f(a)=0$인 사건을 A, $f(b)=0$인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

$f(a)=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)=0$에서

$a=2$ 또는 $a=3$

따라서 $f(a)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2\times 6=12$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{6^2}=\frac{1}{3}$$

같은 방법으로 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이다.

한편, $f(a)=f(b)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$$2\times 2=4$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^3+3x^2+2x)+1$$

$$=\frac{x}{2}(x+1)(x+2)+1$$

x, $x+1$, $x+2$가 연속한 세 수이므로

$x=2,4,6$인 경우 $f(x)$는 홀수

$x=1,5$인 경우 $f(x)$는 짝수

$x=3$인 경우 $f(x)$는 홀수

이므로 $f(a)$가 홀수일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이고 짝수일 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 $f(a)f(b)$가 짝수일 확률은

$1-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$이다.

2016수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

$f(1)f(2)f(3)f(4)$가 4의 배수 또는 $f(1)\ge 4$를 만족시키는 사건을 A라고 할 때, 여사건 A^c : $f(1)f(2)f(3)f(4)$가 4의 배수가 아니고 $f(1)<4$의 확률을 구하면

(i) $f(1)=2$인 경우

$f(1)f(2)f(3)f(4)$가 4의 배수가 아니려면 $f(2)f(3)f(4)$가 모두 홀수이어야 하므로

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{32}$$

(ii) $f(1)=3$인 경우

$f(1)f(2)f(3)f(4)$가 4의 배수가 아니려면 $f(2)f(3)f(4)$가 모두 홀수이거나 하나만 2이어야 하므로

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}\times 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{64}$$

$$\therefore \frac{1}{32}+\frac{5}{64}=\frac{7}{64}$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

8명의 학생 중에서 임의로 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_8\mathrm{C}_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

적어도 한 명의 여학생을 뽑는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^c은 남학생만 4명을 뽑는 사건이다.

남학생 5명 중 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$$

이므로

$$\mathrm{P}(A^c)=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^c)$$
$$=1-\frac{1}{14}$$
$$=\frac{13}{14}$$

23. 조건부확률

2016수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

$$\mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\mathrm{P}((A\cap B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{13}{16}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{16}\qquad\cdots\cdots㉠$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{3}(\mathrm{P}(B))^2\qquad\cdots\cdots㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{1}{3}(\mathrm{P}(B))^2=\frac{3}{16},\ (\mathrm{P}(B))^2=\frac{9}{16}$$

$0<\mathrm{P}(B)<1$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 15

학생 60명 중 임의로 선택한 한 명이 일본을 방문한 적이 있는 학생인 사건을 A, 중국을 방문한 적이 있는 학생인 사건을 B라 하자.

일본, 중국을 방문한 적이 있는 학생의 수가 각각 30, 20이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$$

학생 60명 중 임의로 선택한 한 학생이 일본을 방문한 적이 있는 학생이었을 때, 이 학생이 중국을 방문한 적이 있는 학생일 확률 p_1은

$$p_1 = \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{2}} = 2\mathrm{P}(A\cap B)$$

학생 60명 중 임의로 선택한 한 학생이 중국을 방문한 적이 있는 학생이었을 때, 이 학생이 일본을 방문한 적이 있는 학생일 확률 p_2는

$$p_2 = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{3}} = 3\mathrm{P}(A\cap B)$$

이때 $p_1 + p_2 = \frac{5}{4}$이므로

$$2\mathrm{P}(A\cap B) + 3\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{5}{4}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{1}{4}$$

따라서 60명의 학생 중 일본과 중국을 모두 방문한 적이 있는 학생의 수는

$$60\times \mathrm{P}(A\cap B) = 60\times\frac{1}{4} = 15$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{n(A\cap B)}{n(A)} = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

에서 $n(A\cap B) = 8$이다. 또한

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{4}{13} = \frac{8}{26}$$

에서 $n(B) = 26$이다.

이때 회원 분포는 다음 표와 같다.

(단위 : 명)

구분	남자(A)	여자(A^C)	계
50세 이상(B)	8	18	26
50세 미만(B^C)	4	10	14
계	12	28	40

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C|B^C) = \frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)} = \frac{n(A^C\cap B^C)}{n(B^C)}$$

$$= \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

점 P가 점 $B(2, 3)$에 도달할 사건을 X,

점 P가 점 $A(1, 2)$를 지나지 않고 움직이는 사건을 Y라 하자.

주사위 1개를 던져 점 P가 x축의 방향으로 1만큼 움직일 확률은 $\frac{1}{3}$이고 y축의 방향으로 1만큼 움직일 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(X) = {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

점 P가 점 A를 반드시 거쳐 점 B에 도달할 확률은

$$\left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}\times\left\{{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\right\} = \frac{16}{81}$$

이므로 $\mathrm{P}(X\cap Y) = \frac{80}{243} - \frac{16}{81} = \frac{32}{243}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X) = \frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)} = \frac{32}{243}\times\frac{243}{80} = \frac{2}{5}$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ④

A, B가 독립이므로 B, A^c도 독립이다.

$$\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A) = \frac{3}{4}$$

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$에서

$$\frac{3}{4}\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B) = \frac{2}{3}$$

따라서

$$\mathrm{P}(B|A^c) = \mathrm{P}(B) = \frac{2}{3}$$

EBS교재

[정답] ③

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ 이고

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$가 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\\&=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

<다른 풀이>

두 사건 A, B가 독립이므로 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\\&=\mathrm{P}(A)(1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\\&(\because\ \mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B))\\&=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ①

동전을 5번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 n이라 하면 뒷면은 $5-n$이므로

$n(5-n)=6$이고 $n=2$ 또는 $n=3$

(i) $n=2$일 때,

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

(ii)$n=3$일 때,

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서

$$\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$$

EBS교재

[정답] ④

앞면이 한 번만 나오거나 뒷면이 한 번만 나올 확률은

$$2\times{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=2\times\frac{10}{2^{10}}$$

앞면만 나오거나 뒷면만 나올 확률은

$$2\times{}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=2\times\frac{1}{2^{10}}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-2\left(\frac{10}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}\right)=\frac{512}{502}$$

EBS연계 기출문항 3

[정답] ⑤

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$ 이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\frac{13}{16}-\frac{1}{4}=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{9}{13}$$

이다.

EBS교재

[정답] ⑤

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^c\cup B^c)&=\mathrm{P}((A\cap B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{13}{16}\end{aligned}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{16}\qquad\cdots\cdots㉠$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{3}(\mathrm{P}(B))^2\qquad\cdots\cdots㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{1}{3}(\mathrm{P}(B))^2=\frac{3}{16},\ (\mathrm{P}(B))^2=\frac{9}{16}$$

$0<\mathrm{P}(B)<1$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$$

EBS연계 기출문항 4

[정답] ②

각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀있는 정사면체 모양의 상자를 한 번 던졌을 때 2가 나오는 사건을 A라 하면 2가 아닌 숫자가 나오는 사건은 A^C이고 각각의 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$$

이다. 이 상자를 3번 던져서 사건 A가 m번, 사건 A^C가 n번 나올 확률은

$${}_3\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{4}\right)^m\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

다. 조건 $i^{|m-n|}=-i$에서

i) $m=3,\ n=0$일 때 $i^{|m-n|}=i^3=-i$

ii) $m=2,\ n=1$일 때 $i^{|m-n|}=i\neq -i$

iii) $m=1,\ n=2$일 때 $i^{|m-n|}=i\neq -i$

iv) $m=0,\ n=3$일 때 $i^{|m-n|}=i^3=-i$

이므로 조건을 만족하는 경우는 i), iv)이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&{}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0\\&=\frac{27}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{16}\end{aligned}$$

이다.

EBS교재

[정답] ⑤

한 개의 주사위를 5번 던지는 시행이므로

$$m+n=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$i^{|m-n|}=-i$를 만족시키려면 $-i=i^3$이므로

$$|m-n|=3$$

$$m-n=-3 \text{ 또는 } m-n=3$$

(i) $m-n=-3$인 경우

㉠과 연립하여 풀면

$$m=1,\ n=4$$

따라서 이 경우의 확률은 주사위를 5번 던질 때 3의 배수인 눈의 수가 1번, 3의 배수가 아닌 눈의 수가 4번 나올 확률이므로

$${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{3^5}$$

(ii) $m-n=3$인 경우

㉠과 연립하여 풀면

$$m=4,\ n=1$$

따라서 이 경우의 확률은 주사위를 5번 던질 때 3의 배수인 눈의 수가 4번, 3의 배수가 아닌 눈의 수가 1번 나올 확률이므로

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3^5}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{80}{3^5}+\frac{10}{3^5}=\frac{90}{3^5}=\frac{10}{27}$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

동전의 앞면이 나오는 사건을 A, 주사위의 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$$

그런데 6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

주사위 두 눈의 차가 1이하이려면 두 눈이 같은 경우이거나 두 눈의 차가 1인 경우가 있으므로 $\frac{6+10}{36}=\frac{4}{9}$ 이다.

$3a+b\le 4$이려면

(i) $(a,b)=(0,0),\ \cdots,(0,4)$인 경우

$a=0$이면 되므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(ii) $(a,b)=(1,0)$인 경우

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{4}{9}\right)^0\left(\frac{5}{9}\right)^4$$

(iii) $(a,b)=(1,1)$인 경우

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{4}{9}\right)^1\left(\frac{5}{9}\right)^3$$

따라서

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\left(\frac{5^4}{9^4}+\frac{16\times 5^3}{9^4}\right)$$

$$= \frac{3\times 9^3 + 28\times 5^3}{16\times 9^3} = \frac{5687}{16\times 9^3}$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(B \mid A^C) = \frac{\mathrm{P}(A^C \cap B)}{\mathrm{P}(A^C)} = \frac{\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A^C)}$$

$$= \mathrm{P}(B) = \frac{3}{4}$$

$$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B)$$

$$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{5}{6} = \mathrm{P}(A) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{P}(A)$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{P}(A) = \frac{1}{12}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Ⅳ. 통계

24. 이산확률분포

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

확률의 총합은 1이므로

$$a + b + a^2 = 1 \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

$$\mathrm{E}(X) = (-1)\times a + 0\times b + 1\times a^2 = -\frac{1}{4}$$

이므로

$$a^2 - a = -\frac{1}{4},\ 4a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$a = \frac{1}{2}$$

a의 값을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{2} + b + \frac{1}{4} = 1$$

$$b = \frac{1}{4}$$

따라서 $a+b$의 값은

$$a + b = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

확률변수 X 의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x) = {}_{25}\mathrm{C}_x\, p^x (1-p)^{25-x}$$

이므로 X 는 이항분포 $\mathrm{B}(25,\ p)$를 따른다.

$$\mathrm{E}(X) = 5$$

이므로 $25\times p = 5$에서

$$p = \frac{1}{5}$$

따라서

$$\mathrm{V}(X) = 25\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5} = 4$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{V}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 4 + 25 = 29$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{1}{3} + a + \frac{1}{6} = 1$$

에서 $a = \dfrac{1}{4}$

따라서 확률변수 X의 평균은

$$\mathrm{E}(X) = 2\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{3} + 4\times\frac{1}{4} + 6\times\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\mathrm{E}(nX+3) = n\mathrm{E}(X) + 3 = n\times\frac{7}{2} + 3 = 17$$

에서 $n = 4$

한편

$$\mathrm{V}(X) = 2^2\times\frac{1}{4} + 3^2\times\frac{1}{3} + 4^2\times\frac{1}{4} + 6^2\times\frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

따라서

$$\mathrm{V}(nX+3) = n^2\mathrm{V}(X) = 4^2\times\frac{7}{4} = 28$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=20\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{9}$

$\mathrm{V}(2X)=4\mathrm{V}(X)=\frac{100}{9}$

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(Y)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$

$\mathrm{V}(Y+5)=\frac{n}{4}$

$\mathrm{V}(Y+5)>\mathrm{V}(2\mathrm{X})$이므로

$\frac{n}{4}>\frac{100}{9}$에서

$n>\frac{400}{9}=44.4\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 45이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 121

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{4}\right)$을

따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\cdot\frac{1}{4}=25$

$\mathrm{V}(X)=100\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(2X-4)+\mathrm{V}(2X+3)\\&\quad=2\mathrm{E}(X)-4+4\mathrm{V}(X)\\&\quad=2\cdot25-4+4\cdot\frac{75}{4}\\&\quad=121\end{aligned}$$

20167능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

확률의 총합은 1이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=20)\\&\quad=(a-b)+(a+b)+\cdots+(a-b)+(a+b)\\&\quad=20a=1\end{aligned}$$

$a=\frac{1}{20}$

$E(X)=11$이므로

$$\begin{aligned}&1\times\left(\frac{1}{20}-b\right)+2\times\left(\frac{1}{20}+b\right)+\cdots+20\times\left(\frac{1}{20}+b\right)\\&\quad=\frac{1}{20}\times(1+2+\cdots+20)\\&\qquad+(-b+2b-3b+\cdots-19b+20b)\\&\quad=\frac{1}{20}\times\frac{20\times21}{2}+10b\\&\quad=\frac{21}{2}+10b=12\end{aligned}$$

$10b=\frac{3}{2}$

$b=\frac{3}{20}$

따라서 $a+b=\frac{1}{5}$

20167능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] $\frac{3}{5}$

양호한 제품 2개, 불량품 4개에서 2개를 꺼낼 때,
불량은 0개 또는 1개 또는 2개

$\therefore\ \mathrm{X}=0$ 또는 $\mathrm{X}=1$ 또는 $\mathrm{X}=2$

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

이다.

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+4\times\frac{3}{10}=\frac{9}{5}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

이므로

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

2017능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 99

제품이 합격품일 확률은 $\frac{3}{4}$이고, 포장 상자가 합격품일 확률은 $\frac{4}{5}$이므로 2개의 제품과 포장 상자 모두 합격품일 확률은

$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{9}{20}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{9}{20}\right)$를 따르므로 확률변수 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$는

$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{9}{20}\times\frac{11}{20}=99$

25. 연속확률분포

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

이 고등학교 학생의 하루 물 섭취량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1300,\ 100^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-1300}{100}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\geq 1450)=\mathrm{P}\left(\frac{X-1300}{100}\geq\frac{1450-1300}{100}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$

2016수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

조건 (가)에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(0\leq X\leq 3)=\mathrm{P}(3\leq X\leq 6)=\frac{1}{2}$

조건 (나)에서

$\mathrm{P}(x\leq X\leq 3)=a-\frac{x^2}{18}$에

$x=0$을 대입하면

$\mathrm{P}(0\leq X\leq 3)=a$에서

$a=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 값은

$\mathrm{P}(2\leq X\leq 5)$

$=\mathrm{P}(2\leq X\leq 3)+\mathrm{P}(3\leq X\leq 5)$

$=\mathrm{P}(2\leq X\leq 3)+\mathrm{P}(1\leq X\leq 3)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{18}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{18}\right)$

$=\frac{5}{18}+\frac{8}{18}$

$=\frac{13}{18}$

2016수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

아파트 주민들이 일주일 동안 운동하는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(98,\ a^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-98}{a}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(96\leq X\leq 100)=\mathrm{P}\left(\frac{96-98}{a}\leq Z\leq\frac{100-98}{a}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{2}{a}\leq Z\leq\frac{2}{a}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{2}{a}\right)=0.383$

따라서 $\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{2}{a}\right)=0.1915$이고

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)=0.1915$이므로

$\frac{2}{a}=0.5$에서 $a=4$

2016수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④

확률밀도함수 $f(x)$가 $f(2-x)=f(2+x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

$$\mathrm{P}(0 \le X \le 2)=\mathrm{P}(2 \le X \le 4)=\frac{1}{2}$$

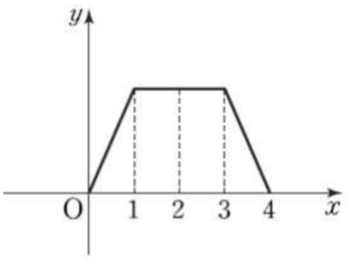
$$\mathrm{P}(0 \le X \le 1)=\mathrm{P}(3 \le X \le 4)=\frac{1}{6}$$

이므로

$$\mathrm{P}(2 \le X \le 3)=\mathrm{P}(2 \le X \le 4)-\mathrm{P}(3 \le \mathrm{X} \le 4)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

[참고]

<함수 $y=f(x)$의 그래프의 예>



EBS연계 기출문항 1

[정답] 80

주어진 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,\,1]$에서 확률 밀도함수이므로 $\int_0^1 f(x)dx=1$이다.

따라서

$$\int_0^1 k(x-x^4)dx=k\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$=k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{3}{10}k$$

$$\frac{3}{10}k=1$$

에서 $k=\dfrac{10}{3}$

$$\therefore 24k=24\times\frac{10}{3}=80$$

EBS교재

[정답] ①

$\int_0^2 f(x)dx=1$이므로

$$\int_0^2 (1+ax)dx=\left[x+\frac{a}{2}x^2\right]_0^2=2+2a=1$$

에서

$$a=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ f(x)=1-\frac{1}{2}x$$

$0 \le x \le 2$에서 $f(x) \ge 0$을 만족시키므로

$$a=-\frac{1}{2}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 5

연속확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^4 x f(x)dx$$
$$=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{3}x\,dx+\int_1^3\frac{1}{3}x\,dx+\int_3^4 x\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_1^3+\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_3^4=2$$

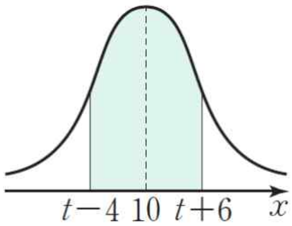
$$\mathrm{V}(X)=\int_0^4 x^2 f(x)dx-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{3}x\,dx+\int_1^3\frac{1}{3}x^2\,dx+\int_3^4 x^2\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x\right)dx-4$$
$$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_1^3+\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4\right]_3^4-4$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{26}{9}+\frac{148}{9}-\frac{175}{12}-4=\frac{5}{6}$$

$$\therefore V(\sqrt{6}X)=6\,V(X)=6\times\frac{5}{6}=5$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 9

정규분포 $N(10, 4^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 확률밀도함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 $x=10$ 에서 최댓값을 가지고, 직선 $x=10$ 에 대하여 대칭이다.



따라서 $\mathrm{P}(t-4 \leq X \leq t+6)$ 이

최대가 되려면 $\dfrac{t-4+(t+6)}{2}=10$

$\therefore\ t=9$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 0.02

짝수의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 홀수의 눈이 나오는 횟수는 $100-X$이므로

$2X-(100-X) \geq 80$

$3X \geq 180$

$\therefore\ X \geq 60$

이때 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$E(X)=100 \cdot \frac{1}{2}=50$$

$$V(X)=100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}=25$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{X-50}{5}$ 으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X \geq 60)=\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{60-50}{5}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z \geq 2)$$

$$=\mathrm{P}(Z \geq 0)-\mathrm{P}(0<Z<2)$$

$$=0.5-0.48$$

$$=0.02$$

26. 통계적 추정

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 400

크기가 n 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간이

$$\overline{x}-1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x}+1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}$$

이므로

$$b-a=2\times1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}$$

$2\times1.96\times\dfrac{100}{\sqrt{n}} \leq 19.6$에서

$$\sqrt{n} \geq 20$$

양변을 제곱하면

$$n \geq 400$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 400이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

확률변수 X 가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(|X-m| \leq 9)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right| \leq \frac{9}{\sigma}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(|Z| \leq \frac{9}{\sigma}\right)$$

$$=2\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{9}{\sigma}\right)$$

$2\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{9}{\sigma}\right)=0.9974$에서

$\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{9}{\sigma}\right)=0.4987$이므로

$\frac{9}{\sigma}=3.\ \sigma=3$

즉, 확률변수 X는 정규분포 $N(m,\ 3^2)$을 따른다. 또

$P(X\le 153)=P\left(\frac{X-m}{3}\le\frac{153-m}{3}\right)$

$=P\left(Z\le\frac{153-m}{3}\right)$

$P\left(Z\le\frac{153-m}{3}\right)=0.8413$에서

$P\left(0\le Z\le\frac{153-m}{3}\right)=0.3413$이므로

$\frac{153-m}{3}=1,\ m=150$

확률변수 X는 정규분포 $N(150,\ 3^2)$을 따르고, 임의추출한 통조림 9개의 무게의 평균 $\overline{X}$에 대하여

$$E(\overline{X})=150,\ V(\overline{X})=\frac{3^2}{9}=1$$

이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N(150,\ 1^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-150}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\ge 153)=P\left(\frac{\overline{X}-150}{1}\ge\frac{153-150}{1}\right)$

$=P(Z\ge 3)=0.5-P(0\le Z\le 3)$

$=0.5-0.4987=0.0013$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

이 회사에서 개발한 신형 자동차 중 n대를 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 신뢰도 99%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

$b-a=2\times 2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le 2$에서

$\sqrt{n}\ge 2.58\times 5$

$n\ge 166.41$

따라서 n의 최솟값은 167이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

$f(x)=f(50-x)$가 성립하므로 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=25$에 대하여 대칭이다.

따라서 $m=25$이므로 확률변수 X는 정규분포 $N(25,4^2)$을 따르고 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(25,\left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$P(X\le 19)=P(\overline{X}\ge 27)$에서

$P\left(Z\le\frac{19-25}{4}\right)=P\left(Z\ge\frac{27-25}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)$

$P(Z\le -1.5)=P\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

$P(Z\ge 1.5)=P\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

따라서 $1.5=\frac{\sqrt{n}}{2}$이므로 $n=9$

$P(24\le\overline{X}\le 26)=P\left(\frac{24-25}{\frac{4}{\sqrt{9}}}\le Z\le\frac{26-25}{\frac{4}{\sqrt{9}}}\right)$

$=P\left(-\frac{3}{4}\le Z\le\frac{3}{4}\right)$

$=2P(0\le Z\le 0.75)$

$=2\times 0.2734$

$=0.5468$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ①

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(50,\left(\frac{8}{\sqrt{16}}\right)^2\right)=N(50,2^2)$ 을 따른다.

또, 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포

$N\left(75,\left(\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\right)^2\right)=N\left(75,\left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이 때,

$P(\overline{X}\le 53)=P\left(Z\le\frac{53-50}{2}\right)=P(Z\le 1.5)$

$=0.5+P(0\le Z\le 2)\ \cdots$ ①

이고

$$\mathrm{P}(\overline{Y} \leq 69) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{53-50}{\frac{\sigma}{5}}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq -\frac{30}{\sigma}\right)$$

$$= 0.5 - \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{30}{\sigma}\right) \cdots ②$$

이다.

주어진 조건

$\mathrm{P}(\overline{X} \leq 53) + \mathrm{P}(\overline{Y} \leq 69) = 1$ 이므로

①, ②로부터

$$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5) = \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{30}{\sigma}\right)$$

이므로 $1.5 = \dfrac{30}{\sigma}$

$\therefore \sigma = 20$

$$\mathrm{P}(\overline{Y} \geq 71) = \mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-75}{4} \geq \frac{71-75}{4}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \geq -1)$$
$$= 0.5 + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$$
$$= 0.5 + 0.3413$$
$$= 0.8413$$

EBS교재

[정답] ③

크기가 n 인 표본의 표본평균 $\overline{X}$ 의 평균과 표준편차가 각각

$\mathrm{E}(\overline{X}) = m,\ \sigma(\overline{X}) = \dfrac{5}{\sqrt{n}}$ 이므로 $\overline{X}$ 는

정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{5}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(|\overline{X}-m| > 3) = \mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right| > \frac{3}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(|Z| > \frac{3\sqrt{n}}{5}\right)$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left(|Z| \leq \frac{3\sqrt{n}}{5}\right)$$

$$= 1 - 2 \times \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{3\sqrt{n}}{5}\right)$$

< 0.0456

$\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{3\sqrt{n}}{5}\right) \geq 0.4772$ 이므로

$\dfrac{3\sqrt{n}}{5} > 2$ 에서 $n > \dfrac{100}{9}$

따라서 n 의 최솟값은 12이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 81

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는

정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{2^2}{n}\right)$을 따른다. 이때

$Z = \dfrac{\overline{X}-m}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 Z는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$f(m) = \mathrm{P}\left(\overline{X} \leq 1.64 \times \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{1.64 \times \frac{2}{\sqrt{n}} - m}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(Z \leq 1.64 - \frac{m\sqrt{n}}{2}\right)$$

$\therefore\ f(0) = \mathrm{P}(Z \leq 1.64) = 0.5 + 0.45 = 0.95$

$$f(0.8) = \mathrm{P}\left(Z \leq 1.64 - \frac{0.8\sqrt{n}}{2}\right)$$

$= \mathrm{P}(Z \leq 1.64 - 0.4\sqrt{n})$

한편, $f(0) + \mathrm{P}(0.8) \leq 0.97$에서

$0.95 + \mathrm{P}(Z \leq 1.64 - 0.4\sqrt{n}) \leq 0.97$

$\mathrm{P}(Z \leq 1.64 - 0.4\sqrt{n}) \leq 0.02$

$\mathrm{P}(1.64 - 0.4\sqrt{n} \leq Z \leq 0)$
$\geq \mathrm{P}(Z \leq 0) - 0.02$

$\therefore\ \mathrm{P}(0 \leq Z \leq -1.64 + 0.4\sqrt{n})$
$\geq 0.5 - 0.02 = 0.48$

이때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.48$이므로

$-1.64 + 0.4\sqrt{n} \geq 1.96$

$\sqrt{n} \geq 9 \quad \therefore\ n \geq 81$

따라서 n의 최솟값은 81이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] $26.71 \leq m \leq 29.29$

표본평균이 28, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 100 이므로 모평균 m 의 신뢰도 99 % 의 신뢰구간은

$$28-2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}\le m\le 28+2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore\ 26.71\le m\le 29.29$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 288

모집단에서 임의로 100 명을 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95 % 의 신뢰구간이

$\left[\frac{1}{10}-c,\ \frac{1}{10}+c\right]$ 이므로

$$c=1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}{100}}=1.96\times\frac{3}{100}$$

또한 모집단에서 임의로 n 명을 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95 % 의 신뢰구간이

$\left[\frac{1}{9}-s(n),\ \frac{1}{9}+s(n)\right]$ 이므로

$$s(n)=1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}}{n}}=1.96\times\frac{\sqrt{8}}{9\sqrt{n}}$$

따라서

$1.96\times\frac{\sqrt{8}}{9\sqrt{n}}=\frac{50}{81}\times1.96\times\frac{3}{100}$ 이므로

$$\sqrt{n}=6\sqrt{8}$$

$$\therefore\ n=36\times8=288$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 770

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 2 인 표본을 임의추출하여 모평균을 신뢰도 99 % 로 추정했을 때, 신뢰구간의 길이 l 은

$$l=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이때, 신뢰구간의 길이를 $\frac{l}{k}$ 로 하기 위한 표본의 크기가 $f(k)$ 이므로

$$\frac{l}{k}=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{f(k)}}\ \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠ ÷ ㉡에서 $k=\frac{\sqrt{f(k)}}{\sqrt{2}}$

$$f(k)=2k^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{f(1)}+\sqrt{f(2)}+\cdots+\sqrt{f(10)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}k=55$$

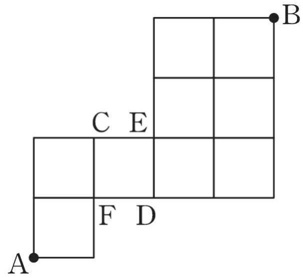
Ⅰ. 확률

19. 순열

2016수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

그림과 같이 C, D, E, F 지점을 정하면 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우는 다음 두 가지로 나눌 수 있다.



(ⅰ) C 지점을 거쳐 가는 경우

A 지점에서 C 지점까지 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

이 각각에 대하여 C 지점을 지나면 반드시 E 지점을 지나야 하므로 E 지점에서 B 지점으로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!}=6$$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$3\times6=18$$

(ⅱ) D 지점을 거쳐 가는 경우

먼저 A 지점에서 F 지점으로 와야 하므로 이 경우의 수는

$$2$$

이 각각에 대하여 D 지점에서 B 지점으로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!2!}=10$$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$2 \times 10 = 20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$18 + 20 = 38$

2016수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

조건 (가)에서 $f(1) \neq f(2)$이고 $f(2) \neq f(3)$이므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $f(1) \neq f(3)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 정하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{P}_3 = 60$$

이 각각에 대하여 조건 (나)에서 치역의 원소의 개수가 3이므로 나머지 $f(4)$, $f(5)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이므로 경우의 수는

$${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$60 \times 9 = 540$$

(ii) $f(1) = f(3)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{P}_2 = 20$$

이 각각에 대하여 $f(4)$가 $f(1)$, $f(2)$의 값 중 하나를 가지는 경우 $f(5)$는 $f(1)$, $f(2)$의 두 값을 제외하고 가져야 한다.

$f(5)$가 $f(1)$, $f(2)$의 값 중 하나를 가지는 경우도 마찬가지이다.

또, $f(4) = f(5)$인 경우는 $f(4)$와 $f(5)$가 $f(1)$, $f(2)$의 두 값을 제외한 한 값을 가져야 한다.

이때 경우의 수는

$$2 \times 3 + 2 \times 3 + 3 = 15$$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$20 \times 15 = 300$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$$540 + 300 = 840$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

(i) 일의 자리의 수가 홀수인 경우

조건 (가)에서 모든 자리의 수의 합이 짝수이려면 십, 백의 자리의 수가 (홀수, 짝수) 또는 (짝수, 홀수)이어야 한다.

일의 자리의 수가 1 또는 5, 십의 자리의 수가 3이면 백의 자리의 수는 2 또는 4 또는 6이므로 세 자리의 자연수의 개수는

$2 \times 1 \times 3 = 6$

일의 자리의 수가 1 또는 3 또는 5, 십의 자리의 수가 6이면 백의 자리의 수는 일의 자리에 있는 홀수를 제외한 나머지 2개의 홀수 중 하나이므로 세 자리의 자연수의 개수는

$3 \times 1 \times 2 = 6$

(ii) 일의 자리의 수가 짝수인 경우

조건 (가)에서 모든 자리의 수의 합이 짝수이려면 십, 백의 자리의 수가 (짝수, 짝수) 또는 (홀수, 홀수)이어야 한다.

일의 자리의 수는 2 또는 4 또는 6이므로

십의 자리와 백의 자리의 수가 모두 짝수인 세 자리의 자연수의 개수는

$3 \times 2 \times 1 = 6$

십의 자리와 백의 자리의 수가 모두 홀수인 세 자리의 자연수의 개수는

$3 \times 3 \times 2 = 18$

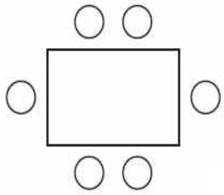
(i), (ii)에서 구하는 세 자리의 자연수의 개수는

$(6 + 6) + (6 + 18) = 36$

2016수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

구하는 경우의 수는 그림과 같은 직사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수와 같으므로



$(6-1)! \times 3 = 120 \times 3 = 360$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

각 함숫값 중 4의 개수에 따라

$(f(1), f(2), f(3), f(4))$의 가능한 경우의 수를 나누어 보면

(ⅰ) 4가 2개일 때

$(4,4,1,1)$이 가능하므로 같은것이 있는 순열로 구해보면 $\frac{4!}{2!2!}=6$가지

(ⅱ) 4가 1개일 때

$(4,3,2,1)$ 또는 $(4,2,2,2)$이 가능하므로 같은 것이 있는 순열로 구해보면

$4!+\frac{4!}{3!}=24+4=28$가지

(ⅲ) 4가 0개일 때

$(3,3,2,2)$ 또는 $(3,3,3,1)$이 가능하므로 같은 것이 있는 순열로 구해보면

$\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{3!}=6+4=10$가지

합의 법칙으로 모든 경우의 수를 더하면

$6+28+10=44$가지

2016수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

갑이 출근길과 퇴근길이 서로 다르도록 출퇴근하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$가지이다.

이중 단 한번 마주치기 위해 갑의 출근길과 퇴근길 중 하나를 선택하는 경우의 수가 2가지, 마주치지 않도록 나머지 출퇴근길을 정하는 경우의 수가 3가지이므로 곱의 법칙으로

${}_5P_2 \times 2 \times 3=120$ 가지이다.

2016수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

(가) 조건에 의해 짝수는 2, 4, 6, 8의 순서대로 배열되어야 하며 (나) 조건에 의해 7, 5, 3, 2의 순서대로 배열되어야 하므로 7,5,3,2,4,6,8의 순서로 배열되어야 한다. 즉, 7,5,3,2,4,6,8을 모두 같은 것으로 보고 일렬로 배열하는 경우의 수

$\frac{9!}{7!}=72$이다.

20. 조합

2016수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

5개의 문자 중 사용된 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 각각에 대하여 세 문자가 나열된 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 한 문자가 3개, 나머지 두 문자는 1개씩 나열된 경우 세 문자 중 3번 사용되는 한 문자를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로

$${}_3C_1=3$$

이 각각에 대하여 5개의 문자를 배열하는 경우의 수는 같은 것이 각각 3개, 1개, 1개 있는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{5!}{3!1!1!}=20$$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$3\times20=60$$

(ⅱ) 두 문자가 2개씩, 한 문자는 1개가 나열된 경우

문자가 2개씩 사용되는 두 문자를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로

$${}_3C_2={}_3C_1=3$$

이 각각에 대하여 5개의 문자를 배열하는 경우의 수는 같은 것이 각각 2개, 2개, 1개 있는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{5!}{2!2!1!}=30$$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$3\times30=90$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 합의 법칙에 의해

$60+90=150 \quad \cdots\cdots ㉡$

따라서 구하는 경우의 수는 ㉠과 ㉡에서 곱의 법칙에 의해

$$10\times150=1500$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

짝수가 2 개이므로 짝수의 개수에 따라 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) 한 학생이 짝수 2 개를 택하는 경우

짝수 2 개를 택한 학생을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 2 개에서 1 개를 택하는 조합의 수이므로

${}_2C_1 = 2$

이 각각에 대하여 짝수 2 개를 정하는 경우의 수는 2, 4 중 중복을 허락하여 2 개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 짝수 2 개를 택한 한 학생이 홀수 1, 3, 5 중 1 개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3 개에서 1 개를 택하는 조합의 수이므로

$${}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 짝수를 택하지 않은 학생이 홀수 1, 3, 5 중 중복을 허락하여 3 개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3 개에서 3 개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$2\times3\times3\times10 = 180$$

(ⅱ) A, B 가 각각 짝수 1 개를 택하는 경우

A 가 짝수 2, 4 중 한 개를 택하는 경우 수는 2

이 각각에 대하여 B 가 짝수 2, 4 중 한 개를 택하는 경우의 수는 2

이 각각에 대하여 A 가 홀수 1, 3, 5 중 중복을 허락하려 2 개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3 개에서 2 개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_3 = {}_4C_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$$

이 각각에 대하여 B 가 홀수 1, 3, 5 중 중복을 허락하여 2 개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3 개에서 2 개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_3 = {}_4C_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$2\times2\times6\times6 = 144$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$$180 + 144 = 324$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

a_n 은 n 을 뽑고 n 보다 작은 수에서 1 개, n 보다 큰 수에서 1 개를 뽑는 경우의 수이다.

이때 $a_1 = a_{30} = 0$ 이므로

$$\sum_{n=2}^{29} a_n = a_2 + a_3 + \cdots\ a_{29}$$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + \ \cdots\ + a_{30}$$

이것은 1 부터 30 까지의 자연수 중에서 3 개의 수를 뽑는 모든 경우의 수 이므로 ${}_{30}C_3$ 이다.

따라서

$$\sum_{n=2}^{29} a_n = {}_{30}C_3 = \frac{30\times29\times28}{3\times2\times1} = 4060$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

조건 (가)에서 $a_{10} \le 5$ 이고 조건 (나)에서 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{10}$ 이므로 10 개의 자연수 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 은 모두 5 이하의 자연수이다.

또 조건 (나)에 의하여 10 개의 수가 순서가 정해져 있으므로 1 부터 5 까지의 자연수에서 중복을 허락하여 10 개의 수를 선택하면 하나의 쌍이 결정된다. 따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_5H_{10} = {}_{14}C_{10} = {}_{14}C_4 = \frac{14\times13\times12\times11}{4\times3\times2\times1}$$
$$= 1001$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] 36

선택되는 8개의 과일 중 사과의 개수를 x, 감의 개수를 y, 배의 개수를 z, 귤의 개수를 w

라 하면

$$x+y+z+w = 8$$
$$(x \le 1,\ y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1)$$

이다.

ⅰ) $x = 0$ 일 때

$y+z+w=8$ $(y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1)$이고
$y=y'+1,\ z=z'+1,\ w=w'+1$이라 하면

$$y'+z'+w'=5$$
$$(y' \ge 0,\ z' \ge 0,\ w' \ge 0)$$

이므로 경우의 수는 ${}_3H_5={}_7C_5=21$이다.

ii) $x=1$일 때
$y+z+w=7$ $(y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1)$이고
$y=y'+1,\ z=z'+1,\ w=w'+1$이라 하면

$$y'+z'+w'=4$$
$$(y' \ge 0,\ z' \ge 0,\ w' \ge 0)$$

이므로 경우의 수는 ${}_3H_4={}_6C_4=15$이다.

i), ii)에서 경우의 수는 36이다.

EBS교재

[정답] ④

연필의 개수에 따라서 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) 연필을 선택하지 않는 경우
같은 종류의 볼펜 5개, 같은 종류의 만년필 5개, 같은 종류의 형광펜 5개 중 5개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$ {}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2 = \frac{7\times 6}{2\times 1}=21$$

(ii) 연필을 선택하는 경우
같은 종류의 볼펜 5개, 같은 종류의 만년필 5개, 같은 종류의 형광펜 5개 중 4개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$ {}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2 = \frac{6\times 5}{2\times 1}=15$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$$21+15=36$$

EBS교재

[정답] ②

사과 주스 3개를 한 개씩 받는 사람을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로

$$ {}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$$

이 각각에 대하여 서로 다른 빵 3개 중 2개를 사과 주스를 받지 않은 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

$$ {}_3P_2=3\times 2=6$$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$6\times 10=60$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ⑤

그릇 A에 담을 과일 2종류를 선택하는 방법이 ${}_5C_2$가지

나머지 서로 다른 과일 3개를 나머지 B, C 그릇에 담는 경우의 수가 ${}_2\Pi_3$가지

따라서 ${}_5C_2\times{}_2\Pi_3=80$이다.

EBS교재

[정답] ②

서로 다른 5개의 과일 중에 2개를 택하여 두 접시 A, B에 담는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

$$ {}_5P_2=5\times 4=20$$

이 각각에 대하여 나머지 과일 3개를 두 접시 C, D에 담는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수이므로

$$ {}_2\Pi_3=2^3=8$$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$20\times 8=160$$

EBS연계 기출문항 3

[정답] ④

천의 자리수를 x, 백의 자리수를 y, 십의 자리수를 z, 일의 자리수를 w라 하면

$$x+y+z+w=7$$

이고 $x \ge 1,\ y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1$이다.

$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1,\ w=w'+1$라 하면 (단, $x',\ y',\ z',\ w'$은 음이 아닌 정수)

$$x'+y'+z'+w'=3$$

을 만족하는 해의 개수는

$$_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$$

이다.

EBS교재

[정답] ①

천의 자리수를 x, 백의 자리수를 y, 십의 자리수를 z, 일의 자리수를 w라 하면

$$x+y+z+w=6$$

이고 $x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$, $w\geq 1$이다.

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$ 라 하면 (단, x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)

$$x'+y'+z'+w'=2$$

을 만족하는 해의 개수는

$$_4H_2={}_5C_2=10$$

이다.

2016수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

주어진 방정식을 변형하면

$5(a+b+c)=d+e+f$ 이고

$d+e+f\leq 9\times 3=27$이므로 $a+b+c$의 값은 3 또는 4 또는 5 이다.

$a'=a-1\geq 0$,

$b'=b-1\geq 0$,

$c'=c-1\geq 0$,

$d'=d-1\geq 0$,

$e'=e-1\geq 0$, $f'=f-1\geq 0$이라 하면 모두 음이 아닌 정수이다.

(ⅰ) $a+b+c=3$인 경우

$a=b=c=1$의 1가지

$d+e+f=15$ 이므로

$d'+e'+f'=12$인 경우의 수는

$_3\mathrm{H}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_2=91$

따라서 $1\times 91=91$가지

(ⅱ) $a+b+c=4$인 경우

$a'+b'+c'=1$인 경우의 수는

$_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$가지

$d+e+f=20$이므로 $d'+e'+f'=17$인 경우의 수는 $_3\mathrm{H}_{17}={}_{19}\mathrm{C}_{17}={}_{19}\mathrm{C}_2=171$

따라서 $3\times 171=513$가지

(ⅲ) $a+b+c=5$인 경우

$a'+b'+c'=2$인 경우의 수는

$_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$가지

$d+e+f=25$이므로 $d'+e'+f'=22$인 경우의 수는 $_3\mathrm{H}_{22}={}_{24}\mathrm{C}_{22}={}_{24}\mathrm{C}_2=276$가지

따라서 $6\times 276=1656$가지

합의 법칙에 의해 구하는 경우의 수는

$91+513+1656=2260$가지

2016수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

가장 많은 연필을 받는 사람의 연필개수를 X라 하면 나머지 두 사람은 $7-X$개를 받게 되므로

$X\leq 7-X$ 즉, $X\leq \dfrac{7}{2}$이므로 $X=3$이다.

(만약 $X=2$라면 2,2,2 개씩 받아도 7개를 남김없이 나누어줄 수 없다)

이때 가능한 연필 갯수는 $(3,3,1)$개 혹은 (3,2,2)개로 나누어주는 경우로 나누어볼 수 있다.

(ⅰ) $(3,3,1)$개로 나누어줄 경우

1개를 받을 한명을 선택하여 연필을 주는 경우의 수가 $_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1=21$가지

남은 두 사람에게 서로 다른 연필 6개를 3개, 3개로 분배해주는 경우의 수가 $_6\mathrm{C}_3=20$가지

따라서 $21\times 20=420$가지

(ⅱ) (3,2,2)개로 나누어줄 경우

3개를 받을 한 명을 선택 후 7개 중 3개의 연필을 주는 경우의 수가 $_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_3=105$가지

남은 두 사람에게 4개의 연필을 2개, 2개로 분배해주는 경우의 수가 $_4\mathrm{C}_2=6$가지

따라서 $105\times 6=630$가지

합의 법칙에 의해 $420+630=1050$가지

2016수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

방정식 $|x|+|y|+|z|=7$ 에서

$|x|=x'+1$, $|y|=y'+1$, $|z|=z'+1$ 이

라 하면

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=7$

$\therefore x'+y'+z'=4$ (단, x', y', z' 은 음이 아닌 정수)

방정식 $x'+y'+z'=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수는

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

이때, 하나의 순서쌍 (x', y', z') 에 대하여 순서쌍 (x, y, z) 는 $2^3=8$ 개씩 존재하므로 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 $15\times8=120$

21. 이항정리와 분할

2016수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ②

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r x^{5-2r}\cdots\cdots ㉠$$

이때 $(2+x+x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 x 항은 2와 ㉠의

x 항, x 와 ㉠의 상수항, x^2과 ㉠의 $\frac{1}{x}$ 항이 곱해질 때 나타난다.

$5-2r=1$ 에서 $r=2$ 이므로

${}_5C_2 x=10x$

$5-2r=0$ 을 만족시키는 정수 r 는 존재하지 않는다.

$5-2r=-1$ 에서 $r=3$ 이므로

${}_5C_3 x^{-1}=\frac{10}{x}$

즉, $(2+x+x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 x 항은

$2\times10x+x^2\times\frac{10}{x}=30x$

따라서 x 의 계수는 30 이다.

2016수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 6

x 의 계수를 구하면

${}_mC_1+{}_nC_1=m+n$

이므로

$m+n=12$

또, x^2 의 계수는

$${}_mC_2+{}_nC_2$$
$$=\frac{1}{2}\{m(m-1)+n(n-1)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{m^2+n^2-(m+n)\}$$
$$=\frac{1}{2}(m^2+n^2-12)$$

이 식에 $n=12-m$ 을 대입하면

$$\frac{1}{2}\{m^2+(12-m)^2-12\}$$
$$=\frac{1}{2}(m^2+m^2-24m+144-12)$$
$$=m^2-12m+66$$
$$=(m-6)^2+30$$

따라서 x^2 의 계수가 최소가 되는 m 의 값은 6 이다.

2016수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

$$10=1+1+1+1+6$$
$$=1+1+1+2+5$$
$$=1+1+1+3+4$$
$$=1+1+2+2+4$$
$$=1+1+2+3+3$$
$$=1+2+2+2+3$$
$$=2+2+2+2+2$$

따라서 구하는 경우의 수는 7 이다.

2016수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{n+1}$ 의 전개식에서 일반항은

${}_{n+1}\mathrm{C}_r(x^2)^r(x^{-1})^{n+1-r}={}_{n+1}\mathrm{C}_r x^{3r-n-1}$

(단, $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$)

x^{2n-4}항은 $3r-n-1=2n-4$에서 $r=n-1$ 일 때이므로

x^{2n-4}의 계수 a_n은

$$a_n={}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+1}\mathrm{C}_2=\frac{n(n+1)}{2}$$

따라서

$$\sum_{n=3}^{9}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=3}^{9}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=3}^{9}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$

$$=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)=\frac{7}{15}$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ④

$\left(x+\dfrac{1}{3x}\right)^6$ 의 일반항은 ${}_6\mathrm{C}_r\,(x)^{6-r}\left(\dfrac{1}{3x}\right)^r$ 이고 정리하면

$${}_6\mathrm{C}_r\,(x)^{6-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r$$

$$={}_6\mathrm{C}_r\,x^{6-r}\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$={}_6\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r x^{6-2r}$$

이다. $r=2$를 대입하면 x^2 의 계수는

${}_6\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{5}{3}$ 이다.

EBS교재

[정답] ①

$\left(x-\dfrac{3}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r(-3)^r x^{6-r}x^{-r}$$

$$={}_6\mathrm{C}_r(-3)^r x^{6-2r}$$

$x^{6-2r}=x^4$에서 $6-2r=4$, 즉 $r=1$

따라서 x^4의 계수는

${}_6\mathrm{C}_1\times(-3)^1=-18$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ②

자연수 6을 짝수개로 분할하는 방법의 수는

$\mathrm{P}(6,\ 2)+\mathrm{P}(6,\ 4)+\mathrm{P}(6,\ 6)=3+2+1=6$

이다.

(참고)

$\mathrm{P}(6,\ 2)$는 $5+1=4+2=3+3$으로 3가지

$\mathrm{P}(6,\ 4)$는 $3+1+1+1=2+2+1+1$로 2가지

$\mathrm{P}(6,\ 6)$는 $1+1+1+1+1+1$로 1가지

EBS교재

[정답] ④

$10=4+6$이므로 숫자 4를 포함하는 자연수 10의 분할은 자연수 6의 각 분할에 숫자 4를 더한 것과 같다.

$$\begin{aligned}6&=6\\&=5+1=4+2=3+3\\&=4+1+1=3+2+1=2+2+2\\&=3+1+1+1=2+2+1+1\\&=2+1+1+1+1\\&=1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

이므로 숫자 4를 포함하는 자연수 10의 분할의 수는

$$1+3+3+2+1+1=11$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

(ⅰ) A 접시에 3개, B 접시에 5개의 초콜릿을 담는 경우

$\mathrm{P}(3,3)\times\mathrm{P}(5,2)=1\times2=2$

(ⅱ) A 접시에 4개, B 접시에 4개의 초콜릿을 담는 경우

$\mathrm{P}(4,3)\times\mathrm{P}(4,2)=1\times2=2$

(ⅲ) A 접시에 5개, B 접시에 3개의 초콜릿을 담는 경우

$\mathrm{P}(5,3)\times\mathrm{P}(3,2)=2\times1=2$

(ⅳ) A 접시에 6개, B 접시에 2개의 초콜릿을 담는 경우

$\mathrm{P}(6,3)\times\mathrm{P}(2,2)=3\times1=3$

따라서 $2+2+2+3=9$가지

2016수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

각 전개식에서 x^2의 계수만 구해서 더해보면

$$\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{k}{}_kC_2(-k)^2=\sum_{k=2}^{10}\frac{k^2(k-1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^3-k^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2-\left(\frac{10\times11\times21}{6}\right)\right)$$

$$=1320$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

$$a^n=\sum_{r=1}^{2n}{}_{2n}C_r$$

$$={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$$

$$=2^{2n}-1$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{a^n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{2n}}=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1$$

22. 확률

2016수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

두 원소 a, b $(a\in A,\ b\in B)$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$$10\times10=100$$

집합 A의 원소를 3으로 나누었을 때의 나머지가 0, 1, 2인 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면

$$A_0=\{6,\ 12,\ 18\}$$

$$A_1=\{4,\ 10,\ 16\}$$

$$A_2=\{2,\ 8,\ 14,\ 20\}$$

집합 B의 원소를 3으로 나누었을 때의 나머지가 1, 2인 집합을 각각 B_1, B_2라 하면

$$B_1=\{2^2,\ 2^4,\ 2^6,\ 2^8,\ 2^{10}\}$$

$$B_2=\{2,\ 2^3,\ 2^5,\ 2^7,\ 2^9\}$$

따라서 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) $a\in A_1$, $b\in B_2$일 때,

순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $3\times5=15$

(ⅱ) $a\in A_2$, $b\in B_1$일 때,

순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $4\times5=20$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우의 수는

$$15+20=35$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

9개의 구슬을 임의로 3개씩 3묶음으로 나누어 상자 A, B, C에 넣는 경우의 수는

$${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}\times3!$$

$$=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$$

$$=1680$$

상자에 들어 있는 세 구슬에 적혀 있는 수의 합이 홀수가 되려면 세 상자에 들어 있는 구슬이 다음과 같아야 한다.

(홀수 3개), (홀수 1개, 짝수 2개), (홀수 1개, 짝수 2개) …… ㉠

(ⅰ) 홀수 1, 3, 5, 7, 9를 3개, 1개, 1개로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}$$

$$=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times2\times1\times\frac{1}{2}=10$$

(ⅱ) 짝수 2, 4, 6, 8을 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}$$

$$= \frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=3$$

(i)에서 나눈 홀수 1개, 홀수 1개와 (ii)에서 짝수 2개, 짝수 2개로 (홀수 1개, 짝수 2개), (홀수 1개, 짝수 2개)인 두 묶음을 만드는 경우의 수는 2이다.

따라서 9개의 구슬로 ㉠과 같이 3묶음으로 나누는 경우의 수는 $10\times3\times2=60$이고, 이 3묶음을 상자 A, B, C에는 넣는 경우의 수는 3!이므로 구하는 확률은

$$\frac{60\times3!}{1680}=\frac{3}{14}$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

화학Ⅰ을 선택하는 사건을 A, 생명과학Ⅱ를 선택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{21}{35}=\frac{3}{5},$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{15}{35}=\frac{3}{7},$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$$

그러므로 $\mathrm{P}((A\cup B)^C)=\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{7}$에서

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

따라서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{6}{7}=\frac{6}{35}$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

10으로 나누어떨어지지 않는다는 의미는 기계에서 찍혀 나온 5개 수의 곱이 10의 배수가 아니라는 의미이다. 즉, 15가 나오지 않는 사건을 A, 12나 28이 나오지 않는 사건을 B라 할 때, 사건 A가 일어나거나 사건 B가 일어났다는 의미이다. 이때

$$\mathrm{P}(A)=\left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$\mathrm{P}(B)=\left(\frac{3}{5}\right)^5$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\left(\frac{2}{5}\right)^5$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^5+\left(\frac{3}{5}\right)^5-\left(\frac{2}{5}\right)^5=\frac{1235}{3125}=\frac{247}{625}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=1-\frac{247}{625}=\frac{378}{625}$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ④

$f(x)=x^2-7x+10$에서 $f(1)>0$,

$f(2)=0$, $f(3)<0$, $f(4)<0$,

$f(5)=0$, $f(6)>0$이다.

따라서 $f(a)f(b)<0$이 성립하는 순서쌍 $(a,\ b)$는 (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 6), (4, 1), (4, 6), (6, 3), (6, 4)로 8개이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$이다.

EBS교재

[정답] ④

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$$6\times6=36$$

$f(a)f(b)=0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^c은 $f(a)f(b)\neq0$, 즉 $f(a)\neq0$이고 $f(b)\neq0$

이때

$$f(a)=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)\neq0$$

$$f(b)=b^2-5b+6=(b-2)(b-3)\neq0$$

이므로 a, b의 값은 각각 1, 4, 5, 6 중 하나이어야 한다.

따라서 $f(a)\neq0$이고 $f(b)\neq0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $4\times4=16$이므로

$$P(A^c)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^c)$$

$$=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

(다른 풀이)

$f(a)=0$인 사건을 A, $f(b)=0$인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이다.

$f(a)=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)=0$에서

$a=2$ 또는 $a=3$

따라서 $f(a)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2\times 6=12$이므로

$$P(A)=\frac{12}{6^2}=\frac{1}{3}$$

같은 방법으로 $P(B)=\frac{1}{3}$이다.

한편, $f(a)=f(b)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$$2\times 2=4$$

따라서 $P(A\cap B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ③

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$P(A\cap B)=0$$

이고

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

이다. $P(A)=\frac{1}{6}$ 이므로

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+P(B)$$

이다. 따라서 $P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이다.

EBS교재

[정답] ①

두 사건 A 와 B가 서로 배반사건이므로

$$P(A\cap B)=0$$

이때

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

$$=\{2P(A)+P(B)\}-P(A)$$

이므로

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-P(A)$$

$$P(A)=\frac{1}{12}$$

$$P(B)=\frac{1}{3}-2P(A)=\frac{1}{3}-2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 값은

$$P(A)P(B)=\frac{1}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^3+3x^2+2x)+1$$

$$=\frac{x}{2}(x+1)(x+2)+1$$

x, $x+1$, $x+2$가 연속한 세 수이므로

$x=2,4,6$인 경우 $f(x)$는 홀수

$x=1,5$ 인 경우 $f(x)$는 짝수

$x=3$인 경우 $f(x)$는 홀수

이므로 $f(a)$가 홀수일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이고 짝수일 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 $f(a)f(b)$가 짝수일 확률은

$1-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ 이다.

2016수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

$f(1)f(2)f(3)f(4)$가 4의 배수 또는 $f(1)\geq 4$를 만족시키는 사건을 A라고 할 때, 여사건 A^c : $f(1)f(2)f(3)f(4)$가 4의 배수가 아니고

$f(1) < 4$ 의 확률을 구하면

(i) $f(1)=2$ 인 경우

$f(1)f(2)f(3)f(4)$ 가 4 의 배수가 아니려면 $f(2)f(3)f(4)$ 가 모두 홀수이어야 하므로

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{32}$$

(ii) $f(1)=3$ 인 경우

$f(1)f(2)f(3)f(4)$ 가 4 의 배수가 아니려면 $f(2)f(3)f(4)$ 가 모두 홀수이거나 하나만 2 이어야 하므로

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}\times 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{64}$$

$$\therefore \frac{1}{32}+\frac{5}{64}=\frac{7}{64}$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

8 명의 학생 중에서 임의로 4 명을 뽑는 경우의 수는

$${}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

적어도 한 명의 여학생을 뽑는 사건을 A 라 하면 A 의 여사건 A^c 은 남학생만 4 명을 뽑는 사건이다.

남학생 5 명 중 4 명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

이므로

$$\mathrm{P}(A^c)=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A)&=1-\mathrm{P}(A^c)\\&=1-\frac{1}{14}\\&=\frac{13}{14}\end{aligned}$$

23. 조건부확률

2016수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

$$\mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\mathrm{P}((A\cap B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{13}{16}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{16} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{3}(\mathrm{P}(B))^2 \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{1}{3}(\mathrm{P}(B))^2=\frac{3}{16},\ (\mathrm{P}(B))^2=\frac{9}{16}$$

$0<\mathrm{P}(B)<1$ 이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 15

학생 60 명 중 임의로 선택한 한 명이 일본을 방문한 적이 있는 학생인 사건을 A, 중국을 방문한 적이 있는 학생인 사건을 B 라 하자.

일본, 중국을 방문한 적이 있는 학생의 수가 각각 30, 20 이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$$

학생 60 명 중 임의로 선택한 한 학생이 일본을 방문한 적이 있는 학생이었을 때, 이 학생이 중국을 방문한 적이 있는 학생일 확률 p_1 은

$$\begin{aligned}p_1&=\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{2}}=2\mathrm{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

학생 60 명 중 임의로 선택한 한 학생이 중국을 방문한 적이 있는 학생이었을 때, 이 학생이 일본을 방문한 적이 있는 학생일 확률 p_2 는

$$\begin{aligned}p_2&=\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{3}}=3\mathrm{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

이때 $p_1+p_2=\frac{5}{4}$이므로

$$2\mathrm{P}(A\cap B)+3\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{4}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

따라서 60명의 학생 중 일본과 중국을 모두 방문한 적이 있는 학생의 수는

$$60\times \mathrm{P}(A\cap B)=60\times\frac{1}{4}=15$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$

에서 $n(A\cap B)=8$이다. 또한

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{4}{13}=\frac{8}{26}$

에서 $n(B)=26$이다.

이때 회원 분포는 다음 표와 같다.

(단위 : 명)

구분	남자(A)	여자(A^C)	계
50세 이상(B)	8	18	26
50세 미만(B^C)	4	10	14
계	12	28	40

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{n(A^C\cap B^C)}{n(B^C)}$$
$$=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

점 P가 점 $B(2,3)$에 도달할 사건을 X,

점 P가 점 $A(1,2)$를 지나지 않고 움직이는 사건을 Y라 하자.

주사위 1개를 던져 점 P가 x축의 방향으로 1만큼 움직일 확률은 $\frac{1}{3}$이고 y축의 방향으로 1만큼 움직일 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(X)={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$$

점 P가 점 A를 반드시 거쳐 점 B에 도달할 확률은

$$\left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}\times\left\{{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\right\}=\frac{16}{81}$$

이므로 $\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{80}{243}-\frac{16}{81}=\frac{32}{243}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{32}{243}\times\frac{243}{80}=\frac{2}{5}$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ④

A, B가 독립이므로 B, A^c도 독립이다.

$$\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$ 에서

$$\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$$

따라서

$$\mathrm{P}(B|A^c)=\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$$

EBS교재

[정답] ③

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$이고

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$가 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\\&=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

<다른 풀이>

두 사건 A, B가 독립이므로 두 사건 A, B^C도

서로 독립이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\\&=\mathrm{P}(A)(1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\\&\quad(\because\ \mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B))\\&=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ①

동전을 5번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 n이라 하면 뒷면은 $5-n$이므로

$n(5-n)=6$이고 $n=2$ 또는 $n=3$

(i) $n=2$일 때,

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

(ii) $n=3$일 때,

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서

$$\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$$

EBS교재

[정답] ④

앞면이 한 번만 나오거나 뒷면이 한 번만 나올 확률은

$$2\times{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=2\times\frac{10}{2^{10}}$$

앞면만 나오거나 뒷면만 나올 확률은

$$2\times{}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=2\times\frac{1}{2^{10}}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-2\left(\frac{10}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}\right)=\frac{512}{502}$$

EBS연계 기출문항 3

[정답] ⑤

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\frac{13}{16}-\frac{1}{4}=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{9}{13}$$

이다.

EBS교재

[정답] ⑤

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\mathrm{P}((A\cap B)^c)&=1-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{13}{16}\end{aligned}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{16}\qquad\cdots\cdots㉠$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)&=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{3}(\mathrm{P}(B))^2\qquad\cdots\cdots㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{1}{3}(\mathrm{P}(B))^2=\frac{3}{16},\ (\mathrm{P}(B))^2=\frac{9}{16}$$

$0<\mathrm{P}(B)<1$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$$

EBS연계 기출문항 4

[정답] ②

각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀있는 정사면체 모양의 상자를 한 번 던졌을 때 2가 나오는 사건을 A라 하면 2가 아닌 숫자가 나오는 사건은 A^C이고 각각의 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$$

이다. 이 상자를 3번 던져서 사건 A가 m번, 사건 A^C가 n번 나올 확률은

$${}_3\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{4}\right)^m\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

다. 조건 $i^{|m-n|}=-i$에서

i) $m=3$, $n=0$일 때 $i^{|m-n|}=i^3=-i$

ii) $m=2$, $n=1$일 때 $i^{|m-n|}=i\neq-i$

iii) $m=1,\ n=2$ 일 때 $i^{|m-n|}=i\neq -i$

iv) $m=0,\ n=3$ 일 때 $i^{|m-n|}=i^3=-i$

이므로 조건을 만족하는 경우는 i), iv)이므로 구하는 확률은

$$ {}_3C_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3+{}_3C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0 $$

$$ =\frac{27}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{16} $$

이다.

EBS교재

[정답] ⑤

한 개의 주사위를 5번 던지는 시행이므로

$m+n=5$ ……㉠

$i^{|m-n|}=-i$를 만족시키려면 $-i=i^3$이므로

$|m-n|=3$

$m-n=-3$ 또는 $m-n=3$

(i) $m-n=-3$인 경우

㉠과 연립하여 풀면

$$ m=1,\ n=4 $$

따라서 이 경우의 확률은 주사위를 5번 던질 때 3의 배수인 눈의 수가 1번, 3의 배수가 아닌 눈의 수가 4번 나올 확률이므로

$$ {}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{3^5} $$

(ii) $m-n=3$인 경우

㉠과 연립하여 풀면

$$ m=4,\ n=1 $$

따라서 이 경우의 확률은 주사위를 5번 던질 때 3의 배수인 눈의 수가 4번, 3의 배수가 아닌 눈의 수가 1번 나올 확률이므로

$$ {}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3^5} $$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$ \frac{80}{3^5}+\frac{10}{3^5}=\frac{90}{3^5}=\frac{10}{27} $$

EBS연계 기출문항 5

[정답] ③

두 수의 곱 ab가 6의 배수일 때의 순서쌍은

(1, 6)

(2, 3),(2, 6)

(3, 2),(3, 4),(3, 6)

(4, 3),(4, 6)

(5, 6)

(6, 1),(6, 2),(6, 3),(6, 4),(6, 5),(6, 6)

으로 15개이고 두 수의 합 $a+b=7$인 순서쌍은

(1, 6),(3, 4),(4, 3),(6, 1)

로 4가지이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{15}$이다.

EBS교재

[정답] ②

한 개의 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 짝수인 사건을 B라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

사건 A의 여사건 A^c은 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건, 즉 두 눈의 수가 모두 홀수인 사건이므로

$$ \mathrm{P}(A^c)=\frac{3\times3}{36}=\frac{1}{4} $$

$$ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^c)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} $$

사건 $A\cap B$는 두 눈의 수가 모두 짝수인 사건이므로

$$ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3\times3}{36}=\frac{1}{4} $$

따라서 구하는 확률은

$$ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3} $$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

동전의 앞면이 나오는 사건을 A, 주사위의 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

그런데 6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

주사위 두 눈의 차가 1 이하이려면 두 눈이 같은 경우이거나 두 눈의 차가 1인 경우가 있으므로

$\frac{6+10}{36}=\frac{4}{9}$ 이다.

$3a+b\le 4$ 이려면

(ⅰ) $(a,b)=(0,0),\cdots,(0,4)$인 경우

$a=0$이면 되므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(ⅱ) $(a,b)=(1,0)$인 경우

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{4}{9}\right)^0\left(\frac{5}{9}\right)^4$$

(ⅲ) $(a,b)=(1,1)$인 경우

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{4}{9}\right)^1\left(\frac{5}{9}\right)^3$$

따라서

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\left(\frac{5^4}{9^4}+\frac{16\times5^3}{9^4}\right)$$

$$=\frac{3\times9^3+28\times5^3}{16\times9^3}=\frac{5687}{16\times9^3}$$

2016수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(B\mid A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A^C)}$$

$$=\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{5}{6}=\mathrm{P}(A)+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\mathrm{P}(A)$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{12}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Ⅱ.통계

24. 이산확률분포

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

확률의 총합은 1이므로

$$a+b+a^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\mathrm{E}(X)=(-1)\times a+0\times b+1\times a^2=-\frac{1}{4}$$

이므로

$$a^2-a=-\frac{1}{4},\ 4a^2-4a+1=0$$

$$a=\frac{1}{2}$$

a의 값을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{2}+b+\frac{1}{4}=1$$

$$b=\frac{1}{4}$$

따라서 $a+b$의 값은

$$a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{25}\mathrm{C}_x\,p^x(1-p)^{25-x}$$

이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}(25,\ p)$를 따른다.

$$\mathrm{E}(X)=5$$

이므로 $25\times p=5$에서

$$p=\frac{1}{5}$$

따라서

$$\mathrm{V}(X)=25\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=4$$

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=4+25=29$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

확률의 총합은 1 이므로

$$a+\frac{1}{3}+a+\frac{1}{6}=1$$

에서 $a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X의 평균은

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

$$\mathrm{E}(nX+3)=n\mathrm{E}(X)+3=n\times\frac{7}{2}+3=17$$

에서 $n=4$

한편

$$\mathrm{V}(X)=2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{4}+6^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$$

따라서

$$\mathrm{V}(nX+3)=n^2\mathrm{V}(\mathrm{X})=4^2\times\frac{7}{4}=28$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

확률변수 X 는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{6}\right)$ 을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=20\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{9}$$

$$\mathrm{V}(2X)=4\mathrm{V}(X)=\frac{100}{9}$$

확률변수 Y 는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$\mathrm{V}(Y)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$$

$$\mathrm{V}(Y+5)=\frac{n}{4}$$

$\mathrm{V}(Y+5)>\mathrm{V}(2\mathrm{X})$ 이므로

$\frac{n}{4}>\frac{100}{9}$ 에서

$$n>\frac{400}{9}=44.4\cdots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 45 이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 121

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=100\cdot\frac{1}{4}=25$$

$$\mathrm{V}(X)=100\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(2X-4)+\mathrm{V}(2X+3)&=2\mathrm{E}(X)-4+4\mathrm{V}(X)\\&=2\cdot25-4+4\cdot\frac{75}{4}\\&=121\end{aligned}$$

20167능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

확률의 총합은 1이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=20)\\&=(a-b)+(a+b)+\cdots+(a-b)+(a+b)\\&=20a=1\end{aligned}$$

$$a=\frac{1}{20}$$

$E(X)=11$ 이므로

$$1\times\left(\frac{1}{20}-b\right)+2\times\left(\frac{1}{20}+b\right)+\cdots+20\times\left(\frac{1}{20}+b\right)$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{20}\times(1+2+\cdots+20)\\&\quad+(-b+2b-3b+\cdots-19b+20b)\\&=\frac{1}{20}\times\frac{20\times21}{2}+10b\\&=\frac{21}{2}+10b=12\end{aligned}$$

$$10b=\frac{3}{2}$$

$$b=\frac{3}{20}$$

따라서 $a+b=\frac{1}{5}$

20167능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] $\frac{3}{5}$

양호한 제품 2개, 불량품 4개에서 2개를 꺼낼 때, 불량은 0개 또는 1개 또는 2개

$\therefore$ X = 0 또는 X = 1 또는 X = 2

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

이다.

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+4\times\frac{3}{10}=\frac{9}{5}$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

이므로

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

2017능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 99

제품이 합격품일 확률은 $\frac{3}{4}$이고, 포장 상자가 합격품일 확률은 $\frac{4}{5}$이므로 2개의 제품과 포장 상자 모두 합격품일 확률은

$$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{9}{20}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{9}{20}\right)$를 따르므로 확률변수 X의 분산 $\mathrm{V}(X)$는

$$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{9}{20}\times\frac{11}{20}=99$$

25. 연속확률분포

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

이 고등학교 학생의 하루 물 섭취량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1300,\ 100^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-1300}{100}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\geq 1450)=\mathrm{P}\left(\frac{X-1300}{100}\geq\frac{1450-1300}{100}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$$
$$=0.5-0.4332$$
$$=0.0668$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0,\ x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

조건 (가)에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$$\mathrm{P}(0\leq X\leq 3)=\mathrm{P}(3\leq X\leq 6)=\frac{1}{2}$$

조건 (나)에서

$\mathrm{P}(x\leq X\leq 3)=a-\frac{x^2}{18}$에 $x=0$을 대입하면

$\mathrm{P}(0\leq X\leq 3)=a$에서 $a=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 값은

$$\mathrm{P}(2\leq X\leq 5)$$
$$=\mathrm{P}(2\leq X\leq 3)+\mathrm{P}(3\leq X\leq 5)$$
$$=\mathrm{P}(2\leq X\leq 3)+\mathrm{P}(1\leq X\leq 3)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{18}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{18}\right)$$
$$=\frac{5}{18}+\frac{8}{18}$$
$$=\frac{13}{18}$$

2016수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

아파트 주민들이 일주일 동안 운동하는 시간을

확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(98,\ a^2)$을 따르고 $Z=\dfrac{X-98}{a}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(96 \le X \le 100)=\mathrm{P}\left(\frac{96-98}{a} \le Z \le \frac{100-98}{a}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-\frac{2}{a} \le Z \le \frac{2}{a}\right)$$
$$=2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{2}{a}\right)=0.383$$

따라서 $\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{2}{a}\right)=0.1915$이고

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)=0.1915$이므로

$\dfrac{2}{a}=0.5$에서 $a=4$

2016수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④

확률밀도함수 $f(x)$가 $f(2-x)=f(2+x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

$$\mathrm{P}(0 \le X \le 2)=\mathrm{P}(2 \le X \le 4)=\frac{1}{2}$$

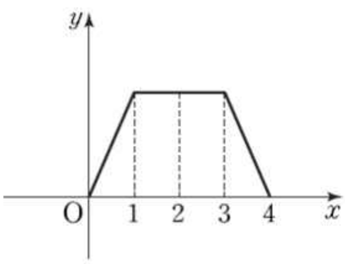
$$\mathrm{P}(0 \le X \le 1)=\mathrm{P}(3 \le X \le 4)=\frac{1}{6}$$

이므로

$$\mathrm{P}(2 \le X \le 3)=\mathrm{P}(2 \le X \le 4)-\mathrm{P}(3 \le X \le 4)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

[참고]

<함수 $y=f(x)$의 그래프의 예>



EBS연계 기출문항 1

[정답] 80

주어진 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 확률밀도함수이므로 $\int_0^1 f(x)dx=1$이다.

따라서

$$\int_0^1 k(x-x^4)dx=k\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$=k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{3}{10}k$$

$\dfrac{3}{10}k=1$에서 $k=\dfrac{10}{3}$

$\therefore\ 24k=24\times\dfrac{10}{3}=80$

EBS교재

[정답] ①

$\int_0^2 f(x)dx=1$이므로

$$\int_0^2(1+ax)dx=\left[x+\frac{a}{2}x^2\right]_0^2=2+2a=1$$

에서 $a=-\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ f(x)=1-\frac{1}{2}x$$

$0 \le x \le 2$에서 $f(x) \ge 0$을 만족시키므로

$$a=-\frac{1}{2}$$

EBS연계 기출문항 2

[정답] ⑤

$\mathrm{E}(X)=30.2,\ \sigma(X)=0.6$이므로

확률변수 X는 $\mathrm{N}(30.2,\ 0.6)$를 따른다.

그러므로

$$\mathrm{P}\ (29.6 \le X \le 31.4)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{29.6-30.2}{0.6} \le Z \le \frac{31.4-30.2}{0.6}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{-0.6}{0.6} \le Z \le \frac{1.2}{0.6}\right)$$
$$=\mathrm{P}\ (-1 \le Z \le 2)$$
$$=0.3413+0.4772$$
$$=0.8185$$

이다. 따라서 구하는 확률은 0.8185이다.

EBS교재

[정답] ③

이 고등학교 학생의 하루 물 섭취량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1300,\ 100^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-1300}{100}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 1450)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-1300}{100}\geq\frac{1450-1300}{100}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 5

연속확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^4 xf(x)dx$$

$$=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{3}x\,dx+\int_1^3\frac{1}{3}x\,dx+\int_3^4 x\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_1^3+\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_3^4=2$$

$$\mathrm{V}(X)=\int_0^4 x^2f(x)dx-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{3}x\,dx+\int_1^3\frac{1}{3}x^2\,dx+\int_3^4 x^2\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x\right)dx-4$$

$$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_1^3+\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4\right]_3^4-4$$

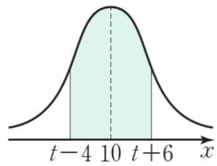
$$=\frac{1}{12}+\frac{26}{9}+\frac{148}{9}-\frac{175}{12}-4=\frac{5}{6}$$

$$\therefore V(\sqrt{6}X)=6\,V(X)=6\times\frac{5}{6}=5$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 9

정규분포 $N(10,4^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 $x=10$에서 최댓값을 가지고, 직선 $x=10$에 대하여 대칭이다.



따라서 $\mathrm{P}(t-4\leq X\leq t+6)$이 최대가 되려면 $\dfrac{t-4+(t+6)}{2}=10$

$\therefore\ t=9$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 0.02

짝수의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 홀수의 눈이 나오는 횟수는 $100-X$이므로

$$\begin{aligned}2X-(100-X)&\geq 80\\3X&\geq 180\\\therefore\ X&\geq 60\end{aligned}$$

이때 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$E(X)=100\cdot\frac{1}{2}=50$$

$$V(X)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=25$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{X-50}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 60)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{60-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 2)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0<Z<2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

26. 통계적 추정

2017수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 400

크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\overline{x}-1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}$$

이므로

$$b-a=2\times1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}$$

$2\times1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}\le 19.6$에서

$$\sqrt{n}\ge 20$$

양변을 제곱하면

$$n\ge 400$$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 400이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(|X-m|\le 9)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|\le\frac{9}{\sigma}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{9}{\sigma}\right)$$

$$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{9}{\sigma}\right)$$

$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{9}{\sigma}\right)=0.9974$에서

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{9}{\sigma}\right)=0.4987$이므로

$\frac{9}{\sigma}=3,\ \sigma=3$

즉, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따른다. 또

$$\mathrm{P}(X\le 153)=\mathrm{P}\left(\frac{X-m}{3}\le\frac{153-m}{3}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{153-m}{3}\right)$$

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{153-m}{3}\right)=0.8413$에서

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{153-m}{3}\right)=0.3413$이므로

$$\frac{153-m}{3}=1,\ m=150$$

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 3^2)$을 따르고, 임의추출한 통조림 9개의 무게의 평균 $\overline{X}$에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=150,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{3^2}{9}=1$$

이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 1^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-150}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 153)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-150}{1}\ge\frac{153-150}{1}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z\ge 3)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$$

$$=0.5-0.4987=0.0013$$

2017수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

이 회사에서 개발한 신형 자동차 중 n대를 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 신뢰도 99%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$$

$b-a=2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le 2$에서

$$\sqrt{n}\ge 2.58\times5$$

$$n\ge 166.41$$

따라서 n의 최솟값은 167이다.

2017수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

$f(x)=f(50-x)$가 성립하므로 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=25$에 대하여 대칭이다.

따라서 $m=25$이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(25,\ 4^2)$을 따르고 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(25,\ \left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le 19)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge 27)$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le \frac{19-25}{4}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{27-25}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)$

$\mathrm{P}(Z\le -1.5)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

$\mathrm{P}(Z\ge 1.5)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

따라서 $1.5=\frac{\sqrt{n}}{2}$이므로 $n=9$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(24\le \overline{X}\le 26)&=\mathrm{P}\left(\frac{24-25}{\frac{4}{\sqrt{9}}}\le Z\le \frac{26-25}{\frac{4}{\sqrt{9}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{3}{4}\le Z\le \frac{3}{4}\right)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.75)\\&=2\times 0.2734\\&=0.5468\end{aligned}$$

EBS연계 기출문항 1

[정답] ①

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(50,\ \left(\frac{8}{\sqrt{16}}\right)^2\right)=\mathrm{N}(50,2^2)$ 을 따른다.

또, 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(75,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\right)^2\right)=\mathrm{N}\left(75,\left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이 때,

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 53)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{53-50}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1.5)$
$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$ $\cdots$ ①

이고

$\mathrm{P}(\overline{Y}\le 69)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{53-50}{\frac{\sigma}{5}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le -\frac{30}{\sigma}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{30}{\sigma}\right)\cdots$ ②

이다.

주어진 조건

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 53)+\mathrm{P}(\overline{Y}\le 69)=1$ 이므로

①, ②로부터

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{30}{\sigma}\right)$

이므로 $1.5=\frac{30}{\sigma}$

$\therefore \sigma=20$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{Y}\ge 71)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-75}{4}\ge \frac{71-75}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -1)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

EBS교재

[정답] ③

크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차가 각각

$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{n}}$ 이므로 $\overline{X}$는

정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{5}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(|\overline{X}-m|>3)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right|>\frac{3}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(|Z|>\frac{3\sqrt{n}}{5}\right)$

$=1-\mathrm{P}\left(|Z|\le \frac{3\sqrt{n}}{5}\right)$

$=1-2\times \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{3\sqrt{n}}{5}\right)$

<0.0456

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{3\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.4772$이므로

$\frac{3\sqrt{n}}{5}>2$에서 $n>\frac{100}{9}$

따라서 n의 최솟값은 12이다.

EBS연계 기출문항 2

[정답] 196

n명의 학생 중 50%가 대중교통을 이용하므로

$$\hat{p}=\frac{1}{2}$$

이다. 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면

$$\frac{1}{2}-1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}}\le p\le\frac{1}{2}+1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}}$$

$$\frac{1}{2}-1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}\le p\le\frac{1}{2}+1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}$$

이다. 그러므로

$$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}}$$

$$=1.96\sqrt{\frac{1}{n}}=0.14$$

$$\sqrt{n}=14$$

이다. 따라서 $n=196$ 이다.

EBS교재

[정답] 25

n 명을 조사하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$ 이라 하면

$$\hat{p}=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$$

A 제품에 만족하는 비율 p 에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간이

$$\frac{4}{5}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{n}}\le p\le\frac{4}{5}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{n}}$$

이므로

$$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{n}}$$

$$=2\times1.96\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{4\times1.96}{5\sqrt{n}}=0.3136 \text{에서}$$

$$\sqrt{n}=5$$

따라서 구하는 자연수 n 의 값은

$$n=5^2=25$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 81

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{2^2}{n}\right)$을 따른다. 이때

$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$f(m)=\mathrm{P}\left(\overline{X}\le1.64\times\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{1.64\times\frac{2}{\sqrt{n}}-m}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(Z\le1.64-\frac{m\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$\therefore\ f(0)=\mathrm{P}(Z\le1.64)=0.5+0.45=0.95$$

$$f(0.8)=\mathrm{P}\left(Z\le1.64-\frac{0.8\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z\le1.64-0.4\sqrt{n})$$

한편, $f(0)+\mathrm{P}(0.8)\le0.97$에서

$0.95+\mathrm{P}(Z\le1.64-0.4\sqrt{n})\le0.97$

$\mathrm{P}(Z\le1.64-0.4\sqrt{n})\le0.02$

$\mathrm{P}(1.64-0.4\sqrt{n}\le Z\le0)$
$\ge\mathrm{P}(Z\le0)-0.02$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le-1.64+0.4\sqrt{n})$
$\ge0.5-0.02=0.48$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le1.96)=0.48$이므로

$-1.64+0.4\sqrt{n}\ge1.96$

$\sqrt{n}\ge9\quad\therefore\ n\ge81$

따라서 n의 최솟값은 81이다.

2017수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] $26.71\le m\le29.29$

표본평균이 28, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 100 이므로 모평균 m 의 신뢰도 99% 의 신뢰구간은

$$28-2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}\le m\le28+2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore\ 26.71\le m\le29.29$$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 288

모집단에서 임의로 100 명을 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95 % 의 신뢰구간이

$\left[\frac{1}{10}-c,\ \frac{1}{10}+c\right]$ 이므로

$$c=1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}{100}}=1.96\times\frac{3}{100}$$

또한 모집단에서 임의로 n 명을 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95 % 의 신뢰구간이

$\left[\frac{1}{9}-s(n),\ \frac{1}{9}+s(n)\right]$ 이므로

$$s(n)=1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}}{n}}=1.96\times\frac{\sqrt{8}}{9\sqrt{n}}$$

따라서

$1.96\times\frac{\sqrt{8}}{9\sqrt{n}}=\frac{50}{81}\times1.96\times\frac{3}{100}$ 이므로

$\sqrt{n}=6\sqrt{8}$

$\therefore\ n=36\times8=288$

2017수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 770

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 2 인 표본을 임의추출하여 모평균을 신뢰도 99 % 로 추정했을 때, 신뢰구간의 길이 l 은

$l=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ …… ㉠

이때, 신뢰구간의 길이를 $\frac{l}{k}$ 로 하기 위한 표본의 크기가 $f(k)$ 이므로

$\frac{l}{k}=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{f(k)}}$ …… ㉡

㉠ ÷ ㉡에서 $k=\frac{\sqrt{f(k)}}{\sqrt{2}}$

$f(k)=2k^2$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{f(1)}+\sqrt{f(2)}+\cdots+\sqrt{f(10)}\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k=55$$